1	14	22	10	18
25	8	16	4	12
19	2	15	23	6
13	21	9	17	5
7	20	3	11	24

Hievon wird die Ursache deutlicher werden, wenn man eben diese Operation auf eine allgemeine Art mit lateinischen Lettern a, b, c, d, e und griechischen α, β, γ, δ, ε anstellt, und dabei diese Ordnung beobachtet, dass man nach $a\alpha$, $a\beta$, $a\gamma$, $a\delta$, $a\varepsilon$ auf $b\alpha$, $b\beta$, $b\gamma$, u. s. w. fortgeht

$e\delta$	$b\beta$	$d\varepsilon$	$a\gamma$	$c\alpha$
$d\gamma$	$a\alpha$	$c\delta$	$e\beta$	$b\varepsilon$
$c\beta$	$e\varepsilon$	$b\gamma$	$d\alpha$	$a\delta$
$b\alpha$	$d\delta$	$a\beta$	$c\varepsilon$	$e\gamma$
$a\varepsilon$	$c\gamma$	$e\alpha$	$b\delta$	$d\beta$

A. m. T. II. p. 237. 238.

D. Miscellanea.

84.

(*J. A. Euler.*)

Wie blos aus den dreieckigten Zahlen alle vieleckigten Zahlen leicht gefunden werden können.

Wenn die m-eckigte Zahl für die Seite n gefunden werden soll, so suche man die dreieckigte Zahl für eben die Seite n und auch die vorhergehende dreieckigte Zahl, für die Seite $n-1$; diese multiplicire man mit $m-3$ und zum Product addire man jene, so hat man die verlangte vieleckigte Zahl.

Denn für die Seite n ist die dreieckigte Zahl $=\frac{nn+n}{2}$ und für die vorhergehende Seite $n-1$ ist die Dreieckzahl $=\frac{nn-n}{2}$; also diese mit $m-3$ multiplicirt gibt $(m-3)\left(\frac{nn-n}{2}\right)$, hiezu $\frac{nn+n}{2}$ addirt gibt

$$\frac{(m-2)\,nn-(m-4)\,n}{2}.$$

Also wenn die 365-eckigte Zahl von 12 verlangt wird, so ist $m-3=362$, die Dreieckszahl für 12 ist 78, die für 11 ist 66, also die gesuchte Zahl wird sein

$$362.66+78=23970.$$

A. m. T. I. p. 237.

85.

(N. Fuss I.)

Theoremata circa problema Pellianum.

I. Si fuerit $nff-1=gg$, erit $n(2fg)^2+1=(2gg+1)^2$.

Demonstratio. Cum enim sit $nff=gg+1$, multiplicando per $4gg$ fiet

$$4nffgg=4g^4+4gg$$

et addendo unitatem

$$4nffgg+1=4g^4+4gg+1=(2gg+1)^2.$$

II. Si fuerit $nff-4=gg$, erit $nffgg+4=(gg+2)^2$.

Demonstratio. Cum enim sit $nff=gg+4$ et per gg multiplicando et 4 addendo prodit

$$nffgg+4=g^4+4gg+4=(gg+2)^2. \quad \text{Q. E. D.}$$

III. Si fuerit $nff+4=gg$, erit $nff\left(\frac{gg-1}{2}\right)^2+1=\left(\frac{g^3-3g}{2}\right)^2$.

Demonstratio. Cum sit $nff=gg-4$, multiplicando per $\left(\frac{gg-1}{2}\right)^2$ et addendo 1 fiet

$$nff\left(\frac{gg-1}{2}\right)^2+1=(gg-4)\left(\frac{gg-1}{2}\right)^2+1=\frac{g^6-6g^4+9gg}{4}=\left(\frac{g^3-3g}{2}\right)^2.$$

Hinc si $n=13$, quia $13.1^2-4=9=3^2$ in theoremate secundo habemus $f=1$ et $g=3$, unde sequitur $13.3^2+4=11^2$. Nunc pro tertio theoremate habemus $f=3$ et $g=11$, hinc $\frac{gg-1}{2}=60$ et $\frac{gg-3}{2}=59$ hinc $\frac{g^3-3g}{2}=649$, ex quo sequitur fore: $13.3^2.60^2+1=649^2=13.180^2+1$.

A. m. T. I. p. 281.

86.

Theorema. Si habeantur duo casus hujusmodi $qq-app=k$ et $ss-arr=\pm k$ et capiatur $x=qr\pm ps$ et $y=qs\pm apr$, erit $yy-axx=\pm kk$. At si k sit numerus primus, semper evenit, ut alterutri horum valorum scilicet $x=qr+ps$ et $y=qs+apr$ fiant per k divisibiles, sicque habebitur

$$\frac{yy}{kk}-\frac{axx}{kk}=\pm 1.$$

A. m. T. I. p. 289.

87.

Theorema I. Si x fuerit numerus trigonalis, tum etiam $9x+1$ erit numerus trigonalis.

Sit enim $x=\frac{aa+a}{2}$ erit $9x+1=\frac{9aa+9a+2}{2}$. Est vero $9aa+9a+2=(3a+1)(3a+2)$, ideoque $9x+1$ erit numerus trigonalis, cujus radix est $3a+1$.

Corollarium 1. Si ergo x fuerit summa duorum trigonalium, tum etiam $9x+2$ erit summa duorum trigonalium. Sit enim $x=\frac{aa+a}{2}+\frac{bb+b}{2}$, erit $9x+2=\frac{9aa+9a+2}{2}+\frac{9bb+9b+2}{2}$.

Corollarium 2. Simili modo si x fuerit summa trium trigonalium, tum etiam erit $9x+3$ summa trium trigonalium. Si enim sit $x=\Delta+\Delta'+\Delta''$, tum erit $9x+3=9\Delta+1+9\Delta'+1+9\Delta''+1$.

Theorema II. Si x fuerit numerus trigonalis, tum etiam $25x+3$ erit numerus trigonalis.

Sit enim $x=\frac{aa+a}{2}$, erit $25x+3=\frac{25aa+25a+6}{2}$. Est vero $25aa+25a+6=(5a+2)(5a+3)$, unde radix trigonalis erit $5a+2$. Hinc si x fuerit summa duorum trigonalium, erit etiam $25x+6$ summa duorum trigonalium; ac si x fuerit summa trium trigonalium, tum etiam erit $25x+9$ summa trium trigonalium.

Theorema III. Si fuerit x numerus trigonalis, erit etiam $49x+6$ numerus trigonalis.

Sit enim $x=\frac{aa+a}{2}$, erit $49x+6=\frac{49aa+49a+12}{2}=\frac{(7a+3)(7a+4)}{2}$ numerus trigonalis, cujus radix est $7a+3$. Hinc si x fuerit summa duorum trigonalium, erit etiam $49x+12$ summa duorum trigonalium; at si fuerit x summa trium trigonalium, erit itidem $49x+18$ summa trium trigonalium.

Theorema IV. Si fuerit x numerus trigonalis, erit etiam $81x+10$ numerus trigonalis.

Sit enim $x=\frac{aa+a}{2}$, erit $81x+10=\frac{81aa+81a+20}{2}=\frac{(9a+4)(9a+5)}{2}$ numerus trigonalis, ejusque radix $=9a+4$.

etc. etc.

Ex his igitur sequitur, si numerus $9x+3$ nullo modo in tres trigonales resolvi queat, tum etiam numerum x in tres trigonales resolvi non posse. Simili modo si numerus $25x+9$ resolutionem in tres trigonales non admittat, etiam numerus x non admittet. Ac si numerus $49x+18$ non admittat resolutionem in tres trigonales, numerus ipse x etiam non admittet.

A. m. T. II. p. 25 26.

88.

Theorema. Si productum $P=2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots(n+1)$ dividatur per potestatem 2^n, quotus erit productum ex omnibus numeris imparibus:

$$1.3.5.7.9\ldots(2n-1).$$

Demonstratio. Cum sit

$$P=\frac{1.2.3.4\ldots 2n}{1.2.3.4\ldots n}$$

multiplicetur supra et infra per 2^n eritque

$$P=\frac{2^n.1.2.3.4\ldots 2n}{2.4.6.8\ldots\ldots 2n}$$

ac divisione actu facta fiet $P=2^n.1\ 3.5.7\ldots(2n-1)$. Q. E. D.

A. m. T. II. p. 60.

89.

Theorema numericum. Si sumantur quotcunque numeri pro lubitu, veluti quatuor p, q, r, s, hincque formentur bini ordines totidem aliorum, hoc modo

$$a=p,\quad b=p+q,\quad c=p+q+r,\quad d=p+q+r+s$$

similique modo $\alpha=s,\quad \beta=s+r,\quad \gamma=s+r+q,\quad \delta=s+r+q+p.$

tum semper erit $$\frac{1}{abcd}-\frac{1}{abc\alpha}+\frac{1}{ab\alpha\beta}-\frac{1}{a\alpha\beta\gamma}+\frac{1}{\alpha\beta\gamma\delta}=0.$$

Veluti si fuerint numeri dati 1, 2, 3, 4 erit $a=1$, $b=3$, $c=6$, $d=10$, $\alpha=4$, $\beta=7$, $\gamma=9$, $\delta=10$, eritque

$$\frac{1}{1.3.6.10}-\frac{1}{1.3.6.4}+\frac{1}{1.3.4.7}-\frac{1}{1.4.7.9}+\frac{1}{4.7.9.10}=0.$$

A. m. T. II. p. 208.

90.

Theorema. Si proposita fuerit haec formula $zz = aa + 2abx + max^2 + 2dex^3 + eex^4$, in qua sit

$$m = bb + dd - ff,$$

tum eadem forma sequentibus modis repraesentari potest:

$$1)\quad zz = (a + bx)^2 + xx(ex + d + f)(ex + d - f)$$

$$2)\quad zz = xx(ex + d)^2 + (a + (b + f)x)(a + (b - f)x),$$

unde sequitur $z = a + bx$ si fuerit vel $x = \frac{-d-f}{e}$, vel $x = \frac{-d+f}{e}$. Ex altera

$$z = x(ex + d) \quad \text{si fuerit} \quad \text{vel } x = \frac{-a}{b+f}, \quad \text{vel } x = \frac{-a}{b-f}.$$

Praeter hos quatuor valores operationes vulgares praebent adhuc sequentes sex valores

$$\text{I.}\quad x = \frac{2ae + ff - dd}{2e(a - b)}, \qquad \text{II.}\quad x = \frac{2a(b - d)}{2ae + ff - bb}, \qquad \text{III.}\quad x = \frac{2ae + ff - dd}{2e(d + b)}, \qquad \text{IV.}\quad x = \frac{2a(b + d)}{-2ae + ff - bb}$$

$$\text{V.}\quad x = \frac{3aade + 4ab(ff - dd)}{(ff - dd)^2 - 4aaee}, \qquad \text{V.}\quad x = \frac{(ff - bb)^2 - 4aaee}{8abee + 4de(ff - bb)}.$$

A. m. T. III. p. 163.