VI.

Recherches sur le problème de quatre nombres positifs et en proportion arithmétique tels, que la somme de deux quelconques soit toujours un nombre carré.

(Exhib. 1781 April. 23.)

1. Soient A, B, C, D les quatre nombres cherchés, disposés selon l'ordre de grandeur, en sorte que A soit le plus petit et D le plus grand. Les six conditions à remplir seront:

$$A+B=pp,\quad A+C=qq,\quad A+D=rr=B+C,\quad B+D=ss,\quad C+D=tt,$$

de là $2rr=pp+tt=qq+ss$, et enfin les quatre nombres cherchés seront exprimés par les quantités pp, qq, rr de la manière suivante:

$$2A=pp+qq-rr,\qquad 2B=pp+rr-qq,$$
$$2C=qq+rr-pp,\qquad 2D=3rr-pp-qq.$$

Le nombre A étant positif, il faut que $pp+qq>rr$; quant aux nombres B, C, D, ils seront de même positifs d'après la condition $2rr=pp+tt=qq+ss$, si l'on prend $p<t$, $q<s$, ce qui doit avoir lieu d'après les expressions précédentes de pp, qq, tt, ss, où, par hypothèse,

$$A<B<C<D.$$

2. De plus, on voit que r doit être égale à la somme de deux carrés; ainsi soit $r=xx+yy$, nous aurons $rr=(xx-yy)^2+(2xy)^2$, et par conséquent

$$2rr=(\pm(xx-yy)-2xy)^2+(\pm(xx-yy)+2xy)^2.$$

De là il est facile de prévoir que l'égalité $2rr=pp+tt$, ainsi que la condition $p<t$ sera remplie, si l'on prend

$$p=\pm(xx-yy)-2xy,\qquad t=\pm(xx-yy)+2xy,$$

où nous admettrons celui des deux signes $\pm$ qui rend $xx-yy$ positif.

De même, pour les nombres q, s, vérifiant les conditions

$$2rr=qq+ss,\qquad q<s,$$

nous trouvons ces expressions

$$q=\pm(x'x'-y'y')-2x'y',\qquad s=\pm(x'x'-y'y')+2x'y',$$

en admettant pour r cette autre décomposition en deux carrés $x'x'+y'y'$.

Ayant $p=\pm(xx-yy)-2xy$, $r=xx+yy$, nous en tirons

$$pp=(xx-yy)^2\mp 4xy(xx-yy)+4xxyy=(xx+yy)^2\mp 4xy(xx-yy)=rr\mp 4xy(xx-yy).$$

De même, les équations $q=\pm(x'x'-y'y')-2x'y'$, $r=x'x'+y'y'$ nous donnent

$$qq=rr\mp 4x'y'(x'x'-y'y').$$

Daprès ces valeurs de pp, qq, la condition $pp + qq > rr$ devient

$$rr > \pm 4xy(xx - yy) \pm 4x'y'(x'x' - y'y'),$$

où des deux doubles signes $\pm$ nous admettons ceux qui rendent $xx - yy$, $x'x' - y'y'$ positifs.

3. Puisque r doit être la somme de deux carrés de deux manières différentes, il doit être le produit de deux facteurs de cette même forme. Posons donc $r = (aa + bb)(cc + dd)$, où nous supposerons $a > b$, $c > d$. Pour diminuer le nombre des lettres, soit $\frac{a}{b} = f$, $\frac{c}{d} = z$, f et z étant des quantités qui surpassent 1: on aura $r = bbdd(ff + 1)(zz + 1)$, où nous pouvons supprimer le facteur carré $bbdd$ qui sera commun à tous les termes de l'inégalité que nous aurons à considérer. Ainsi nous aurons

$$r = (ff + 1)(zz + 1),$$

d'où, pour les valeurs de x, y, x', y', vérifiant les conditions

$$r = xx + yy, \qquad r = x'x' + y'y',$$

nous tirons

$$x = fz + 1, \quad x' = fz - 1, \quad y = z - f, \quad y' = z + f,$$

et de là

$$xy(xx - yy) = (fz + 1)(z - f)((f + 1)z - f + 1)((f - 1)z + f + 1) = M,$$

$$x'y'(x'x' - y'y') = (fz - 1)(z + f)((f + 1)z + f - 1)((f - 1)z - f - 1) = N,$$

ce qui change la condition

$$rr > \pm 4xy(xx - yy) \pm 4x'y'(x'x' - y'y')$$

dans la suivante:

$$rr > \pm 4M \pm 4N,$$

ici, comme plus haut, on gardera ceux des deux doubles signes $\pm$ qui rendent $\pm M$ et $\pm N$ positifs.

4. Pour que ces formules soient plus commodes, soit $\frac{f+1}{f-1} = \varrho$, ϱ étant, ainsi que f, une quantité plus grande que l'unité. Introduisant cette quantité dans les valeurs de $\frac{M}{(f-1)^2}$, $\frac{N}{(f-1)^2}$ tirées des équations précédentes, nous aurons

$$\frac{M}{(f-1)^2} = (fz + 1)(z - f)(\varrho z - 1)(z + \varrho) = P,$$

$$\frac{N}{(f-1)^2} = (fz - 1)(z + f)(\varrho z + 1)(z - \varrho) = Q,$$

de sorte que la condition à remplir sera

$$\frac{rr}{(f-1)^2} > 4(\pm P \pm Q),$$

où il faudra toujours prendre les signes de manière à rendre $\pm P$, $\pm Q$ positifs.

5. En considérant ces formules, on doit remarquer d'abord que les deux lettres f et ϱ sont permutables entre elles, puisqu'en les remplaçant l'une par l'autre, la valeur P se change en Q, et réciproquement. En effet, ayant $\varrho = \frac{f+1}{f-1}$, on aura aussi $f = \frac{\varrho+1}{\varrho-1}$, de manière que l'une se détermine par l'autre de la même façon; puis, ces deux lettres se déterminent réciproquement l'une par l'autre par cette égalité $f\varrho - \varrho - f = 1$, ou bien $(f - 1)(\varrho - 1) = 2$.

Observons ici que, dans le cas où $f = \varrho$, on a $f - 1 = \varrho - 1 = \sqrt{2}$, et par conséquent $f = \varrho = 1 + \sqrt{2}$; dans tous les autres cas, l'une sera plus petite et l'autre surpassera ce nombre.

Ainsi supposant $\varrho > f$, nous aurons $f < 1 + \sqrt{2}$, $\varrho > 1 + \sqrt{2}$. Quant au cas $f = 1$, la valeur de ϱ devient infiniment grande.

6. Ayant posé $r = (ff + 1)(zz + 1)$, on aura $rr = (ff + 1)^2 (zz + 1)^2$ et de là

$$\frac{rr}{(f-1)^2} = \frac{(ff+1)^2 (zz+1)^2}{(f-1)^2}.$$

Or comme $\frac{ff+1}{f-1} = \frac{\varrho\varrho+1}{\varrho-1}$, on obtiendra donc

$$\frac{rr}{(f-1)^2} = \frac{(ff+1)^2 (zz+1)^2}{(f-1)^2} = \frac{(ff+1)(\varrho\varrho+1)}{(f-1)(\varrho-1)}(zz+1)^2,$$

ce qui donne

$$\frac{rr}{(f-1)^2} = \frac{1}{2}(ff+1)(\varrho\varrho+1)(zz+1)^2,$$

la valeur du produit $(f-1)(\varrho-1)$ étant égale à 2, comme nous l'avons vu. Substituant cette expression de $\frac{rr}{(f-1)^2}$ dans l'inégalité précédente, nous trouverons que la condition à remplir sera la suivante

$$(ff+1)(\varrho\varrho+1)(zz+1)^2 > 8(\pm P \pm Q).$$

7. Développant les valeurs des lettres P et Q, nous aurons

$$P = f\varrho z^4 + (f\varrho+1)(\varrho-f)z^3 - (ff\varrho\varrho + 1 - (\varrho-f)^2)zz - (f\varrho+1)(\varrho-f)z + f\varrho,$$

$$Q = f\varrho z^4 - (f\varrho+1)(\varrho-f)z^3 - (ff\varrho\varrho + 1 - (\varrho-f)^2)zz + (f\varrho+1)(\varrho-f)z + f\varrho,$$

où le coefficient de zz peut se réduire à une forme très simple; en effet, puisque

$$(\varrho-f)^2 = (\varrho+f)^2 - 4f\varrho,$$

ce coefficient s'écrira ainsi: $ff\varrho\varrho + 1 + 4f\varrho - (\varrho+f)^2$. Mais nous avons vu (5) que $\varrho + f = f\varrho - 1$; donc $(\varrho+f)^2 = ff\varrho\varrho - 2f\varrho + 1$, par conséquent, ce coefficient se réduit à cette forme très simple $6f\varrho$. Ainsi nous aurons

$$P = f\varrho z^4 + (f\varrho+1)(\varrho-f)z^3 - 6f\varrho zz - (f\varrho+1)(\varrho-f)z + f\varrho,$$

$$Q = f\varrho z^4 - (f\varrho+1)(\varrho-f)z^3 - 6f\varrho zz + (f\varrho+1)(\varrho-f)z + f\varrho.$$

8. Les valeurs de P et Q étant déterminées par ces équations, nous aurons à remplir cette condition

$$(ff+1)(\varrho\varrho+1)(zz+1)^2 > 8(\pm P \pm Q);$$

de cette manière nous sommes conduits au problème suivant:

9. **Problème.** *Le nombre* f, *et par conséquent aussi* ϱ, *étant donnés, trouver toutes les valeurs de la lettre* z *qui puissent remplir la condition mentionnée.*

C'est par là qu'on parviendra à une solution complète du problème principal, attendu que la lettre $f = \frac{a}{b}$ donnera les nombres a et b, et $z = \frac{c}{d}$ pareillement c et d, desquels on tirera ensuite x, y, x', y' qui conduiront aux valeurs de p, q, r et enfin à celles de A, B, C, D.

10. **Solution.** Commençons par observer que les valeurs convenables de z sont comprises entre certaines limites, tantôt plus et tantôt moins étroites, selon la valeur du nombre f qui est toujours plus grande que 1 et moindre que $1 + \sqrt{2}$, ou bien, selon la valeur de $\varrho = \frac{f+1}{f-1}$, qui surpasse toujours $1 + \sqrt{2}$. Ces limites peuvent être facilement assignées, lorsqu'on connaît les cas dans lesquels le premier membre de notre formule devient égal à l'autre, ou lorsqu'on connaît les racines de l'équation $(ff+1)(\varrho\varrho+1)(zz+1)^2 = 8(\pm P \pm Q)$, en ne tenant compte que de celles qui surpassent l'unité; car nous supposons $z > 1$.

11. Comme cette équation renferme deux quantités connues f et ϱ, liées entr'elles par l'équation

$$\frac{ff+1}{f-1}=\frac{\varrho\varrho+1}{\varrho-1},$$

il sera utile d'introduire à leur place une seule lettre, qui puisse exprimer également l'une et l'autre quantité, ainsi soit $\frac{ff+1}{f-1}=2n$, $\frac{\varrho\varrho+1}{\varrho-1}=2n$.

D'où nous tirons pour les valeurs de f et ϱ cette expression

$$n\pm\sqrt{(nn-2n-1)}.$$

Or, comme f est plus petit que ϱ, nous prendrons

$$f=n-\sqrt{(nn-2n-1)};\quad \varrho=n+\sqrt{(nn-2n-1)},$$

et de là nous tirerons

$$f+\varrho=2n,\quad \varrho-f=2\sqrt{(nn-2n-1)}\quad \text{et enfin}\quad f\varrho=2n+1.$$

Soit ensuite $\sqrt{(nn-2n-1)}=k$, de sorte que $f=n-k$, $\varrho=n+k$, $\varrho-f=2k$. A présent il n'est pas difficile d'éliminer de notre équation les deux lettres f et ϱ.

12. Cela posé, commençons par le premier membre de notre équation, et comme

$$(ff+1)(\varrho\varrho+1)=(f\varrho-1)^2+(f+\varrho)^2$$

et que $f+\varrho=2n$ et $f\varrho-1=2n$, le premier membre prendra cette forme $8nn(zz+1)^2$, et l'équation à résoudre sera $nn(zz+1)^2=\pm P\pm Q$. Prenons maintenant en considération les valeurs de P et Q, savoir

$$P=f\varrho z^4+(f\varrho+1)(\varrho-f)z^3-6f\varrho zz-(f\varrho+1)(\varrho-f)z+f\varrho,$$
$$Q=f\varrho z^4-(f\varrho+1)(\varrho-f)z^3-6f\varrho zz+(f\varrho+1)(\varrho-f)z+f\varrho;$$

comme $f\varrho=2n+1$, $\varrho-f=2k$, ces valeurs deviendront

$$P=(2n+1)z^4+4(n+1)kz^3-6(2n+1)zz-4(n+1)kz+2n+1,$$
$$Q=(2n+1)z^4-4(n+1)kz^3-6(2n+1)zz+4(n+1)kz+2n+1.$$

13. Pour découvrir maintenant les valeurs de z dans notre équation, il faudra considérer avec soin les signes $+$ et $-$ que doivent avoir les lettres P et Q. Remarquons premièrement que lorsque $z>\varrho$, l'une et l'autre expression (4) sont positives; donc on les prendra avec le signe $+$. Mais si z est plus petit que f, alors P devient négatif et Q aussi, et par conséquent il faudra leur donner le signe $-$. Enfin, si z se trouve entre f et ϱ, la lettre P sera positive et Q négative. D'après ces considérations on voit que, selon que z est plus grand que ϱ, ou plus petit que f, ou enfin contenu entre ϱ et f, on aura trois cas à développer, nommément les suivants.

Premier cas.

Recherche des valeurs de z plus grandes que ϱ.

14. Comme les deux lettres P et Q ont le signe $+$, nous aurons

$$P+Q=2(2n+1)z^4-12(2n+1)zz+2(2n+1),$$

et notre équation développée à résoudre sera

$$nn(z^4+2zz+1)=2(2n+1)(z^4-6zz+1),$$

lorsque $nn > 2(2n+1)$, le premier membre surpassera toujours le second, et par conséquent toutes les valeurs de z, depuis ϱ jusqu'à l'infini, répondront à notre but, et nous aurons toujours $pp + qq > rr$. Cela arrive lorsque $n > 2 + \sqrt{6}$. Or, dans le cas de $n = 2 + \sqrt{6}$, on aura

$$k = \sqrt{(nn - 2n - 1)} = \sqrt{(5 + 2\sqrt{6})} = \sqrt{3} + \sqrt{2}, \quad \varrho = n + k = (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} + 1);$$
$$f = n - k = (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1).$$

Donc cela aura lieu quand

$$\varrho > (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} + 1), \qquad f < (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1),$$

ou bien, en réduisant en fractions décimales, lorsque $\varrho > 7{,}5957541$ et $f < 1{,}3032254$. Ainsi, toutes les fois que $f < 1{,}3032254$, ou $\varrho > 7{,}5957541$, la quantité z peut être plus grande que ϱ jusqu'à l'infini.

15. Passons maintenant au cas, où $nn < 2(2n+1)$, ce qui arrive lorsque $n < 2 + \sqrt{6}$, ou lorsque $f > (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)$ et, au contraire, $\varrho < (3 + \sqrt{2})(\sqrt{2} + 1)$. Si nous retranchons dans notre équation le premier membre du second, nous aurons

$$(4n + 2 - nn)z^4 - (24n + 12 + 2nn)zz + 4n + 2 - 2nn.$$

Soit, pour abréger, $\frac{nn + 12n + 6}{4n + 2 - nn} = \Delta$, il viendra, après avoir divisé par $4n + 2 - nn$,

$$z^4 - 2\Delta zz + 1 = 0.$$

En résolvant cette équation, on a $zz = \Delta \pm \sqrt{(\Delta^2 - 1)}$, ou enfin $z = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta + 1}{2}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta - 1}{2}\right)}$. Or, de ces quatre racines de l'équation $z^4 - 2\Delta zz + 1 = 0$, la plus grande $\sqrt{\left(\frac{\Delta + 1}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{\Delta - 1}{2}\right)}$ est la seule qui surpasse 1, et de là nous concluons que toutes les valeurs, depuis ϱ jusqu'à ce terme, fourniront des valeurs convenables pour z.

16. Supposons $f = \frac{3}{2}$ et par conséquent $\varrho = 5$; nous aurons $n = \frac{13}{4}$, $\Delta = 12{,}52112$ et $\frac{\Delta + 1}{2} = 6{,}76056$, $\frac{\Delta - 1}{2} = 5{,}76056$, enfin $\sqrt{\left(\frac{\Delta + 1}{2}\right)} = 2{,}60$, $\sqrt{\left(\frac{\Delta - 1}{2}\right)} = 2{,}40$, et de là $z = 5$, c'est-à-dire z ne saurait surpasser ϱ que d'une fraction extrêmement petite.

Second cas.

Recherche des valeurs de z qui se trouvent au dessous de f.

17. Ici P et Q sont négatifs, et notre équation à résoudre sera

$$nn(zz + 1)^2 = -P - Q = -2(2n+1)z^4 + 12(2n+1)zz - 2(2n+1) = -2(2n+1)(z^4 - 6zz + 1),$$

laquelle peut être réduite à la précédente, en faisant $z = \frac{v + 1}{v - 1}$; car alors on aura

$$nn(vv + 1)^2 = 2(2n+1)(v^4 - 6vv + 1).$$

Observons ici que les deux lettres v et z dépendent l'une de l'autre de la même manière que f et ϱ, de sorte qu'on aura semblablement $vz = v + z + 1$.

18. Ainsi nous aurons ici, de même qu'auparavant, les valeurs convenables de v entre les limites de ϱ et ∞, lorsque $\varrho > 7{,}5957541$, ou $f < 1{,}3032254$, et par conséquent $z = \frac{v + 1}{v - 1}$ pourra être pris entre les limites de f et 1.

*

19. Pour abréger, mettons au lieu des nombres rapportés 7,5957541 et 1,3032254 simplement ceux-ci: 7,5 et 1,3. D'après cela, on arrivera à cette conclusion importante: toutes les fois que ϱ se trouve entre les limites 7,5 et ∞, ou bien f entre 1,3 et 1, on pourra toujours prendre le nombre z, ou entre les limites ϱ et ∞, ou entre celles de f et 1.

20. Examinons à présent le cas où $\varrho < 7{,}5$, ou $f > 1{,}3$, et commençons par le cas de $\varrho = f = 1 + \sqrt{2}$. Puisque $f = \varrho$, on aura $k = 0$ et $nn - 2n - 1 = 0$, ou $nn = 2n + 1$, par conséquent

$$\varDelta = \frac{nn + 6(2n+1)}{2(2n+1) - nn} = \frac{7nn}{nn} = 7, \quad \text{et enfin}$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{7+1}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{7-1}{2}\right)} = 2 + \sqrt{3} = 3{,}7320508, \quad z = \frac{\varrho+1}{\varrho-1} = \sqrt{3} = 1{,}7320508.$$

Pour simplifier, nous remplacerons les nombres 3,7320508 et 1,7320508 par 3,73 et 1,73, et nous tirerons cette conclusion: dans le cas, où $f = \varrho = 1 + \sqrt{2}$, on pourra toujours prendre z, ou entre les limites ϱ et 3,73, ou entre celles de f et 1,73. Il ne s'agit plus que de rechercher les cas où ϱ se trouve dans les limites 7,5 et $1 + \sqrt{2}$, ou f entre celles de 1,3 et $1 + \sqrt{2}$.

21. Le cas traité précédemment par la supposition de $f = \frac{3}{2}$ et $\varrho = 5$, nous donne $v = 5$, d'où il suit que $z = \frac{v+1}{v-1} = \frac{3}{2}$, c'est-à-dire que, dans ce cas, z ne pourra différer de f que d'une fraction extrêmement petite. Il suit de là que lorsque l'on diminue ϱ au dessous de 7,5 vers le terme 5, la valeur de z diminuera de plus en plus jusqu'à devenir sensiblement égale à f.

Troisième cas.

Recherche des valeurs de z qui se trouvent entre ϱ et f.

22. Dans ce cas, la valeur de P sera positive et celle de Q négative, et l'équation à résoudre sera $nn(zz+1)^2 = P - Q$, ou $nn(zz+1)^2 = 8(n+1)k(z^3 - z)$. Supposons ici

$$\frac{8k(n+1)}{nn} = 4\vartheta, \quad \text{ou} \quad \frac{2k(n+1)}{nn} = \vartheta;$$

nous aurons cette équation bicarrée $z^4 - 4\vartheta z^3 + 2zz + 4\vartheta z + 1 = 0$, laquelle pourra être résolue sans qu'on ait recours au cube.

23. Supposons $z^4 - 4\vartheta z^3 + 2zz + 4\vartheta z + 1 = (zz - \alpha z - 1)(zz - \beta z - 1)$; le produit des facteurs du second membre est $z^4 - (\alpha+\beta)z^3 + (\alpha\beta - 2)zz + (\alpha+\beta)z + 1$, lequel étant comparé avec le premier membre, nous donne ces deux conditions $\alpha + \beta = 4\vartheta$, $\alpha\beta - 2 = 2$, ou bien $\alpha\beta = 4$, de là $\alpha - \beta = \sqrt{((\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta)} = 4\sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)}$, ce qui prouve l'impossibilité de l'équation $nn(z^4 + 2zz + 1) = 8(n+1)k(z^3 - z)$ dans le cas où $\vartheta < 1$. Donc, pour $\vartheta < 1$, on aura toujours $nn(z^4 + 2zz + 1) > 8(n+1)k(z^3 - z)$, et par conséquent toutes les valeurs de z depuis f jusqu'à ϱ vérifieront la condition mentionnée (8).

24. Pour trouver les valeurs de n qui rendent $\vartheta < 1$, nous prendrons l'expression de ϑ qui est $\frac{2k(n+1)}{nn}$, où $k = \sqrt{(nn - 2n - 1)}$. Ainsi, pour la détermination de ces valeurs de n, nous aurons cette condition

$$\frac{2(n+1)\sqrt{(nn-2n-1)}}{nn} < 1, \quad \text{ou bien} \quad n^4 - \frac{16}{3}nn - \frac{16}{3}n - \frac{4}{3} < 0,$$

qui se réduit à l'inégalité $n^4 < \frac{4}{3}(2n+1)^2$; de laquelle nous tirons

$$n^2 < \frac{2(2n+1)}{\sqrt{3}} < \frac{4n}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \text{et enfin} \quad n < \frac{2+\sqrt{(4+2\sqrt{3})}}{\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3} = 2{,}7320508.$$

Il suit de là que, tant que n est plus petit que 2,7320508, ϑ sera plus petit que 1, et toutes les valeurs de z depuis f jusqu'à ϱ satisferont à notre but.

25. Passons maintenant au cas ou $\vartheta > 1$; alors, après avoir trouvé $\alpha+\beta = 4\vartheta$ et $\alpha-\beta = 4\sqrt{(\vartheta\vartheta-1)}$, nous aurons $\alpha = 2\vartheta + 2\sqrt{(\vartheta\vartheta-1)}$, $\beta = 2\vartheta - 2\sqrt{(\vartheta\vartheta-1)}$; ainsi les deux facteurs de notre bicarré seront

$$zz - 2(\vartheta + \sqrt{(\vartheta\vartheta-1)})z - 1 \quad \text{et} \quad zz - 2(\vartheta - \sqrt{(\vartheta\vartheta-1)})z - 1,$$

qui étant égalés à 0, donneront les quatre racines de notre équation:

$$\vartheta + \sqrt{(\vartheta\vartheta-1)} + \sqrt{[2\vartheta(\vartheta+\sqrt{(\vartheta\vartheta-1)})]},$$
$$\vartheta + \sqrt{(\vartheta\vartheta-1)} - \sqrt{[2\vartheta(\vartheta+\sqrt{(\vartheta\vartheta-1)})]},$$
$$\vartheta - \sqrt{(\vartheta\vartheta-1)} + \sqrt{[2\vartheta(\vartheta-\sqrt{(\vartheta\vartheta-1)})]},$$
$$\vartheta - \sqrt{(\vartheta\vartheta-1)} - \sqrt{[2\vartheta(\vartheta-\sqrt{(\vartheta\vartheta-1)})]}.$$

Mais il n'est pas difficile de remarquer que

$$\vartheta \pm \sqrt{(\vartheta\vartheta-1)} = \left(\sqrt{\left(\frac{\vartheta+1}{2}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{\vartheta-1}{2}\right)}\right)^2;$$

donc les expressions trouvées pour les racines de notre équation se réduisent aux suivantes:

$$\vartheta + \sqrt{(\vartheta\vartheta-1)} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta+1))} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta-1))},$$
$$\vartheta + \sqrt{(\vartheta\vartheta-1)} - \sqrt{(\vartheta(\vartheta+1))} - \sqrt{(\vartheta(\vartheta-1))},$$
$$\vartheta - \sqrt{(\vartheta\vartheta-1)} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta+1))} - \sqrt{(\vartheta(\vartheta-1))},$$
$$\vartheta - \sqrt{(\vartheta\vartheta-1)} - \sqrt{(\vartheta(\vartheta+1))} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta-1))}.$$

De ces quatre racines nous n'aurons à considérer que deux

$$\vartheta + \sqrt{(\vartheta\vartheta-1)} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta+1))} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta-1))},$$
$$\vartheta - \sqrt{(\vartheta\vartheta-1)} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta+1))} - \sqrt{(\vartheta(\vartheta-1))},$$

car les deux autres sont plus petites que 1. D'après ces valeurs de z, qui rendent

$$nn(zz+1)^2 - 8(n+1)k(z^3-z) = 0,$$

il n'est pas difficile d'assigner les limites des valeurs de z qui vérifient la condition

$$nn(zz+1)^2 > 8(n+1)k(z^3-z).$$

Pour cela, nous remarquons que la plus grande valeur de z, qui rend $nn(zz+1)^2 - 8(n+1)k(z^3-z) = 0$, est $\vartheta + \sqrt{(\vartheta\vartheta-1)} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta+1))} + \sqrt{\vartheta(\vartheta-1)}$; donc toutes les valeurs qui surpassent cette limite donnent

$$nn(zz+1)^2 - 8(n+1)k(z^3-z) > 0$$

et par conséquent remplissent la condition $nn(zz+1)^2 > 8(n+1)k(z^3-z)$. Toutes les valeurs de z qui sont au-dessous de $\vartheta + \sqrt{(\vartheta\vartheta-1)} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta+1))} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta-1))}$, et qui ne sont pas inférieures à l'autre racine de l'équation $nn(zz+1)^2 - 8(n+1)k(z^3-z) = 0$,

qui est $$\vartheta - \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)} + \sqrt{\vartheta((\vartheta + 1))} - \sqrt{(\vartheta(\vartheta - 1))},$$
rendront $$nn(zz+1)^2 - 8(n+1)k(z^3 - z) < 0,$$
et par conséquent ne vérifieront pas la condition $nn(zz+1)^2 > 8(n+1)k(z^3 - z)$. Mais, passé cette limite, toutes les valeurs de z rendront de nouveau $nn(zz+1)^2 - 8(n+1)k(z^3 - z)$ positif, et par conséquent rempliront la condition $nn(zz+1)^2 > 8(n+1)k(z^3-z)$.

Donc, cette condition ne sera remplie que pour des valeurs de z comprises entre les limites

$$\vartheta + \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta+1))} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta-1))},$$
$$\vartheta - \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta+1))} - \sqrt{(\vartheta(\vartheta-1))}.$$

26. Nous sommes en état maintenant d'assigner, pour chaque valeur proposée de f ou de $\varrho = \frac{f+1}{f-1}$, des valeurs convenables de z entre f et ϱ, en cherchant $2n = \frac{ff+1}{f-1}$, ou $= \frac{\varrho\varrho+1}{\varrho-1}$, puis $k = \sqrt{(nn - 2n - 1)}$, ou bien $k = n - f = \varrho - n$ et enfin $\vartheta = \frac{2(n+1)k}{nn}$, qui détermineront les limites de z par ces formules irrationelles:

$$\vartheta + \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta+1))} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta-1))},$$
$$\vartheta - \sqrt{(\vartheta\vartheta - 1)} + \sqrt{(\vartheta(\vartheta+1))} - \sqrt{(\vartheta(\vartheta-1))}.$$

27. Ayant déterminé, d'après ces formules, les valeurs de z pour plusieurs nombres f ou ϱ, et les ayant jointes aux valeurs de z tirées des deux recherches précédentes, nous avons construit une table qui donne, pour certains nombres ϱ, les limites des valeurs de z, qui remplissent la condition (8).

C'est ainsi que nous parvenons à la solution complète du problème principal. Si la fraction $\frac{a}{b}$ est plus grande que $1 + \sqrt{2}$, on la cherchera dans la première colonne de notre table, et alors l'autre déterminera les limites du rapport $\frac{c}{d} = z$. Quant au cas de $\frac{a}{b} < 1 + \sqrt{2}$, on prendra $\frac{a}{b} = f$, et cherchant dans la première colonne la valeur de $\varrho = \frac{f+1}{f-1}$, on aura de même les limites des valeurs de $\frac{c}{d}$.

Table

qui représente, pour certains nombres ϱ, les limites pour z.

ϱ	Limites de z		ϱ	Limites de z	
2,41	1,73 ... 3,73		7,0	1,21 ... 1,38,	6,25 ... 10,71
3,0	1,71 ... 3,81		7,5	1,00 ... 1,36,	6,50 ... ∞
3,5	1,66 ... 4,00		8,0	1,00 ... 1,36,	6,56 ... ∞
3,75	1,64 ... 2,21,	2,65 ... 4,11	9,0	1,00 ... 1,35,	6,68 ... ∞
4,0	1,61 ... 1,80,	3,49 ... 4,25	10	1,00 ... 1,34,	6,92 ... ∞
4,5	1,55 ... 1,58,	4,40 ... 4,58	11	1,00 ... 1,33,	7,04 ... ∞
5,0	1,50 ... 1,50,	5,00 ... 5,00	13	1,00 ... 1,32,	7,21 ... ∞
5,5	1,43 ... 1,45,	5,44 ... 5,59	15	1,00 ... 1,32,	7,30 ... ∞
6,0	1,37 ... 1,42,	5,78 ... 6,43	∞	1,00 ... 1,30,	7,59 ... ∞
6,5	1,29 ... 1,40,	6,04 ... 7,82			

28. D'après cette table, on ne pourrait point assigner la valeur convenable de $z = \frac{c}{d}$, lorsque $\varrho = \frac{a}{b} = 5$; car, pour $\varrho = 5$, les limites de z, à un centième près, concourent l'une vers l'autre. Mais, plus nous nous éloignons de ce cas singulier, plus aussi s'étendront les limites entre lesquelles la fraction $\frac{c}{d}$ pourra être prise.

Pour éclaircir notre méthode par un exemple, prenons $\frac{a}{b} = 4$, ou bien $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$; l'autre fraction $\frac{c}{d}$ pourra être prise ou entre les limites 1,61 et 1,80, ou entre 3,49 et 4,25. Ainsi soit $\frac{a}{b} = \frac{4}{1}$, $\frac{c}{d} = \frac{7}{2}$, on aura

$a = 4$	$b = 1$
$c = 7$	$d = 2$
$x = 4.7 + 1.2 = 30$	$x' = 4.7 - 1.2 = 26$
$y = 4.2 - 7.1 = 1$	$y' = 4.2 + 7.1 = 15$
$xx - yy = 899$	$x'x' - y'y' = 451$
$2xy = 60$	$2x'y' = 780$
$xx - yy - 2xy = 839$	$x'x' - y'y' - 2x'y' = -329$

On prendra donc $p = 329$, $q = 839$ et r sera $= 30^2 + 1^2 = 26^2 + 15^2 = 901$, et d'après les valeurs de p, q, r les nombres cherchés A, B, C, D seront exprimés ainsi:

$$A = \frac{pp + qq - rr}{2} = \frac{361}{2}, \qquad B = \frac{pp + rr - qq}{2} = \frac{216121}{2},$$

$$C = \frac{qq + rr - pp}{2} = \frac{1407481}{2}, \qquad D = \frac{3rr - pp - qq}{2} = \frac{1623241}{2},$$

ces nombres étant multipliés par 4, donneront pour la solution de notre problème les quatre entiers suivants:

722, 432242, 2814962, 3246482.