IV.

DE BINIS NUMERIS

QUORUM SUMMA SIVE AUCTA SIVE MINUTA TAM UNIUS QUAM ALTERIUS QUADRATO PRODUCAT QUADRATA.

Conventui exhibita die 14. Aug. 1780.

§. 1.

Quod si bini numeri quaesiti ponantur $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ has duas formulas ambiguas: $\frac{x+y}{z} \pm \frac{xx}{zz}$ et $\frac{x+y}{z} \pm \frac{yy}{zz}$ quadrata effici oportet. Hinc ergo per zz multiplicando hae duae formulae: $(x+y)z \pm xx$ atque $(x+y)z \pm yy$ quadratis aequari debeunt. His autem conditionibus satisfaciunt hi numeri, qui sine dubio sunt minimi:

$$x = 9028 = 4.37.61,\ y = 3124 = 4.11.71 \text{ et } z = \frac{5.37^2.61^2}{2.49.31}.$$

Tum enim erit

$$(x+y)z = 20.37^2.61^2 \text{ et } xx = 16.37^2.61^2,$$

quorum numerorum summa est $6^2.37^2.61^2$ et differentia $2^2.37^2.61^2$; tum vero est $yy = 16.11^2.71^2$ unde per 4 dividendo ostendendum est tam summam quam differentiam horum numerorum:

$$5.37^2.61^2 \quad \text{et} \quad 4.11^2.71^2$$

esse quadrata. Cum autem sit $5 = 2^2 + 1^2$; $37^2 = 35^2 + 12^2$ et $61^2 = 60^2 + 11^2$ erit $5.37^2 = 82^2 + 11^2$, hincque porro $5.37^2.61^2 = 5041^2 + 242^2$ cui summae quadratorum sive addatur sive subtrahatur duplum radicum productum quod est

$$2.242.5041 = 4.11^2.71^2.$$

qui est ipse numerus sive addendus sive subtrahendus.

Analysis ad hanc solutionem ducens.

§. 2. Numerus $(x+y)z$ duplici modo statuatur summa duorum quadratorum scilicet $= A^2 + B^2$ et $= C^2 + D^2$, atque manifestum est quaesito satisfieri, si fuerit $xx = 2AB$ et $yy = 2CD$. Hunc in finem fiat $(x+y)z = (aa+bb)(cc+dd)$, unde deducitur $A = ac + bd$ et $B = ad - bc$; tum vero $C = ad + bc$ et $D = ac - bd$, sicque habebimus

$$xx = 2(ac+bd)(ad-bc) \text{ et } yy = 2(ad+bc)(ac-bd).$$

Ut jam hae formulae evadant quadrata ponatur $x = (ac+bd)f$ et $y = (ad+bc)g$, factaque evolutione prodibunt hae aequationes:

$$2(ad-bc) = (ac+bd)ff \text{ et } 2(ac-bd) = (ad+bc)gg$$

ex quarum priore deducitur $\frac{a}{b} = \frac{2c+dff}{2d-cff}$, ex posteriore vero $\frac{a}{b} = \frac{2d+cgg}{2c-dgg}$. Hi autem valores inter se coaequati praebent hanc aequationem:

$$cc(4+ffgg) + 4cd(ff-gg) = dd(4+ffgg)$$

unde radice extracta reperitur:

$$\frac{d}{c} = \frac{2(ff-gg) \pm \sqrt{4(ff-gg)^2 + (4+ffgg)^2}}{4+ffgg} \text{ sive}$$

$$\frac{d}{c} = \frac{2(ff-gg) \pm \sqrt{(4+f^4)\cdot(4+g^4)}}{4+ffgg}.$$

§. 3. Totum ergo negotium huc redit, ut hoc productum $(4+f^4)(4+g^4)$ quadratum reddatur et, quia duas quantitates f et g continet, alterutram pro lubitu accipere licebit. Sumamus ergo $g = 1$ fietque $\frac{d}{c} = \frac{2(ff-1) \pm \sqrt{5(4+f^4)}}{4+ff}$; tum vero regrediendo erit $\frac{a}{b} = \frac{2d+c}{2c-d}$, porroque $(ac+bd)f$ et $y = ad + bc$. Denique autem habebimus $z = \frac{(aa+bb)(cc+dd)}{x+y}$.

§. 4. Ponatur nunc $\sqrt{5(4+f^4)} = 5v$, ut sit

$$\frac{d}{c} = \frac{2(ff-1) \pm 5v}{4+ff}.$$

Erit ergo $25\,vv = 20 + 5f^4$, quae ergo formula casu $f = 1$ commode fit quadratum hoc vero modo ad solutionem incongruam perveniretur. Ut igitur alii valores pro f eruantur ponamus:

$f = 1 + t$ fietque $25\,vv = 25 + 20t + 30tt + 20t^3 + 5t^4$ cujus radix statuatur $5 + \alpha t + \beta tt$ et erit

$$20 + 30t + 20tt + 5t^3 = 10\alpha + (10\beta + \alpha\alpha)t + 2\alpha\beta tt + \beta\beta t^3.$$

Ut nunc bina membra priora se destruant fieri debet $\alpha = 2$, atque ut etiam secunda se destruant sumi oportet $\beta = \frac{13}{5}$, sicque habebimus $5v = 5 + 2t + \frac{13}{5}tt$ et nunc tandem remanent membra tertium et quartum quae denuo per tt divisa praebent $t = \frac{60}{11}$. Ex quo valore invento colligitur $5v = \frac{11285}{121}$; tum vero est $f = \frac{71}{11}$ ex quibus valoribus colligitur $\frac{d}{c} = \frac{2(71^2 - 11^2) \pm 11285}{4.11^2 + 71^2}$ unde sumto signo superiore oritur $\frac{d}{c} = \frac{21125}{5525} = \frac{845}{221} = \frac{5.169}{13.17}$. Sumamus igitur $d = 5.169$ et $c = 13.17$ eritque $\frac{a}{b} = \frac{147}{31}$. Sumto ergo $a = 147$ et $b = -31$, fiet $x = 4.11.13.71$ et $y = 4.13.37.61$. Hinc ergo colligitur $x + y = 4.13.2.7^2.31$ ideoque $z = \frac{5.13.37^2.61^2}{2.49.31}$ ob $aa + bb = 10.37.61$ et $cc + dd = 13^2.2.37.61$. Cum igitur hi tres numeri x, y, z habeant factorem communem 13, eo per divisionem sublato, valores harum litterarum ita fient simpliciores

$$x = 4.11.71;\quad y = 4.37.61;\quad z = \frac{5.37^2.61^2}{2.49.31}$$

unde ipsi numeri quaesiti jam erunt:

$$\frac{x}{z} = \frac{8.11.31.49.71}{5.37^2.61^2} \text{ et } \frac{y}{z} = \frac{8.31.49}{5.37.61},$$

qui sunt ipsi numeri initio allati. Quemadmodum autem hi numeri ex hypothesi $g = 1$ sunt deducti, simili modo ex alio quovis valore pro g assumto solutiones investigari poterunt. Quae autem mox ad immensos numeros excrescent. Ceterum notandum est sumto $g = 2$, eandem solutionem prodituram fuisse, cum $g^4 + 4 = 4.5$ ubi quaternarius per operationes sequentes iterum ex calculo excedit.