XI.

Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires.

(Conf. commentationem de eodem argumento in Actor. Acad. Berolinensis tomo V. A. 1749 pag. 139.)

---

§ 1. Dans le commerce littéraire de MM. Leibnitz et Jean Bernoulli, on trouve une grande controverse sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires, controverse qui a été traitée, de part et d'autre, avec beaucoup de force; sans pourtant que ces deux grands hommes fussent tombés d'accord sur cette matière, quoiqu'on remarque d'ailleurs entr'eux une très parfaite harmonie sur tous les autres points de l'analyse. Cette dissension paraît d'autant plus remarquable qu'elle roule sur un article de cette partie des Mathématiques qu'on nomme pures, et qu'on ne croit ordinairement susceptible d'aucune contestation, tout y étant fondé sur les plus rigoureuses démonstrations. Car on sait, que les autres questions, sur lesquelles les mathématiciens ne sont pas d'accord, appartiennent à la partie appliquée des Mathématiques, où les diverses manières d'envisager les objets et de les ramener à des idées mathématiques peuvent donner lieu à des controverses réelles; et on se vante même souvent qu'elles sont tout à fait bannies de l'analyse ou des mathématiques pures.

§ 2. En effet, la gloire d'infaillibilité que cette science s'est acquise, souffrirait une grande atteinte, s'il y avait des questions sur lesquelles les sentiments seraient non seulement partagés, mais où il serait même impossible de découvrir la vérité par une démonstration évidente qui puisse mettre fin à toutes les disputes. Comme il n'y a aucun doute qu'un tel accommodement entre les divers sentiments de MM. Leibnitz et Bernoulli n'ait lieu, je vais examiner l'un et l'autre, en pesant les arguments que chacun allègue tant pour la confirmation de son sentiment que pour la réfutation du contraire, et j'espère bien développer cette matière et la mettre dans tout son jour, de sorte qu'il n'y reste plus aucun doute, et que l'une et l'autre partie sera obligée de reconnaître la solidité de la décision que je donnerai, et qui mettra fin à toutes les disputes qui pourraient encore naître sur cette matière.

§ 3. M. Leibnitz donna le premier occasion à cette controverse avec M. Bernoulli, quand il avança dans la CXC épitre que la raison de 1 à -1, ou de -1 à $+1$ était imaginaire, puisque le logarithme, ou la mesure de cette raison était imaginaire, où il supposait évidemment que les logarithmes des nombres négatifs sont imaginaires ou impossibles. Là-dessus, M. Bernoulli déclara, dans la CXCIII épître, qu'il n'était point du même avis, et qu'il croyait même que les logarithmes des nombres négatifs étaient non seulement réels, mais aussi égaux aux logarithmes des mêmes nombres pris affirmativement. Il soutient donc que $l(+x) = l(-x)$, ce qu'il veut prouv... par l'égalité de leurs différentielles, vu que

$$dlx = \frac{dx}{x} \quad \text{et de même} \quad dl(-x) = \frac{-dx}{-x} = \frac{dx}{x}.$$

Contre cet argument M. Leibnitz réplique, que la règle commune de différentier ler logarithmes en divisant la différentielle du nombre par le nombre même, n'avait lieu que pour les nombres affirmatifs, et que, par conséquent, cette différentiation $dlx = \frac{dx}{x}$ n'était juste, que lorsque x mar... quait une quantité affirmative. Mais j'avoue que cette réponse, si elle était juste, ébranlerait le fon... dement de toute l'analyse qui consiste principalement dans la généralité des règles et des opérations qui sont jugées vraies, de quelque nature qu'on suppose être les quantités auxquelles on les applique.

§ 4. Mais quoique la règle de différentier les logarithmes soit généralement vraie, de sorte que $dlx = \frac{dx}{x}$, soit que x fût une quantité affirmative ou négative, l'argument de M. Bernoulli ne prouve pas ce qu'il veut prouver. Je dis que de ce que les différentielles des quantités lx et $l(-x)$ sont égales, il ne s'ensuit nullement que les quantités mêmes soient égales entr'elles; puis... qu'on sait que deux quantités qui diffèrent d'une constante ont la même différentielle. Ainsi les différentielles de $x+1$ et de $x-1$ sont l'une et l'autre $= dx$, sans qu'on en puisse conclure une égalité entre les quantités $x+1$ et $x-1$. Outre cela, M. Bernoulli aurait prouvé par le même raisonnement que $l2x = lx$ puisque

$$dl2x = \frac{2dx}{2x} = \frac{dx}{x} = dlx,$$

et en général, il s'en suivrait que $lnx = lx$, n marquant un nombre quelconque. C'est pourquoi de l'égalité entre les différentielles des lx et $l(-x)$ on ne peut rien conclure, sinon que ces deux logarithmes diffèrent entre eux d'une quantité constante. Et en effet, $l(-x)$ à cause de $-x = x.-1$ n'est autre chose que $lx + (l-1)$. Il est vrai que M. Bernoulli prétend que $l(-1) = l1 = 0$, auquel cas il serait sans doute $l(-x) = l(+x)$, mais c'est justement ce que M. Leibnitz avait nié et que M. Bernoulli voulait prouver par cet argument; de sorte que, de ce côté-ci, rien n'est encore décidé.

§ 5. Dans le même passage que je viens d'examiner, M. Bernoulli se sert encore d'un autre argument, mais qui ne diffère du précédent que dans la manière de le proposer; quand il soutient que la courbe logarithmique a, des deux côtés de son asymptote, deux parties égales et semblables, de sorte qu'à chaque abscisse ou logarithme répondent deux ordonnées ou nombres égaux, l'un affir... matif, l'autre négatif. Car, considérant l'équation de cette courbe $ydx = ady$, où x marque l'abscisse prise sur l'asymptote de la logarithmique, y l'ordonnée et a la sous-tangente constante, il en paraît suivre, que si à la même abscisse x répond la valeur $y = u$, il y répondra aussi $y = -u$, puisque, si $+udx = +adu$, il y aura aussi $-udx = -adu$. Mais ce raisonnement est semblable au précédent, et il en suivrait de même qu'à l'abscisse $= x$, répondrait aussi l'ordonnée $y = 2u$, et généralement $y = nu$, de sorte que cette courbe aurait non seulement deux ordonnées $y = u$ et $y = -u$ qui répondraient à l'abscisse $= x$, mais le nombre des ordonnées serait infini; conséquence qu'on est pourtant bien éloigné d'admettre. D'où l'on voit que cet argument ne prouve pas que la logarithmique ait deux branches pareilles des deux côtés de son asymptote.

§ 6. Mais on m'objectera peut-être que c'est pourtant le plus sûr moyen que de juger de la figure d'une ligne courbe et du nombre de ses branches par son équation, et que c'est par ce principe que les Géomètres déterminent les formes de toutes les courbes algébriques. A quoi je réponds que cette méthode n'a lieu que lorsque l'équation pour la courbe est algébrique, ou du moins conçue en termes finis, et que jamais une équation différentielle n'est propre à ce dessein. Car on sait qu'une équation différentielle est toujours indéterminée, à cause d'une quantité constante arbitraire qu'elle renferme et qu'on doit introduire dans l'intégration: de sorte qu'une telle équation embrasse toujours une infinité de courbes à la fois. On n'a qu'à regarder l'équation différentielle pour la parabole $2ydy = adx$, et l'on verra qu'elle contient non seulement cette équation finie $y^2 = ax$, mais aussi celle-ci $y^2 = ax \pm ab$, quelque valeur qu'on donne à la quantité b. Par conséquent, en ne considérant que l'équation différentielle $2ydy = adx$, on devrait conclure qu'à la même abscisse $= x$ répond non seulement l'ordonnée $y = \sqrt{ax}$, mais encore $y = \sqrt{(ax \pm a^2)}$, et en général $y = \sqrt{(ax \pm ab)}$. Cette réflexion est suffisante pour faire voir, qu'on ne peut guère juger de la forme d'une ligne courbe, en ne regardant que son équation différentielle.

§ 7. Or M. Bernoulli aussi bien, que plusieurs mathématiciens qui soutiennent encore le même sentiment, tâche de prouver encore par d'autres arguments que l'asymptote de la logarithmique est en même temps son diamètre. Ces arguments sont fondés ou sur la construction de cette courbe, ou sur l'analogie. On se sert de l'analogie, en considérant, au lieu de l'équation pour la logarithmique $dx = \frac{dy}{y}$, celle-ci qui est plus grande $dx = \frac{dy}{y^n}$ et dont l'intégrale est $x = C - \frac{1}{(n-1)y^{n-1}}$: on y remarque que toutes les fois que n est un nombre impair, la courbe a sans contredit un diamètre, ou deux branches égales et semblables. Cela remarqué, dit-on, qu'on suppose $n = 1$, et puisque 1 est un nombre impair, la logarithmique doit avoir la même propriété. C'est, à mon avis, le plus fort argument qu'on ait apporté jusqu'ici pour prouver que la logarithmique a un diamètre; or, je ferai voir néanmoins que cette conclusion qu'on en veut tirer, n'est pas assez sûre.

§ 8. Quand il s'agit, dans l'analyse, des cas d'intégrabilité, ou dans la géométrie, de certaines propriétés des lignes courbes, on trouve rarement des propositions assez générales, et il y faut presque toujours excepter un ou plusieurs cas, auxquels on ne peut pas faire l'application. On peut bien dire que cette formule $x^n dx$ est généralement intégrable, quelque nombre qu'on mette pour n, pourvu qu'on en excepte le cas $n = -1$. Et il en est de même de plusieurs autres formules générales dont on ne peut presque jamais affirmer, qu'elles soient intégrables dans tous les cas sans exception. Ainsi, quand on dirait que l'équation $dx = \frac{dy}{y^n}$ représente toujours une courbe algébrique, quelque nombre rationnel qu'on mette pour n, cette proposition ne souffrirait qu'une seule exception, celle du cas $n = 1$. Donc, puisque ce cas est si particulièrement distingué de tous les autres, qui sera garant qu'il ne faut pas aussi faire une exception à la règle mentionnée à l'égard d'un diamètre qu'on voudrait attribuer à la courbe comprise sous l'équation $dx = \frac{dy}{y}$? Car, dans tous les autres cas où n est égal à un nombre impair, nous reconnaissons avec évidence la nécessité d'un diamètre, puisque dans ces cas, l'équation est intégrable: mais dans le cas $n = 1$ cette évidence cesse entièrement, à cause de l'impossibilité de l'intégration. Par conséquent, on est au moins obligé d'avouer que la conclusion qu'on veut tirer de cet argument n'est pas assez sûre.

§ 9. On doutera peut-être que le jugement de la propriété d'un diamètre soit assujetti à de semblables exceptions qu'on doit reconnaître dans les intégrations: mais je ferai voir très clairement que, même dans les courbes algébriques, il faut souvent admettre quelque exception par rapport à la propriété des diamètres. Qu'on considère par exemple cette équation générale

$$y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{(a^3(b+x))},$$

et on n'hésitera pas de conclure que cette courbe a toujours un diamètre, puisqu'en la réduisant à la rationalité, on parvient à une équation du 8e degré où tous les exposants des puissances de y sont pairs. Cependant, quelque sûre que paraisse cette conclusion, on en doit excepter le cas où $b = 0$. Car alors, si l'on délivre l'équation $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3 x}$ de l'irrationalité, on aura précisément

$$y^2 - 2y\sqrt{ax} + ax = \sqrt{a^3 x} \quad \text{ou} \quad y^2 + ax = (2y + a)\sqrt{ax}$$

et partant, prenant encore les carrés

$$y^4 + 2axy^2 + a^2x^2 = 4axy^2 + 4a^2xy + a^3x \quad \text{ou} \quad y^4 - 2axy^2 - 4a^2xy + a^2x^2 - a^3x = 0,$$

qui, à cause du terme $4a^2xy$, est destituée de diamètre. Donc, puisque dans les courbes algébriques on est obligé de reconnaître quelquefois des exceptions, comment peut-on être assuré que le cas en question n'en exige pas aussi? Et partant, il s'en faut de beaucoup pour que l'argument apporté prouve invinciblement que la logarithmique ait un diamètre.

§ 10. La même incertitude se trouve dans les autres arguments qu'on tire de la construction de la courbe logarithmique par la quadrature de l'hyperbole. Car quand même on tournerait cette construction en sorte, qu'il en résulterait nécessairement deux branches de la logarithmique, on aurait encore des raisons assez fortes pour douter que ces deux branches appartienent nécessairement ensemble et qu'elles ne constituent qu'une seule ligne continue. Pour le prouver, je pourrais rapporter plusieurs exemples de constructions par lesquelles on obtient deux lignes courbes différentes qui ne sont pas liées ensemble par le lien de la continuité. Car, comme on peut toujours comprendre deux lignes courbes, quelque différentes qu'elles soient, sous une équation, en multipliant leurs équations ensemble, on n'a qu'à imaginer une telle construction qui convienne à cette équation composée, et elle fournira les deux courbes proposées, comme si elles ne formaient qu'une seule ligne courbe. Ou bien, ayant décrit sur le même axe les deux paraboles $v^2 = ax$ et $u^4 = a^3x$, qu'on en construise une nouvelle courbe dont l'ordonnée y, qui répond à la même abscisse x, soit égale à la somme des ordonnées $v + u$ des deux paraboles proposées; or chacune, de ces ordonnées pouvant être prise tant affirmativement que négativement, on trouvera pour chaque abscisse x quatre ordonnées $v + u$, $-v-u$, $v - u$, $-v + u$, et la courbe construite aura un diamètre. Néanmoins l'équation

$$y = v + u = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3x}$$

nous fait voir que la courbe n'a pas de diamètre, comme je viens de remarquer dans l'article précédent.

§ 11. De plus, comme il y a des constructions, desquelles on tire deux courbes différentes, il y a aussi des constructions défectueuses qui ne donnent qu'une partie d'une ligne courbe. Car soit décrit un cercle dont le diamètre $= a$, sur lequel prenant l'abscisse $= x$, l'ordonnée y sera $= \sqrt{(ax - x^2)}$; qu'on prolonge ensuite chaque ordonnée, jusqu'à ce qu'elle devienne égale à la corde $\sqrt{(x^2 + y^2)} = \sqrt{ax}$, et cette nouvelle ordonnée qui soit nommée $z = \sqrt{ax}$ marquera une

une parabole. Mais cette description de la parabole ne s'étend pas au-delà du cercle, quoique la parabole même s'étende à l'infini. Cette circonstance prouve encore, qu'il n'est pas toujours sûr de juger de la vraie forme d'une ligne courbe et de toutes les parties qu'elle renferme, par quelque construction qu'on en puisse donner.

§ 12. D'ailleurs, la méthode même de juger de toutes les parties qui appartiennent à la même ligne courbe, n'a proprement lieu que dans les courbes algébriques. Car, après avoir délivré l'équation qui exprime la nature de la ligne courbe de toute irrationalité, on considère l'équation rationnelle qui en résulte, si elle renferme des facteurs rationnels, ou non. Dans le premier cas, on juge que la courbe est composée d'autant de courbes différentes qu'il y a de facteurs: mais si l'équation n'est pas résoluble en facteurs rationnels, on conclut que tous les points qui sont marqués par cette équation, appartiennent à la même courbe. C'est pourquoi, quand il s'agit de courbes transcendantes, puisque l'équation même n'est pas algébrique, on ne saurait pas même former la question, si elle a des facteurs rationnels, ou non, et partant le jugement des parties qui appartiennent à la même courbe n'a plus lieu, si ces parties ne sont pas immédiatement liées ensemble. Et partant, on n'est pas en état de décider si la logarithmique a deux branches égales qui se rapportent de part et d'autre à la même asymptote, ou non. Au moins doit-on convenir, que cette décision, quelle qu'elle soit, n'est pas nécessairement liée avec le sujet en question, de savoir si les logarithmes des nombres négatifs sont réels ou imaginaires.

§ 13. Les logarithmes sont fondés sur un nombre constant, pris à volonté et dont on suppose le logarithme $= 1$. Soit ce nombre e, et que x marque le logarithme du nombre y de sorte que $x = ly$, et alors on aura $y = e^x$. Donc le logarithme x d'un nombre proposé $= y$ n'est autre chose que l'exposant de la puissance de e qui est égale au nombre y. Dans les tables vulgaires, on suppose ce nombre arbitraire $e = 10$, et alors x sera le logarithme du nombre y, si $10^x = y$, et dans les logarithmes qu'on nomme hyperboliques et dont la propriété est que, si ω marque une fraction infiniment petite, le logarithme du nombre $1 + \omega$ est égal à ω, le nombre e, dont le logarithme $= 1$, devient égal à $2,718281828459$. Or, quelque valeur qu'on donne à ce nombre e, pourvu qu'elle soit > 1, on voit de la formule $y = e^x$, que, toutes les fois que y est un nombre affirmatif, il est possible d'assigner à x une valeur réelle, de sorte que e^x devienne égale à y. Mais il est aussi évident que, si y est un nombre négatif, on ne saurait trouver pour x une valeur réelle, de sorte que la puissance e^x devienne négative et $=$ à y.

§ 14. Il est vrai cependant que si x est une fraction d'un dénominateur pair, la puissance, ou plutôt la racine e^x puisse être prise tant affirmativement que négativement, de sorte que, si le logarithme x est $= \frac{1}{2}$, le nombre y, dont le logarithme $= \frac{1}{2}$, puisse être aussi bien $= -\sqrt{e}$ que $= +\sqrt{e}$. Mais cette ambiguïté ne se rencontre que dans les cas où x est une fraction dont le dénominateur est un nombre pair: et si le logarithme x était $= 2$, il serait certainement faux, que 2 fût le logarithme de $y = -ee$, puisque $-ee$ n'est nullement égal à ee: et partant il faut au moins avouer que les logarithmes des nombres négatifs en général ne sont pas réels. Mais pour ce qui regarde l'ambiguïté de la formule e^x, dans les cas où x est une fraction d'un dénominateur pair, je ne sais pas si on la peut admettre dans les logarithmes. Car, ayant égard à la nature [et à] l'usage des logarithmes, il semble qu'à chaque logarithme ne puisse répondre qu'un seul nombre.

§ 15. Quoi qu'il en soit, on ne prouvera jamais, par de semblables raisonnements, que le logarithme de -1 est égal à celui de $+1$ ou à zéro, puisque e^0 ne peut avoir d'autres valeurs que $+1$. Si quelqu'un disait que e^0 peut être regardé comme $e^{\frac{0}{2}}$ et partant comme $\sqrt{e^0}$ ou $\sqrt{1}$, ce qui serait tant -1 que $+1$, on pourrait, par la même raison, prouver que x^1 étant $= x^{\frac{2}{2}}$ serait égal tant à $+x$ qu'à $-x$, et de plus que $a+x$ serait la même chose que $a-x$, et on pourrait soutenir, par le même argument, que toutes les quantités sont égales entre elles. Mais si le logarithme de -1 n'est pas $=0$, il sera nécessairement imaginaire; et puisque $-y = -1 \cdot y$, nous aurons $l(-y) = l(-1) + ly$, d'où il est clair que, le log. de $+y$ étant réel, le log. de $-y$ doit absolument être imaginaire.

§ 16. La thèse qu'à tout logarithme x ne puisse répondre qu'un seul nombre y, sera encore confirmée, quand on considère la résolution de la formule e^x en cette série

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est $=1$. Cette série étant regardée dans l'analyse comme tout à fait équivalente à l'expression e^x, on ne saurait douter que sa valeur ne soit déterminée, dès qu'on donne à x une valeur donnée, puisque cette série est toujours convergente, quelque grand nombre qu'on substitue pour x. Et par cette raison, on est en droit de soutenir, qu'en tant que l'expression e^x marque le nombre dont le log. $= x$, elle ne renferme jamais aucune ambiguïté, et que sa valeur est toujours unique et affirmative, quelque fraction qu'on prenne pour x; de sorte que, bien que x soit une fraction comme $\frac{1}{2}$, l'expression de e^x n'aura toujours qu'une seule valeur affirmative.

§ 17. Si l'on voulait insister, que la formule e^x, au cas $x = \frac{1}{2}$, eût une double valeur et que $\frac{1}{2}$ fût le logarithme tant de $-\sqrt{e}$ que de $+\sqrt{e}$, il s'en suivrait que les logarithmes des nombres imaginaires sont pareillement réels. Car supposons $x = \frac{1}{3}$, et l'on sait que la formule [$e^{\frac{1}{3}}$] renferme trois valeurs

$$\sqrt[3]{e}, \quad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{e}, \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{e}$$

de chacune desquelles le log. serait $= \frac{1}{3}$. Supposons $x = \frac{1}{4}$ et les valeurs de $y = e^{\frac{1}{4}}$ seront

$$\sqrt[4]{e}, \quad -\sqrt[4]{e}, \quad +\sqrt{-1}\sqrt[4]{e}, \quad -\sqrt{-1}\sqrt[4]{e}.$$

Donc nous aurions
$$l(+\sqrt{-1}\sqrt[4]{e}) = l(-\sqrt{-1}\sqrt[4]{e}) = \frac{1}{4}.$$

Mais $l\sqrt[4]{e} = \frac{1}{4}le = \frac{1}{4}$, d'où il suivrait que $l\sqrt{-1} = 0$. Or M. Bernoulli ayant fait cette belle découverte que $\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ marque la quadrature du cercle, puisque $\sqrt{-1}$ est imaginaire sans contredit, il faut que $l\sqrt{-1}$ le soit aussi, et personne n'aura moins de droit que M. Bernoulli lui-même de soutenir désormais que $l\sqrt{-1}$ soit $= 0$.

§ 18. Ayant donc fait voir, que personne n'a encore suffisamment prouvé, que les logarithmes des nombres négatifs soient réels, mais que plutôt le sentiment opposé, selon lequel les logarithmes des nombres négatifs sont imaginaires, est conforme à la vérité; je proposerai les difficultés qu'on rencontre de part et d'autre, soit qu'on soutienne que les logarithmes des nombres négatifs sont réels, soit qu'on les prenne pour imaginaires. Ces difficultés paraîtront si fortes et même tellement remplies de contradictions, qu'on comprendra à peine, comment il sera possible de se tirer d'affaire et de mettre la théorie des logarithmes à l'abri de toute attaque; or j'espère néanmoins en venir à bout.

§ 19. Si l'on veut avec M. Bernoulli, que les logarithmes des nombres négatifs soient les mêmes que ceux des nombres affirmatifs, ou, ce qui revient au même, que $l(-1)=0$, on trouve la difficulté suivante: Ou il est vrai que $la^x = xla$ généralement, ou non: s'il est vrai, il y aura de même

$$l(-1)^x = xl(-1) = 0$$

ce dont on sera aisément d'accord, si x est un nombre entier. Mais si x est une fraction, on aura aussi $l\sqrt{-1}=0$, et par conséquent, la réduction de M. Bernoulli des arcs de cercle aux logarithmes imaginaires serait fausse; ce qui serait absurde, puisque cette découverte est établie sur les plus solides démonstrations de l'analyse. Mais si l'on nie que $la^x = xla$, on renverse toute la théorie des logarithmes: car quoiqu'on voulût admettre la résolution $la^x = xla$ aux cas que x fût un nombre entier, elle deviendrait pourtant tout à fait inutile, si x marquait un nombre en général ou inconnu.

§ 20. Qu'on dise donc avec M. de Leibnitz, que les logarithmes des nombres négatifs ne sont point réels, mais imaginaires: et l'on s'apercevra bientôt qu'on retombe dans le même embarras. Car soit $l(-1)=p$, de sorte que p soit un nombre imaginaire, et l'on ne pourra nier que $l(-1)^n = np$, surtout quand n est un nombre entier. Soit donc $n=2$, et nous aurons

$$l(-1)^2 = l(+1) = 2p.$$

Mais dans la doctrine des logarithmes, c'est le premier principe que $l(+1)=0$; par conséquent, il y aurait $2p=0$ et partant $p=0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. On prouvera de même que $l\sqrt{-1}$, $l\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ et les logarithmes des plus hautes racines de l'unité devraient tous également être $=0$, d'où résulteraient les mêmes contradictions qui se sont rencontrées dans l'hypothèse précédente.

§ 21. Voilà donc des contradictions assez palpables qu'on rencontre, de quelque côté qu'on se tourne; je ne doute pas, que la plupart des mathématiciens ne s'en soient aperçus, bien qu'ils n'aient pas jugé à propos de publier leurs doutes sur cette matière, de peur de rendre l'analyse trop suspecte, s'ils n'étaient pas en état de sauver la théorie des logarithmes. Car ce serait sans doute une tache indélébile dans l'analyse, si la doctrine des logarithmes était tellement remplie de contradictions, qu'il fût impossible de trouver une conciliation. Aussi y a-t-il long-temps que ces difficultés m'ont tourmenté, et je me suis fait plusieurs illusions là-dessus, pour me satisfaire en quelque manière, sans être obligé de renverser tout à fait la théorie des logarithmes. Je me suis imaginé, que de même qu'une quantité admet toujours deux racines carrées, trois racines cubiques, quatre racines biquadratiques etc. ainsi une quantité pourrait avoir une double moitié, un triple tiers, un quadruple quart etc. dont l'un seulement serait réel, les autres imaginaires. Ainsi posant $ly=x$, je

concevais que $l\sqrt{y}=\frac{1}{2}x$ et $l(-\sqrt{y})=\frac{1}{2}x'$
et que $\frac{1}{2}x$ et $\frac{1}{2}x'$ puissent être différents, quoique le double de l'un et de l'autre soit le même $=x$. De la même manière, pour les trois racines cubiques de y, il serait

$$l\sqrt[3]{y}=\frac{1}{3}x;\quad l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{y}=\frac{1}{3}x',\quad \text{et}\quad l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{y}=\frac{1}{3}x''$$

où $\frac{1}{3}x$, $\frac{1}{3}x'$ et $\frac{1}{3}x''$ soient des nombres différents, le premier $\frac{1}{3}x$ réel, et les deux autres $\frac{1}{3}x'$ et $\frac{1}{3}x''$ imaginaires, bien que le triple de chacun soit $=x$. Cette explication me paraissait bien extrêmement paradoxe et insoutenable, mais pourtant moins absurde que les contradictions que j'aurais été obligé d'admettre dans la théorie des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires.

§ 22. Ayant fait bien sentir l'importance de toutes ces difficultés qui se trouvent dans la doctrine des logarithmes et qui même paraissent des contradictions ouvertes, on aura de la peine à comprendre qu'il soit possible de lever toutes ces difficultés, sans porter aucune atteinte à la certitude de l'analyse et des règles sur lesquelles elle est fondée. Cependant la vérité est trop solidement établie, pour qu'elle puisse être assujettie à aucune contradiction, et ce ne sont que les manières peu justes, dont nous l'envisageons, qui peuvent nous éblouir. Souvent, il est si difficile de s'apercevoir de ce défaut de justesse qui se trouve dans nos idées et qui nous fait voir de si grandes difficultés, qu'il nous semble tout à fait impossible de sauver la vérité. Cela est précisément le cas où nous nous trouvons par rapport aux logarithmes des nombres négatifs et imaginaires; car, après avoir bien pesé toutes les difficultés que je viens d'étaler, j'ai trouvé qu'elles ne viennent que de ce que nous supposons que chaque nombre n'a qu'un seul logarithme. Car si cette supposition était vraie, il serait bien certain, qu'on ne saurait guère trouver le moyen de se tirer de l'embarras où cette matière nous jette. Mais, dès que nous accordons qu'un nombre peut avoir plusieurs, et même une infinité de logarithmes, alors toutes les difficultés mentionnées perdent leur force et s'évanouissent tout à fait, et l'on reconnaîtra la plus parfaite harmonie entre toutes les vérités.

§ 23. Je dis donc que, quoique le nombre dont on suppose le logarithme $=1$, soit déterminé, chaque nombre a néanmoins une infinité de logarithmes, dont tous, à l'exception d'un seul, sont imaginaires, si le nombre est affirmatif; mais s'il est négatif ou imaginaire, tous ses logarithmes seront également imaginaires. En conséquence de cela, le logarithme de l'unité sera non seulement $=0$, mais il y aura encore une infinité de quantités imaginaires, dont chacune tient aussi bien lieu du logarithme de l'unité, que 0. Soient donc tous les logarithmes de l'unité

$$0,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta,\ \eta,\ \vartheta,\ \text{etc.}$$

et puisque le logarithme de la racine carrée est la moitié du log. de la puissance, $\sqrt{1}$ étant tant $+1$ que -1, les logarithmes de la première valeur $+1$ seront

$$0,\ \frac{1}{2}\beta,\ \frac{1}{2}\delta,\ \frac{1}{2}\zeta,\ \frac{1}{2}\vartheta,\ \text{etc.}$$

et les logarithmes de l'autre valeur -1 seront:

$$\frac{1}{2}\alpha,\ \frac{1}{2}\gamma,\ \frac{1}{2}\varepsilon,\ \frac{1}{2}\eta,\ \text{etc.}$$

qui sont différents des précédents, quoique leurs doubles donnent les logarithmes de l'unité. De même, prenant les racines cubiques, il y aura:

$$l1 = 0, \quad \frac{1}{3}\gamma, \quad \frac{1}{3}\zeta, \quad \frac{1}{3}\iota, \quad \text{etc.}$$

$$l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{3}\alpha, \quad \frac{1}{3}\delta, \quad \frac{1}{3}\eta, \quad \text{etc.}$$

$$l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{3}\beta, \quad \frac{1}{3}\varepsilon, \quad \frac{1}{3}\vartheta, \quad \text{etc.}$$

et cette considération détruit déjà la plupart des difficultés qui nous ont embarassé auparavant.

§ 24. Pour prouver cette pluralité infinie des logarithmes qui répondent à chaque nombre, on n'a qu'à regarder le grand rapport qui se trouve entre les logarithmes et les arcs de cercle: puisqu'on sait que les arcs de cercle se peuvent exprimer par logarithmes imaginaires, et réciproquement, les logarithmes par les arcs imaginaires du cercle. Donc, parce que les sinus ou cosinus répondent aux nombres et les arcs aux logarithmes, comme le même sinus se rapporte à une infinité d'arcs différents, ainsi il s'en suit que le même nombre se doit rapporter à une infinité de logarithmes différents. Nous connaissons mieux le cercle que la courbe logarithmique, et par cette raison, la considération du cercle nous conduira à une plus parfaite connaissance des logarithmes, que la logarithmique même; de plus, dans le cercle nous pouvons déterminer tous les arcs qui répondent au même sinus ou cosinus, et quoique ces arcs, dans le passage aux logarithmes deviennent imaginaires, ils ne laisseront pas, en nous convainquant de l'infinité des logarithmes, de nous donner à connaître leurs expressions et les espèces de non-réalité, sous lesquelles elles sont comprises; et c'est tout ce qu'on peut souhaiter pour l'intelligence d'une quantité imaginaire.

§ 25. Soit φ un arc quelconque d'un cercle dont je suppose le rayon $= 1$. Soit x le sinus de cet arc, et y son cosinus, de sorte que $y = \sqrt{(1-x^2)}$; donc, nommant la périphérie de ce cercle $= 2\pi$, ou l'arc de $180^0 = \pi$, il est clair, que tous les arcs compris dans cette expression générale $\pm 2n\pi + \varphi$ auront non seulement le même sinus $= x$, mais aussi le même cosinus $= y = \sqrt{(1-x^2)}$, pourvu que n signifie un nombre entier quelconque. Or, puisque $d\varphi = \frac{dx}{y} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, qu'on suppose $x = z\sqrt{-1}$, et l'on aura $d\varphi = \frac{dz\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+z^2)}}$. Mais on sait que $\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)}} = l(\sqrt{(1+z^2)}+z)+C$. Par conséquent, nous aurons $\varphi = \sqrt{-1}\, l(\sqrt{(1-x^2)}+\frac{x}{\sqrt{-1}}) + C$, où il est clair que la constante C est $= 0$, puisqu'en mettant $x = 0$, l'arc φ doit s'évanouir de même. Ayant donc

$$\varphi = \sqrt{-1}\, l(\sqrt{(1-x^2)} - x\sqrt{-1}), \quad \text{nous aurons} \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{-1}} l(\sqrt{(1-x^2)} + x\sqrt{-1})$$

ou bien

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{-1}} l(y + x\sqrt{-1}).$$

§ 26. Cette équation que nous venons de trouver, exprimant le rapport entre l'arc φ et les sinus et cosinus, aura aussi lieu pour tous les autres arcs qui ont le même sinus x et cosinus y; par conséquent nous aurons

$$\varphi \pm 2n\pi = \frac{1}{\sqrt{-1}} l(y + x\sqrt{-1}) \quad \text{et partant} \quad l(y + x\sqrt{-1}) = (\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}.$$

D'où il est clair qu'au même nombre $y + x\sqrt{-1}$ répond une infinité de logarithmes, qui sont tous compris dans cette formule générale $(\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}$, où à la place de n on peut mettre tel nombre entier qu'on voudra. Puisque x est le sinus et y le cosinus de l'arc φ, posons $x = \sin\varphi$ et $y = \cos\varphi$, et nous aurons cette égalité

$$l(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}) = \pm(\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}.$$

§ 27. De cette équation j'examinerai les cas principaux qui fourniront assez d'éclaircissement sur cette matière. Soit donc premièrement:

$$\varphi = 0; \text{ et il y aura } \cos\varphi = 1 \text{ et } \sin\varphi = 0,$$

et l'équation trouvée nous donnera:

$$l1 = \pm 2n\pi\sqrt{-1}.$$

Donc, posant pour n successivement tous les nombres entiers, les logarithmes de l'unité seront

$$l1 = 0, \quad \pm 2\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 4\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 6\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 8\pi\sqrt{-1}, \quad \text{etc.}$$

d'où nous voyons que, quoique le logarithme de 1 soit $= 0$, comme tout le monde le sait, il y en a une infinité d'expressions imaginaires dont chacune est aussi bien le logarithme de l'unité, que 0.

§ 28. Cette seule considération nous met en état de donner tous les logarithmes de chaque nombre affirmatif qu'on puisse proposer. Car soit a le nombre proposé et α son logarithme hyperbolique qu'on trouve par les méthodes ordinaires; et puisque $la = l1 + la = \alpha + l1$, tous les logarithmes du nombre a seront:

$$la = \alpha, \quad \alpha \pm 2\pi\sqrt{-1}, \quad \alpha \pm 4\pi\sqrt{-1}, \quad \alpha \pm 6\pi\sqrt{-1}, \quad \alpha \pm 8\pi\sqrt{-1}, \quad \text{etc.}$$

dont tous, excepté le premier α, sont imaginaires. Il faut remarquer, que je ne parle ici que des logarithmes hyperboliques, auxquels on est conduit par l'intégration; mais, puisqu'on sait que les logarithmes de diverses espèces observent toujours un rapport constant entr'eux, tout ce que je viens de dire et tout ce que je dirai des logarithmes hyperboliques s'appliquera aisément aux logarithmes tabulaires où l'on met $l10 = 1$, ou à toute autre espèce de logarithmes.

§ 29. Soit maintenant l'arc proposé φ de 180°, ou soit $\varphi = \pi$, et nous aurons $\sin\varphi = 0$ et $\cos\varphi = -1$. Cette supposition faite, l'équation générale trouvée se changera en cette forme

$$l(-1) = (\pi \pm 2n\pi)\sqrt{-1} \; (= 1 \pm 2n)\pi\sqrt{-1},$$

d'où nous tirons toute l'infinité des logarithmes du nombre négatif -1, car nous aurons

$$l(-1) = \pm\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 3\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 5\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 7\pi\sqrt{-1}, \quad \text{etc.}$$

et de là nous voyons clairement, que tous les logarithmes de -1 sont imaginaires et tous différens des logarithmes de $+1$. Cela non obstant, les logarithmes de $(-1)^2$ qui seront

$$\pm 2\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 6\pi\sqrt{-1}, \quad \pm 10\pi\sqrt{-1}, \quad \text{etc.}$$

sont visiblement contenus dans les logarithmes de $+1$; ce qui suffit pour sauver les contradictions apparentes dont j'ai fait mention là-haut, quoiqu'il n'en suive pas réciproquement que les moitiés de tous les logarithmes de $+1$ soient logarithmes de -1: ce que la nature même des quantités ne permet pas, puisque -1 n'est pas la seule racine carrée de $+1$.

§ 30. On s'assurera à présent aisément, que tous les logarithmes de tous les nombres négatifs sont imaginaires. Car soit $-a$ un nombre négatif quelconque, et soit α le logarithme, trouvé par les méthodes ordinaires, du nombre affirmatif $+a$, de sorte que $l(+a)=\alpha$, et parce que $l(-a)=la+l(-1)$, nous aurons tous les logarithmes du nombre négatif $-a$ exprimés ainsi:

$$l(-a)=\alpha\pm\pi\sqrt{-1},\quad \alpha\pm3\pi\sqrt{-1},\quad \alpha\pm5\pi\sqrt{-1},\quad \alpha\pm7\pi\sqrt{-1},\quad \text{etc.}$$

qui sont tous imaginaires. Par là donc la question, agitée entre MM. **Leibnitz** et **Bernoulli**, de savoir, si les logarithmes des nombres négatifs sont réels, ou imaginaires, est décidée en faveur du premier, qui les soutient imaginaires, et toutes les objections que M. **Bernoulli** a élevées contre ce sentiment, n'ont plus aucune prise sur cette décision.

§ 31. Je vais plus loin, et après avoir déterminé les logarithmes des nombres tant affirmatifs que négatifs, je passerai aux nombres imaginaires. Soit, pour cet effet, $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, et nous aurons $\cos\varphi=0$ et $\sin\varphi=1$; d'où nous tirons

$$l\sqrt{-1}=(\tfrac{1}{2}\pi\pm2n\pi)\sqrt{-1}=(\pm2n+\tfrac{1}{2})\pi\sqrt{-1},$$

et partant tous les logarithmes de $+\sqrt{-1}$ seront

$$l(+\sqrt{-1})=\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{3}{2}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{5}{2}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{7}{2}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{9}{2}\pi\sqrt{-1},\quad \text{etc.}$$

Mais si l'on met $\varphi=-\frac{1}{2}\pi$, à cause de $\cos\varphi=0$ et $\sin\varphi=-1$, nous aurons:

$$l(-\sqrt{-1})=(-\tfrac{1}{2}\pi\pm2n\pi)\sqrt{-1},$$

et par conséquent

$$l(-\sqrt{-1})=-\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{3}{2}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{5}{2}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{7}{2}\pi\sqrt{-1},\quad \text{etc.}$$

D'où il est évident, qu'ajoutant les logarithmes de $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$ ensemble, pour avoir les logarithmes du produit $=+1$, on obtient les mêmes logarithmes que nous avons trouvés pour $+1$. Et si l'on soustrait les logarithmes de $-\sqrt{-1}$ des logarithmes de $+\sqrt{-1}$, pour avoir les logarithmes du quotient $\frac{+\sqrt{-1}}{-\sqrt{-1}}=-1$, on aura les logarithmes trouvés pour -1.

§ 32. Soit, outre cela,

$$\varphi=\tfrac{1}{3}\pi,\quad \text{et il y aura}\quad \cos\varphi=\tfrac{1}{2}\quad \text{et}\quad \sin\varphi=\tfrac{\sqrt{3}}{2},$$

d'où nous tirerons

$$l\,\frac{1+\sqrt{-3}}{2}=(\tfrac{1}{3}\pi\pm2n\pi)\sqrt{-1},$$

de sorte que les logarithmes de $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ seront

$$l\,\frac{1+\sqrt{-3}}{2}=\tfrac{1}{3}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{5}{3}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{11}{3}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{17}{3}\pi\sqrt{-1}$$
$$+\tfrac{7}{3}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{13}{3}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{19}{3}\pi\sqrt{-1},\quad \text{etc.}$$

Soit $\varphi=-\frac{1}{3}\pi$, et l'on aura $\cos\varphi=\frac{1}{2}$ et $\sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où nous obtiendrons

$$l\frac{1-\sqrt{-3}}{2}=(-\tfrac{1}{3}\pm 2n)\pi\sqrt{-1},$$

et partant $l\frac{1-\sqrt{-3}}{2}=-\frac{1}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\frac{5}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\frac{11}{3}\pi\sqrt{-1},\ +\frac{17}{3}\pi\sqrt{-1},$

$$-\tfrac{7}{3}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{13}{3}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{19}{3}\pi\sqrt{-1},\quad \text{etc.}$$

Soit $\varphi=\frac{2}{3}\pi$, de sorte que $\cos\varphi=-\frac{1}{2}$ et $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, et nous aurons

$$l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=(\tfrac{2}{3}\pm 2n)\pi\sqrt{-1},\quad \text{et}$$

$$l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\tfrac{2}{3}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{4}{3}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{10}{3}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{16}{3}\pi\sqrt{-1},$$

$$+\tfrac{8}{3}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{14}{3}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{20}{3}\pi\sqrt{-1},\quad \text{etc.}$$

Enfin mettant $\varphi=-\frac{2}{3}\pi$, on aura $\cos\varphi=-\frac{1}{2}$ et $\sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, ce qui donne

$$l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=(-\tfrac{2}{3}\pm 2n)\pi\sqrt{-1},\qquad \text{et}$$

$$l\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=-\tfrac{2}{3}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{4}{3}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{10}{3}\pi\sqrt{-1},\quad +\tfrac{16}{3}\pi\sqrt{-1},$$

$$-\tfrac{8}{3}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{14}{3}\pi\sqrt{-1},\quad -\tfrac{20}{3}\pi\sqrt{-1},\quad \text{etc.}$$

Puisqu'on sait que $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

sont les racines cubiques de $+1$, qu'on fasse toutes les épreuves à cet égard, et l'on trouvera constamment un merveilleux accord avec la vérité.

§ 33. Pour avoir les logarithmes des puissances, on n'a, suivant la règle commune, qu'à multiplier le logarithme de la racine par l'exposant de la puissance. Mais, puisque la racine a une infinité de logarithmes, on en peut ajouter ensemble autant de valeurs différentes que l'exposant de la puissance renferme d'unités. Ainsi, les logarithmes de (-1) étant trouvés

$$\pm\pi\sqrt{-1},\quad \pm 3\pi\sqrt{-1},\quad \pm 5\pi\sqrt{-1},\quad \pm 7\pi\sqrt{-1},\quad \text{etc.}$$

non seulement les doubles de ces logarithmes donneront le log. du carré $(-1)^2$, mais aussi les sommes de deux quelconques, et par ce moyen on obtiendra toutes ces formules

$$0,\quad \pm 2\pi\sqrt{-1},\quad \pm 4\pi\sqrt{-1},\quad \pm 6\pi\sqrt{-1},\quad \pm 8\pi\sqrt{-1},\quad \text{etc.}$$

qui sont tous les logarithmes de $+1$. De même, joignant trois à trois les logarithmes de

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad \text{ou de}\quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

on obtiendra également tous les logarithmes de $+1$, puisque

$$\text{tant}\quad \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3\quad \text{que}\quad \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3$$

est égal à l'unité.

§ 34. Cette facilité de trouver les logarithmes des puissances est aussi confirmée par la formule générale trouvée au § 26; car il est démontré que

$$(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^{\mu} = \cos\mu\varphi + \sin\mu\varphi\sqrt{-1}\,,$$

donc il y aura

$$l\,(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^{\mu} = l\,(\cos\mu\varphi + \sin\mu\varphi\sqrt{-1}),$$

Cette formule étant semblable à la première on n'a dans le logarithme, qu'à mettre $\mu\varphi$ au lieu de φ, et puisqu'il est permis de mettre $\varphi \pm 2m\pi$ pour φ nous aurons:

$$l\,(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^{\mu} = (\mu\varphi \pm 2\mu m\pi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}$$

et lorsque l'exposant est une fraction $\frac{\mu}{\nu}$, nous aurons

$$l\,(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{\nu}\,(\mu\varphi \pm 2\mu m\pi \pm 2\nu n\pi)\sqrt{-1}$$

les lettres m et n marquant des nombres entiers quelconques. Par conséquent, dans les cas $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$, nous aurons

$$l\,1^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{\nu}(\pm 2\mu m \pm 2\nu n)\,\pi\sqrt{-1}$$

$$\text{et}\quad l\,(-1)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{\nu}(\mu \pm 2\mu m \pm 2\nu n)\,\pi\sqrt{-1}.$$

Et ayant égard à ces circonstances, toutes les difficultés qui se pourraient encore rencontrer dans cette matière, disparaîtront entièrement, et la doctrine des logarithmes sera mise à l'abri de toutes les attaques.