X.

DE INFINITIS CURVIS ALGEBRAICIS, QUARUM LONGITUDO ARCUI PARABOLICO AEQUATUR.

Conventui exhibita die 20 Aug. 1781.

Problema.

Fig. 1. *Proposita parabola AYC, ad axem AB relata, cujus parameter sit $AB = BC$, invenire innumeras curvas algebraicas AZ, quarum arcus AZ aequales sint arcui parabolico AY.*

Constructio.

Ad axem AB, retro productam in F usque eadem describatur Parabola AG. In hac axe capiatur pro lubitu punctum F, ita tamen ut, ducta applicata FG, haec recta FG ad Parametrum AB rationem teneat rationalem, quae sit $\frac{AB}{FG} = n$. Tum enim ex quolibet tali puncto F construi poterit una curva AZ quaestioni satisfaciens.

Pro Parabolae enim puncto quocunque Y, abscissâ AX et applicatâ XY determinato, rectae FG normaliter jungatur $GV = XY$, ut obtineatur angulus $GFV = \theta$; quo invento capiatur angulus $AFZ = n\theta$, sumaturque $FZ = FX$, eritque Z punctum in curva quaesita, cujus arcus AZ aequalis erit arcui AY. Hoc igitur modo, cum punctum F infinitis modis assumi possit, construentur innumerae curvae AZ ejusdem indolis eademque proprietate gaudentes.

Demonstratio.

Posito $AB = BC = 2a$ sit $AX = x$ et $XY = y$, ideoque $yy = 2ax$, unde fit $\partial x = \frac{y\partial y}{a}$ et elementum Parabolae

$$\partial s = \partial y \sqrt{1 + \frac{yy}{aa}}.$$

Jam ponatur $AF = f$ et $FG = g$ erit quoque $gg = 2af$. Jam vocetur $FZ = FX = f + x = z$ atque angulus $AFZ = \phi$ eritque elementum curvae quaesitae $= \sqrt{\partial z^2 + zz\partial\phi^2}$. Fieri ergo debet:

$$\partial z^2 + zz\partial\phi^2 = \partial y^2 + \frac{yy\partial y^2}{aa}.$$ Cum igitur sit:

$\partial z = \partial x = \frac{y\partial y}{a}$ fiet $zz\partial\phi^2 = \partial y^2$ ideoque $\partial\phi = \frac{\partial y}{z}$. Est vero $f = \frac{gg}{2a}$ et $x = \frac{yy}{2a}$, ergo $\partial\phi = \frac{2a\,\partial y}{gg + yy}$ consequenter $\phi = \frac{2a}{g}\,\mathrm{A\,tag}\,\frac{y}{g}$. At vero est $\mathrm{Arc\,tag}\,\frac{y}{g} = \theta$, et $\frac{2a}{g} = n$, ideoque $\phi = n\theta$. Sumto ergo angulo $AFZ = n\theta$ et recta $FZ = FX$ punctum Z in tali erit curva, cujus elementum elemento Parabolae aequatur.