VI.

DE

RESOLUTIONE HUJUS AEQUATIONIS

$$0 = a + bx + cy + dxx + exy + fyy + gxxy + hxyy + ixxyy$$

PER NUMEROS RATIONALES.

Conventui exhibita die 9. Oct. 1780.

§. 1.

Haec formula nihilo aequanda complectitur in genere omnes functiones rationales integras duarum variabilium x et y, quarum utraque non ultra secundam dimensionem assurgit. Ista igitur expressio comprehendere potest novem terminos omnino, quos commode sequenti Schemate quadratico repraesentari licet:

	1	x	x^2
1	a	b	d
y	c	e	g
y^2	f	h	i

Circa hanc igitur expressionem istam quaestionem evolvendam suscipio, quomodo pro binis variabilibus x et y valores rationales investigari oporteat, quae aequationi satisfaciant.

§. 2. Ante omnia autem hic dispiciendum est, utrum forma proposita resolutionem in duos factores rationales admittat nec ne, quando quidem priori casu quaestio nulla plane laborat difficultate. Duplici autem modo evenire potest, ut tales expressiones duos factores involvant. Primo enim ea potest esse productum ex talibus duobus factoribus:

$$(\alpha + \beta x + \gamma xx)(\delta + \varepsilon y + \zeta yy) = 0.$$

Horum enim factorum dummodo alteruter radices rationales contineat alteram variabilem prorsus pro lubitu accipere licebit. Sin autem neuter horum factorum nihilo aequatus radices radionales complectatur, tum etiam aequationi propositae nullo modo satisfieri poterit.

§. 3. Alter modus, quo factores locum habere possunt ita se habet:

$$(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy)(\varepsilon + \zeta x + \eta y + \theta xy) = 0.$$

Resolutio enim hic infinitis modis in genere succedit. Posito enim priore factore $\alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy = 0$ ex eo ultro sequitur $y = \frac{-\alpha - \beta x}{\gamma + \delta x}$, ita ut, quomodocunque alterutra variabilium accipiatur, alterius valor facillime assignari possit, idque adeo duplici modo, ob geminos factores, quorum uterque nihilo aequari potest.

§. 4. His autem casibus remotis resolutio quaestionis propositae non parum est ardua, siquidem methodus desideratur omnes plane valores investigandi, qui pro x et y substituti aequationi satisfaciant. Utralibet enim variabilis pro cognita accipiatur, alterius determinatio deducit ad resolutionem aequationis quadraticae, ideoque oritur formula radicalis ad rationalitatem perducenda, quam duplicem resolutionem accuratius perpendamus.

§. 5. Consideremus igitur primo variabilem x tanquam cognitam, ac posito brevitatis gratia:

$$a + bx + dxx = P;$$
$$c + ex + gxx = Q;$$
$$f + hx + ixx = R,$$

aequatio hanc induet formam $P + Qy + Ryy = 0$, unde radice extracta oritur:

$$y = \frac{-Q \pm \sqrt{QQ - 4PR}}{2R},$$

ubi ergo omnes valores ipsius x desiderantur quibus ista formula radicalis: $\sqrt{QQ - 4PR}$ rationalis reddatur. Ista autem forma irrationalis, si loco P, Q, R valores assumti restituantur, evadet:

$$\sqrt{(c + ex + gxx)^2 - 4(a + bx + dxx)(f + hx + ixx)}.$$

Facta autem evolutione prodit sequens expressio non parum complexa:

$$\sqrt{(cc - 4af) + (2ce - 4ah - 4bf)x + (2cg + ee - 4df - 4bh - 4ai)x^2 + (2cg - 4dh - 4bi)x^3 + (gg - 4di)x^4},$$

quam ergo ad quadratum reduci oportet.

§. 6. Quoniam haec formula est biquadratica constat ejus resolutionem ne suscipi quidem posse nisi saltem unus casus innotescat quo ea evadat quadratum (ac saepenumero etiam unicus talis casus non sufficit). Cognito autem uno casu, veluti $x = n$ secundum praecepta Analyseos solita statui debet $x = n + z$, ut obtineatur nova formula unde valorem ipsius z deducere liceat, qui sit n', tum simili modo ulterius statui solet $z = n' + z'$ ut hoc modo valor z' innotescat, eodemque modo continuo ulterius progredi licet.

§. 7. Evidens autem est hanc solvendi methodum maxime esse molestam, ac plerumque vix ultra tertiam operationem ob numeros nimis magnos continuari posse; quamobrem hic methodum plane novam sum traditurus, cujus ope sine repetitis substitutionibus facillime ex valore jam cognito continuo novi valores deduci queant, quae ergo methodus in Analysin Diophantaeam insigne incrementum allatura est censenda.

§. 8. Ante omnia igitur hic assumo, cognitum esse valorem $x = m$, cui respondeat $y = n$, et quia inter x et y nacti sumus istam aequationem quadraticam $P + Qy + Ryy = 0$, ubi est, ut assumsimus: $P = a + bx + dxx$; $Q = c + ex + gxx$ et $R = f + hx + ixx$

huic aequationi per hypothesin satisfiet, sumendo $x = m$ et $y = n$; at vero eidem valori $x = m$ gemini valores pro y convenient, scilicet praeter $y = n$ adhuc alius, qui sit $y = n'$, qui facillime innotescet, cum ex natura aequationum sit $n + n' = -\frac{Q}{R}$, ideoque $n' = -\frac{Q}{R} - n$. Vel etiam, cum sit $nn' = \frac{P}{R}$ habebitur quoque $n' = \frac{P}{nR}$; hocque ergo modo ex datis valoribus $x = m$ et $y = n$ novus valor ipsius y, scilicet n' obtinebitur.

§. 9. Simili modo etiam tractari potest forma aequationis, unde ex dato y definitur x, quae aequatio, ponendo brevitatis gratia $a + cy + fyy = S$; $b + ey + hyy = T$; $d + gy + iyy = U$, habebitur haec aequatio $S + Tx + Uxx = 0$; unde patet, cuilibet valori ipsius y duos respondere valores ipsius x quorum summa semper erit $= -\frac{T}{U}$, productum autem $= \frac{S}{U}$. Quare cum constet valor $y = n$, eique respondeat $x = m$, si alter valor ipsius x sit m' erit $m + m' = -\frac{T}{U}$ ideoque $m' = -\frac{T}{U} - m$, tum vero etiam $mm' = \frac{S}{U}$, ideoque $m' = \frac{S}{mU}$, unde jam patet, harum formularum ope ex binis valoribus m et n continuo novos alios derivari posse, ita ut non opus sit ulla substitutione uti, qua forma proposita in alias formas transmutetur.

§. 10. Hinc igitur tradi possunt praecepta pro omnibus hujus generis quaestionibus resolvendis, quae in sequente problemate exponamus:

Problema.

Proposita aequatione inter binas variabiles x *et* y *in forma generali nostra contenta, si innotescant idonei valores pro* x *et* y, *ex iis alios novos elicere.*

Solutio.

§. 11. Talis aequatio ob binas variabiles x et y duplici modo repraesentetur:

I. $P + Qy + Ryy = 0$, II. $S + Tx + Uxx = 0$,

ubi ergo in priore litterae P, Q, R erunt functiones ipsius x, in posteriore vero litterae S, T, U, functiones ipsius y. Jam denotent x et y ipsos valores jam cognitos, et quia cuilibet x respondent duae y, quarum si altera designetur per y', erit $y + y' = -\frac{Q}{R}$ vel etiam $yy' = \frac{P}{R}$. Simili modo cum cuilibet y respondeant duae x, quarum altera si sit x' erit $x + x' = -\frac{T}{U}$ vel $xx' = \frac{S}{U}$.

§. 12. Cum nunc valores x et y habeantur cogniti, ex formula posteriore reperitur $x' = -\frac{T}{U} - x$ vel etiam $x' = \frac{S}{Ux}$, hic novus valor pro x inventus combinetur cum valore cognito y, indeque ex priore formula reperietur novus valor pro y, qui erit $y' = -\frac{Q}{R} - y$, vel etiam $y' = \frac{P}{Ry}$. Hic jam valor cum immediate praecedente x conjunctus praebebit ex forma posteriore novum valorem pro x, qui erit $x' = -\frac{T}{U} - x$, vel etiam $x' = \frac{S}{Ux}$ hocque modo progrediendo series infinita orietur, alternatim valores idoneos pro x et y exhibens, quorum bini contigui aequationi propositae satisfacient.

§. 13. Quod si ambae variabiles x et y permutentur, alia similis series erui poterit, scilicet incipiendo ab y et x, ex priori formula novus valor pro y reperitur qui erit $y' = -\frac{Q}{R} - y$ vel $y' = \frac{P}{Ry}$. Ex hoc valore cum cognito x conjuncto colligitur novus valor $x' = -\frac{T}{U} - x$ vel $x' = \frac{S}{Ux}$, qui denuo conjunctus cum proximo praecedente y dabit $y' = \frac{Q}{R} - y$ vel $y' = \frac{P}{Ry}$, hocque modo etiam sine fine progredi licebit. Interdum tamen alterutra harum serierum abrumpi potest, quando pervenitur vel ad $x = \infty$ vel ad $y = \infty$, tum enim ulterius progredi non licet.

§. 14. Talibus autem valoribus pro x et y inventis cum ex resolutione prioris formulae fiat $y = -\frac{Q \pm \sqrt{QQ - 4PR}}{2R}$ omnes valores pro x inventi reddent formulam $QQ - 4PR$ quadratum. Simili modo cum ex altera aequatione sit $x = -\frac{T \pm \sqrt{TT - 4SU}}{2U}$ omnes valores pro y inventi reddent formulam $TT - 4SU$ quadratum. Quo autem usus horum praeceptorum clarius appareat, aliquot exempla subjungamus.

Exemplum 1.

§. 15. Proposita sit haec aequatio:

$$xxyy - xy + 4 = xx + yy,$$

ubi statim patet sumto $x = 0$ fore $y = \pm 2$, similique modo si $y = 0$ fiet $x = \pm 2$. Praeterea etiam notetur casus quo $x = 1$; tum enim fiet $y = 3$, eodemque modo si $y = 1$ fit $x = 3$, qui ergo sunt casus cogniti, ex quibus innumeros alios derivare licebit.

§. 16. Hunc in finem repraesentatur aequatio proposita duplici modo:

$$\text{I.} \quad 4 - xx - xy + yy(xx - 1) = 0$$

$$\text{II.} \quad 4 - yy - yx + xx(yy - 1) = 0.$$

Ex harum prima oritur $y + y' = \frac{x}{xx - 1}$, vel etiam $yy' = \frac{4 - xx}{xx - 1}$. Eodem modo ex altera oritur $x + x' = \frac{y}{yy - 1}$ vel etiam $xx' = \frac{4 - yy}{yy - 1}$.

§. 17. Incipiamus nunc a valoribus $x = 0$ et $y = 2$, unde ex formula posteriore fit $x' = \frac{2}{3}$ ex hoc porro cum praecedente $y = 2$ prior formula dat $y' = -\frac{16}{5}$. Hic porro valor cum praecedente $x = \frac{2}{3}$ conjunctus dat $x' = -\frac{78}{77}$ ex quo porro fit $y' = -\frac{1102}{31}$.

Hos igitur valores ordine disponamus:

$$x = 0;\ y = 2;\ x = \tfrac{2}{3};\ y = -\tfrac{16}{5};\ x = -\tfrac{78}{77};\ y = -\tfrac{1102}{31};\ \text{etc.}$$

§. 18. Si incipiamus a valoribus $x = 0$ et $y = -2$ iidem prodibunt valores signis tantum mutatis, quod etiam eveniet permutandis variabilibus, sumendo $y = 0$ et $x = +2$; tum enim prodibunt pro x valores quos antea pro y invenimus et vicissim. Invertendo porro, si incipiamus ab $y = 2$ et $x = 0$, sequens valor pro y erit -2, unde manifesto prodit series secundo loco commemorata.

§. 19. Verum valor qui praeterea nobis est cognitus novos producit valores; incipiendo enim ab $x = 1$ et $y = 3$ erit $x' = -\frac{5}{8}$; $y' = -\frac{77}{39}$; $x'' = -\frac{31}{19 \cdot 29}$. Quod si ordine inverso incipere vellemus, ponendo $y = 3$ et $x = 1$ fit statim $y = \infty$, sicque jam tota progressio sistitur. Valores autem hic inventi ordine dispositi erunt $x = 1$; $y = 3$; $x = -\frac{5}{8}$; $y = -\frac{77}{39}$; $x = -\frac{31}{19 \cdot 29}$ ubi notandum eosdem valores etiam signis mutatis, atque adeo valoribus x et y inter se permutatis quaesito pariter satisfacere, sicque pro solutione problematis duas series in infinitum procedentes sumus adepti.

§. 20. Cum in hoc exemplo habeamus $P = 4 - xx$; $Q = -x$; $R = xx - 1$; tum vero $S = 4 - yy$; $T = -y$; $U = yy - 1$; erit $QQ - 4PR = 16 - 19xx + 4x^4$. Similique modo

$$TT - 4SU = 16 - 19yy + 4y^4,$$

quae cum sint similes inter se, ista formula: $16 - 19zz + 4z^4$ semper evadet quadratum si loco z sumamus tam valores pro x quam pro y inventos, qui ergo valores ordine dispositi sunt:

$$0,\ 2,\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{16}{5},\ \tfrac{78}{77},\ \tfrac{1102}{32},$$

$$1,\ 3,\ \tfrac{5}{8},\ \tfrac{77}{39},\ \tfrac{31}{19 \cdot 29}.$$

Veluti si sumamus $z = \frac{5}{8}$ erit $16 - 19zz + 4z^4 = \frac{97^2}{32^2}$.

§. 21. Haec insignis proprietas isti innititur fundamento, quod in aequatione proposita binae variabiles x et y inter se commutari possunt; quoties ergo aequatio proposita ita fuerit comparata semper eadem proprietas locum habebit, ut valores pro litteris x et y inventi permutationem admittant ita ut, cum series horum valorum fuerit inventa, quilibet bini termini ejus contigui pro litteris x et y sine discrimine accipi queant. Operae igitur pretium erit omnes istos casus in genere evolvere.

Exemplum 2.

§. 22. Proposita inter binas variabiles x et y hac aequatione:

$$\alpha + \beta(x+y) + \gamma(xx+yy) + \delta xy + \varepsilon xy(x+y) + \zeta xxyy = 0$$

ubi x et y permutationem admittunt, investigare omnes valores ipsarum x et y huic aequationi satisfacientes.

§. 23. Reducatur aequatio proposita ad hanc formam:

$$\alpha + \beta x + \gamma xx + y(\beta + \delta x + \varepsilon xx) + yy(\gamma + \varepsilon x + \zeta xx) = 0,$$

unde fit pro forma nostra generali:

$$\mathrm{P} = \alpha + \beta x + \gamma xx,$$
$$\mathrm{Q} = \beta + \delta x + \varepsilon xx,$$
$$\mathrm{R} = \gamma + \varepsilon x + \zeta xx,$$

qui iidem valores, permutatis x et y, valebunt pro litteris S, T, U; unde pro binis valoribus ejusdem litterae habebimus $y + y' = -\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}$ vel etiam $yy' = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}}$.

§. 24. Sint nunc A et B bini valores cogniti pro litteris x et y, ex iis sequentes qui sint C, D, E, etc. per sequentes formulas definientur: $\mathrm{C} = -\frac{\beta - \delta\mathrm{B} - \varepsilon\mathrm{B}^2}{\gamma + \varepsilon\mathrm{B} + \zeta\mathrm{B}^2} - \mathrm{A}$ sive $\mathrm{C} = \frac{\alpha + \beta\mathrm{B} + \gamma\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}(\gamma + \varepsilon\mathrm{B} + \zeta\mathrm{B}^2)}$;

tum vero $\mathrm{D} = -\frac{\beta - \delta\mathrm{C} - \varepsilon\mathrm{C}^2}{\gamma + \varepsilon\mathrm{C} + \zeta\mathrm{C}^2} - \mathrm{B}$ sive $\mathrm{D} = \frac{\alpha + \beta\mathrm{C} + \gamma\mathrm{C}^2}{\mathrm{B}(\gamma + \varepsilon\mathrm{C} + \zeta\mathrm{C}^2)}$

$\mathrm{E} = -\frac{\beta - \delta\mathrm{D} - \varepsilon\mathrm{D}^2}{\gamma + \varepsilon\mathrm{D} + \zeta\mathrm{D}^2} - \mathrm{C}$ sive $\mathrm{E} = \frac{\alpha + \beta\mathrm{D} + \gamma\mathrm{D}^2}{\mathrm{B}(\gamma + \varepsilon\mathrm{D} + \zeta\mathrm{D}^2)}$.

etc. etc.

Inventa igitur hac serie, quilibet bini termini contigui pro x et y assumi poterunt. Ita si sumamus $x = \mathrm{D}$ erit vel $y = \mathrm{C}$ vel $y = \mathrm{E}$; utroque enim modo aequationi nostrae satisfiet.

§. 25. Iidem porro etiam termini hujus seriei semper formulam $QQ - 4PR$ reddent quadratum quae cum aeque valeat pro x et y, earum loco scribamus novam litteram z et cum sit

$$P = \alpha + \beta z + \gamma zz; \quad Q = \beta + \delta z + \varepsilon zz; \quad R = \gamma + \varepsilon z + \zeta zz$$

facta evolutione pro formula $QQ - 4PR$ talis expressio reperietur: $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \mathfrak{E}z^4$, ubi erit:

$$\mathfrak{A} = \beta\beta - 4\alpha\gamma,$$
$$\mathfrak{B} = 2\beta\delta - 4\alpha\varepsilon - 4\beta\gamma,$$
$$\mathfrak{C} = \delta\delta - 2\beta\varepsilon - 4\alpha\zeta - 4\gamma\gamma,$$
$$\mathfrak{D} = 2\delta\varepsilon - 4\beta\zeta - 4\gamma\varepsilon,$$
$$\mathfrak{E} = \varepsilon\varepsilon - 4\beta\zeta.$$

§. 26. Igitur formula ad quartam dimensionem ipsius z exsurgere potest, cujusmodi formulae in Analysi Diophantaea difficillime non nisi per longos calculos ad quadratum reduci possunt. At vero series terminorum A, B, C, D, etc. ita est comparata, ut ejus quilibet terminus pro z assumtus hanc formulam reddat quadratum.

Exemplum 3.

§. 27. Proposita sit ista aequatio:

$$xxy - xyy + xx + yy - 2 = 0,$$

cui primo satisfaciunt valores $x = 1$ et $y = 1$; tum vero etiam $x = -1$ et $y = -1$. Haec aequatio ad nostram formam $P + Qx + Rxx$ reducta dat $P = xx - 2$; $Q = xx$; $R = 1 - x$. Altera vero forma $S + Ty + Uyy$ erit $S = yy - 2$; $T = - yy$; $U = 1 + y$ unde deducimus has formulas: $y + y' = \frac{xx}{x-1}$ vel etiam $yy' = \frac{xx-2}{1-x}$; tum vero $x + x' = + \frac{yy}{y+1}$ vel etiam $xx' = \frac{yy-2}{1+y}$.

§. 28. Ope harum formularum si incipiamus ab his valoribus $x = 1$ et $y = 1$ sequentas investigentur:

$x' = -\frac{1}{2}$; $y' = -\frac{7}{6}$ $x'' = -\frac{23}{5}$; $y'' = -\frac{73}{15}$; $x''' = +\frac{217}{15 . 20}$.

Pro altero casu cognito incipiamns ab $y = -1$ et $x = -1$ et valores sequentes ordine erunt:

$$y' = \tfrac{1}{2};\ x' = \tfrac{7}{6};\ y'' = \tfrac{23}{5};\ x'' = \tfrac{73}{15};\ y''' = -\tfrac{217}{15 . 20}.$$

Hi valores posteriores conveniunt praecedentibus mutatis tam signis quam binis litteris x et y cujus ratio est evidens ex ipsa aequatione proposita.

§. 29. Cum hic sit:

$$QQ - 4PR = x^4 + 4x^3 - 4xx - 8x + 8,$$

ista formula evadet quadratum, quoties pro x quispiam valorum inventorum substituatur qui sunt ordine:

$$1,\ -1,\ -\tfrac{1}{2},\ +\tfrac{7}{6},\ -\tfrac{23}{5},\ +\tfrac{73}{15},\ +\tfrac{217}{15 . 20};\ \text{etc.}$$

Veluti si sumamus $x = \frac{7}{6}$ erit

$$QQ - 4PR = \tfrac{43^2}{36^2}.$$

Exemplum 4.

§. 30. Proposita sit haec aequatio:

$$xxyy - x - y + 1 = 0,$$

cui sumto $x = 0$ satisfacit $y = 1$; at sumta $y = 0$ satisfacit $x = 1$ Jam quia formulae nostrae erunt $y + y = \frac{1}{xx}$ et $y'y = \frac{1-x}{xx}$, tum vero $x + x' = \frac{1}{yy}$ et $xx' = \frac{1-y}{yy}$. Hinc incipiendo a valoribus $x = 0$ et $y = 1$ sequentes erunt $x' = 1$; $y' = 0$; $x'' = \infty$. Tum alter casus $y = 0$ et $x = 1$ dat ut ante $y' = 1$; $x' = 0$; $y'' = \infty$, unde patet hinc alios valores non obtineri, praeter

$$x = 0 \;;\; y = 0 \;;\; x = 1$$
$$y = 1 \;;\; x = 1 \;;\; y = 1$$

neque tamen hinc concludere licet nullos alios valores satisfacere. Si enim alius insuper valor cognitus daretur, ex eo fortasse alios novos eruere liceret. At revera alii valores prorsus non dantur. Constat autem plurimas dari formulas, quae paucis tantum quibusdam casibus quadrata reddi possunt.