XIV.

INTÉGRATION D'UNE ESPÈCE REMARQUABLE D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

DANS L'ANALYSE DES FONCTIONS À DEUX VARIABLES.

Présenté à l'Académie le 11. Déc. 1777.

Soit z une fonction des deux variables x et y et qu'on en tire les formules suivantes:

$$P = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$Q = \frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + \frac{2\partial\partial z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial\partial z}{\partial y^2}$$

$$R = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{3\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} + \frac{3\partial^3 x}{\partial x\,\partial y^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

$$S = \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{4\partial^4 z}{\partial x^3\,\partial y} + \frac{6\,\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{3\,\partial^4 z}{\partial x\,\partial y^3} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}$$

et ainsi de suite.

Cela posé je donnerai ici une méthode tout à fait singulière de trouver par une seule intégration l'intégrale complette de cette équation différentielle:

$$Az + BP + CQ + DR + ES + \text{etc.} = 0$$

à quelque degré que les différentielles puissent monter.

Pour cet effet il faut premièrement remarquer que toutes ces formules P, Q, R, S, etc. tiennent un très beau rapport entr'elles; car comme on a $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = P$, on trouvera

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + \frac{2\partial\partial z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial\partial z}{\partial y^2} = Q$$

et de la même manière

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+\frac{3\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}+\frac{3\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=R.$$

Il y aura de même :

$$\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial y}=S\,,\quad \frac{\partial S}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial y}=T\,;$$

ces rapports nous donneront donc les égalités suivantes :

$$\text{I.}\quad \frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=P\,,$$

$$\text{II.}\quad \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}=Q\,,$$

$$\text{III.}\quad \frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=R\,,$$

$$\text{IV.}\quad \frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial y}=S\,,$$

et ainsi de suite.

Après avoir remarqué ce beau rapport, je considère en général cette équation différentielle : $\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=nv$, dont il s'agit de trouver l'intégrale complette. Pour cet effet je mets $\partial v=p\partial x+q\partial y$, et puisque $p=\frac{\partial v}{\partial x}$ et $q=\frac{\partial v}{\partial y}$ cette équation différentielle prendra la forme suivante : $nv=p+q$ et partant $nv\partial y=p\partial y+q\partial y$, qui étant soustraite de l'équation supposée : $\partial v=p\partial x+q\partial y$ fournit celle-ci : $\partial v-nv\partial y=p(\partial x-\partial y)$ qui, étant multipliée par e^{-ny} pour rendre le premier membre intégrable, donne

$$\partial.ve^{-ny}=pe^{-ny}(\partial x-\partial y)$$

d'où l'on voit que le multiplicateur du dernier membre pe^{-ny} doit nécessairement être fonction de $x-y$ et alors son intégrale sera de même une telle fonction; par conséquent l'intégration nous fournit $ve^{-ny}=\mathfrak{A}(x-y)$ en employant la lettre $\mathfrak{A}$ pour marquer une fonction quelconque de la quantité qui y est jointe, et je me servirai dans la suite pour le même effet des lettres suivantes $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, pour en marquer d'autres fonctions. Voilà donc un beau lemme qui nous conduira à notre but proposé :

De cette équation différentielle : $nv = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$
l'intégrale complette est $v = e^{+ny}\,\mathfrak{A} : (x - y)$.

Maintenant pour trouver l'intégrale en question supposons dans ce lemme $v = az + bP + cQ + dR$ prennant pour l'équation différentielle proposée celle-ci :

$$Az + BP + CQ + DR + ES = 0$$

d'où l'on voit que la valeur de v doit renfermer un terme de moins que l'équation différentielle, et l'intégrale sera en vertu de notre lemme :

$$az + bP + cQ + dR = e^{ny}\,\mathfrak{A} : (x - y).$$

Qu'on met dans l'équation différentielle du lemme cette valeur prise pour v et on aura :

$$naz + nbP + ncQ + ndR = + a\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) + b\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + d\left(\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y}\right).$$

Mettons donc ici au lieu des formules différentielles leurs valeurs finies marquées ci-dessus et notre équation tirée du lemme sera :

$$naz + nbP + ncQ + ndR = aP + bQ + cR + dS$$

qui étant rangée suivant l'ordre des lettres P, Q, R, prendra cette forme :

$$naz + (nb - a)\,P + (nc - b)\,Q + (nd - c)\,R - dS = 0.$$

Donc puisque nous venons de trouver l'intégrale de cette équation :

$$az + bP + cQ + dR = e^{ny}\,\mathfrak{A}(x - y)$$

on n'a quà rendre cette équation identique avec la proposée savoir

$$Az + BP + CQ + DR + ES = 0$$

et nous aurons les égalités suivantes :

$$A = na, B = nb - a, C = nc - b, D = nd - c, E = -d$$

d'où nous tirons les valeurs suivantes :

$$d = - E$$
$$c = - nE - D$$
$$b = - nnE - nD - C$$
$$a = - n^3 E - nnD - nC - B$$ et enfin
$$n^4 E + n^3 D + nnC + nB + A = 0.$$

Voilà donc une équation du quatrième ordre d'où l'on doit tirer la valeur de n, qui aura donc quatre valeurs que nous supposerons être α, β, γ, δ, dont chacune nous fournira une équation intégrale dont la première sera

$$az + bP + cQ + dR = e^{\alpha y}\mathfrak{A}(x - y)$$

les autres valeurs β, γ, δ, produisent aussi d'autres valeurs pour les lettres a, b, c, d, que nous distinguerons à la manière usitée et au lieu de $\mathfrak{A}$ nous employerons les autres charactères pour les fonctions de $(x - y)$: cela posé ces autres racines fourniront les équations intégrales suivantes:

$$a' \; z + b' \; P + c' \; Q + d' \; R = e^{\beta y}\mathfrak{B}(x - y)$$
$$a'' z + b'' P + c'' Q + d'' R = e^{\gamma y}\mathfrak{C}(x - y)$$
$$a''' z + b''' P + c''' Q + d''' R = e^{\delta y}\mathfrak{D}(x - y).$$

De ces quatre équations il ne sera pas difficile de déduire les valeurs des quatre quantités z, P, Q, R.

Or il est évident que chacune de ces lettres sera exprimée par de certains multiples des quatre formules à la droite; mais nous n'en avons besoin que de la première z; donc puisque les multiplicateurs constans ne changent point les fonctions arbitraires nous n'en tiendront compte non plus et partant nous aurons pour z la valeur suivante

$$z = e^{\alpha y}\mathfrak{A}:(x-y) + e^{\beta y}\mathfrak{B}:(x-y) + e^{\gamma y}\mathfrak{C}:(x-y) + e^{\delta y}\mathfrak{D}:(x-y)$$

qui renfermant quatre constantes arbitraires exprimera l'intégrale complette de l'équation différentielle proposée, que nous avons supposée monter au quatrième degré, quoiqu'il est facile à voir quelle sera l'intégrale pour les cas où l'équation proposée monteroit ou à un plus haut degré de différentielle ou à un plus bas.

Tout révient donc à resoudre cette équation algébrique :

$$A + nB + n^2 C + n^3 D + n^4 E + n^5 F + \text{etc.} = 0$$

dont les racines étant supposées α, β, γ, δ, etc. on sera d'abord en état d'assigner l'intégrale complette de toutes ces équations différentielles à quelque degré différentiel qu'elles puissent monter.

Cependant ils se pourront rencontrer des cas, où l'évolution de l'intégrale causeroit quelque difficulté, tels par exemple, où deux ou plusieurs des racines pour le nombre n seroient imaginaires ou égales entr'elles. Pour le premier cas supposons que les deux racines α et β soyent imaginaires et qu'on ait trouvé $\alpha = \mu + \nu\sqrt{-1}$ et $\beta = \mu - \nu\sqrt{-1}$ et pour déterminer réellement les deux membres de l'intégrale $e^{\alpha y}\mathfrak{A}(x-y) + e^{\beta y}\mathfrak{B}(x-y)$ posons

$$\mathfrak{A}(x-y) = \mathfrak{H} : (x-y) + \mathfrak{G} : (x-y) \quad \text{et}$$
$$\mathfrak{B}(x-y) = \mathfrak{H} : (x-y) - \mathfrak{G} : (x-y)$$

et nous parviendrons à cette forme :

$$e^{\mu y}\,\mathfrak{H} : (x-y)\,(e^{\nu y\sqrt{-1}} + e^{-\nu y\sqrt{-1}})$$
$$+ e^{\mu y}\,\mathfrak{G} : (x-y)\,(e^{\nu y\sqrt{-1}} - e^{-\nu y\sqrt{-1}}).$$

Or on sait par la réduction des imaginaires qu'il y a

$$e^{\nu y\sqrt{-1}} + e^{-\nu y\sqrt{-1}} = 2\cos \nu y \quad \text{et} \quad e^{\nu y\sqrt{-1}} - e^{-\nu y\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\sin \nu y.$$

donc puisqu'on peut rejetter les facteurs constans les deux membres qui repondoient aux deux valeurs α et β se reduiront à cette forme réelle :

$$e^{\mu y}\cos \nu y\,\mathfrak{H} : (x-y) + e^{\mu y}\sin \nu y : \mathfrak{G}\,(x-y).$$

Pour l'autre cas où deux ou plusieurs des racines α, β, γ, deviennent égales entre elles supposons d'abord $\beta = \alpha$ et puisqu' alors les deux premiers membres se réuniroient dans un seul et qu'on n'auroit plus autant de fonctions arbitraires que le degré de l'équation différentielle proposée exige, supposons $\beta = \alpha + \omega$ en prennant ω pour marquer une quantité infiniment petite et puisque $e^{\omega y} = 1 + \omega y + \frac{1}{2}\omega^2 yy +$ etc. nous aurons $e^{\beta y} = e^{\alpha y}(1 + \omega y)$ et puisqu'il est permis de mettre $\mathfrak{B}:(x-y)$ au lieu de $\omega\mathfrak{B}(x-y)$ nous aurons au lieu des deux premiers termes qui repondent à α et β ces deux nouveaux $e^{\alpha y}\mathfrak{A}:(x-y) + e^{\alpha y}\mathfrak{B}:(x-y)$. Par le même raisonnement on se convaincra facilement que s'il y avoit trois racines égales $\alpha = \beta = \gamma$ on auroit au lieu des trois membres qui repondent à ces lettres ces trois autres :

$$e^{\alpha y}\mathfrak{A}:(x-y) + e^{\alpha y}y\mathfrak{B}:(x-y) + e^{\alpha y}y^2\mathfrak{C}:(x-y)$$

et s'il y avoit une quatrième racine égale, on n'auroit qu'à ajouter aux trois termes annoncés ce quatrième $e^{\alpha y}y^3\mathfrak{D}:(x-y)$, d'où nous pourrons resoudre les problèmes particuliers suivans.

Problème I.

Trouver l'intégrale complette de cette équation particulière :

$$P = 0, \text{ ou } \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Solution.

Puisque ici $P = 0$, nous aurons dans l'équation générale :

$$A = 0,\ B = 1,\ C = D = E = 0,$$

d'où l'équation pour trouver le nombre n sera $n = 0$; d'où l'on tire $\alpha = 0$ et partant l'intégrale complette sera $z = \mathfrak{A}:(x-y)$.

Problème II.

Trouver l'intégrale complette de cette équation $Q = 0$ *ou bien*

$$\frac{\partial\partial z}{\partial x^2} + \frac{2\partial\partial z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial\partial z}{\partial y^2} = 0.$$

Solution.

Puisque ici $Q = 0$, nous aurons dans la formule générale :

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 1;\ D = E = F = 0;$$

d'où pour déterminer le nombre n, nous aurons cette équation $nn = 0$, donc les deux racines $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ et partant égales entr'elles; par conséquent l'intégrale complette sera :

$$z = \mathfrak{A} : (x - y) + y\,\mathfrak{B} : (x - y).$$

Problème III.

Trouver l'intégrale complette de cette équation :

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{3\,\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} + \frac{3\,\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0.$$

Solution.

Puisque ici $R = 0$ nous aurons dans l'équation générale :

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 0,\ D = 1;\ E = F = 0;$$

d'où l'équation pour le nombre n sera $n^3 = 0$ et partant $\alpha = \beta = \gamma = 0$ par conséquent l'intégrale complette sera :

$$z = \mathfrak{A} : (x - y) + y\,\mathfrak{B} : (x - y) + y^2\,\mathfrak{C} : (x - y).$$