XVIII.

Institutionum Calculi differentialis Sectio III.

(Conf. Inst. C. D. Part. II. Cap. XI. §§ 282. 283. 286.)

Caput I.

De calculo differentiali ad lineas curvas applicato in genere.

1. Quanquam in libro praecedente jam insignis Calculi differentialis usus in ipsa analysi est ostensus, tamen ejus vis maxime perspicietur in doctrina de lineis curvis, quae post hujus calculi inventionem tanta accepit incrementa, ut quae antehac fuerunt detecta prae his fere penitus evanescant. Equidem in Introductione ad Analysin infinitorum plurimas linearum curvarum proprietates, quae vulgo calculi differentialis ope erui solent, per sola analysis finitorum praecepta invenire docui; verum et ibi quaedam non obscura calculi infinitorum vestigia latent, atque illa investigatio ita est comparata, ut nisi prius eadem alia methodo fuissent cognita, vix unquam reperiri potuisse videantur. Quin etiam in illo libro id mihi praecipue erat propositum, ut, cum quae vulgo per analysin infinitorum praestari solent, eadem sine hoc subsidio explicavissem, summus consensus universae analysis eo luculentius ob oculos ponatur.

2. Cum igitur principia calculi differentialis ex differentiis finitis functionum derivaverim, ex eodem fonte applicatio hujus calculi ad doctrinam de lineis curvis petenda videtur. Quae enim de functionibus sunt tradita, ea in lineis curvis amplissimum locum inveniunt. Nam etsi, sumta quaepiam linea, puta abscissa, pro quantitate variabili, natura lineae curvae per indolem unius functionis, puta applicatae, determinatur; tamen in eadem linea curva innumerabiles aliae functiones concipi possunt. Quaelibet scilicet linea per curvam determinata, quae variata abscissa simul vel crescit vel decrescit, tanquam functio abscissae spectari poterit, cujusmodi sunt cordae seu subtensae, tangentes, normales, et lineae quaecunque aliae, quarum vel positio, vel magnitudo ex quantitate abscissae determinatur. Tum etiam ipsius curvae longitudo et area tanquam functiones spectari possunt, ac praeterea innumerabiles aliae quantitates, sive sint lineae, sive superficies, sive solida.

3. Ordiamur a simplicissimo et maxime consueto naturam curvarum exprimendi modo, qui
* relatione inter coordinatas orthogonales continetur. Sit (fig. 2.) recta AP axis, ad quem natura curvae refertur, in quo sumatur abscissa $AP = x$ et applicata ei normalis $PM = y$; natura autem curvae exprimatur aequatione quacunque inter x et y, ita ut sit y functio quaecunque ipsius x, quam primum assumam uniformem, ut singulis abscissis unica respondeat applicata. Dum igitur abscissa

incrementum capit Δx, applicata y incrementum accipiet Δy, quod ex natura functionis y et quantitate incrementi Δx assignari poterit. Scilicet dum x abit in $x + \Delta x$, applicata y abibit in $y + \Delta y$. Quare si in figura capiatur abscissa alia $Ap = x + \Delta x$, erit applicata respondens $pm = y + \Delta y$. Cum vero sit $AP = x$ et $PM = y$, in figura erit $Pp = \Delta x$, sicque Pp denotabit incrementum abscissae Δx. Deinde si ex M axi parallela ducatur Mn, ob $pn = y$, erit $mn = \Delta y$, sicque linea mn repraesentabit incrementum applicatae Δy, quod convenit incremento abscissae $Pp = \Delta x$.

4. Quo haec facilius intelligantur, sit curva BM parabola hac aequatione expressa $ay = xx$. Cum igitur posito $x + \Delta x$ loco x, abeat y in $y + \Delta y$, habebitur haec aequatio

$$ay + a\Delta y = xx + 2x\Delta x + \Delta x \Delta x,$$

quae ob $ay = xx$ relinquet hanc

$$a\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x \Delta x.$$

Sumto ergo in axe abscissae incremento $Pp = \Delta x$, erit applicatae incrementum

$$\Delta y = \frac{2x\Delta x + \Delta x \Delta x}{a} \quad \text{seu} \quad mn = \frac{Pp\,(2AP + Pp)}{a} = \frac{Pp\,(AP + Ap)}{a}.$$

Perpetuo ergo si detur natura functionis y, ex ea relatio inter incrementa abscissae et applicatae inveniri poterit.

5. Non solum autem ad datum abscissae incrementum Δx inveniri poterit incrementum respondens applicatae y, sed etiam cujusvis alius quantitatis, quae per x et y definitur. Sic cum hypotenusa AM exprimatur per $\sqrt{(xx + yy)}$, postquam abscissa x incrementum Δx, et applicata y incrementum Δy accepit, hypotenusa $\sqrt{(xx + yy)}$ abibit in $\sqrt{((x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2)}$, qua formula exhibebitur hypotenusa Am, quae cum sit $= \sqrt{(xx + yy)} + \Delta\sqrt{(xx + yy)}$, erit

$$\Delta\sqrt{(xx + yy)} = \sqrt{((x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2)} - \sqrt{(xx + yy)},$$

hujusque ergo valor per methodum differentiarum supra expositam inveniri poterit. Si igitur centro A radio AM describatur arcus circuli Mq ab Am abscindens partem $Aq = AM$, erit pars residua $mq = \Delta\sqrt{(xx + yy)}$. Simul vero hinc patet, quomodo cujusvis alius quantitatis per x et y determinatae incrementum assignari atque in figura repraesentari debeat.

6. Quin etiam figura nobis exhibet incrementa quantitatum, quae saepenumero nequidem per x et y finito modo exprimi possunt. Sic si area curvae, abscissae AP respondens, ponatur $= P$, area respondens abscissae Ap erit $= P + \Delta P$. Verum si prior area a posteriori subtrahatur, remanebit figura mixtilinea $PMmp$, quae propterea erit incrementum areae P, seu erit $\Delta P = PMmp$. Haec area commode dividitur in duas partes, quarum altera est parallelogrammum rectangulum $PMnp = y\Delta x$, altera triangulum mixtilineum Mnm; eritque ergo $\Delta P = y\Delta x + Mnm$. Simili modo si longitudo curvae BM, seu potius, quae toti abscissae AP respondet, ponatur $= s$, erit incrementum hujus lineae curvae Δs aequale arcui Mm, qui cum sit major ejus subtensa $= \sqrt{(\Delta x \Delta x + \Delta y \Delta y)}$, erit utique $\Delta s > \sqrt{(\Delta x \Delta x + \Delta y \Delta y)}$.

7. Si curva BM circa axem AP converti concipiatur, ut inde oriatur solidum rotundum, hujus tam soliditas, quam superficies in considerationem veniunt, quarum utraque, dum abscissa ex P in p

extenditur, certum incrementum capiet. Facile enim patet, si figura $PMmp$ circa axem Pp rotatur, oriturum esse solidum, quo incrementum superioris solidi rotundi repraesentetur. Simili modo superficies conoidica, quae conversione arcus Mm circa axem Pp generatur, aequalis erit incremento superficiei solidi illius rotundi, quod conversione portionis curvae propositae, quae abscissae respondet producitur, dum scilicet abscissa x incrementum capit $Pp = \Delta x$.

8. Ponamus nunc incrementum $Pp = \Delta x$, quod hactenus tanquam finitum consideravimus, fieri infinite parvum, seu in nihilum abire, atque exhibebit Pp differentiale ipsius abscissae x, seu erit $Pp = dx$. Hic quidem imprimis monendum est, cum in figura quantitates evanescentes repraesentari nequeant, iisdem nos quantitatibus, quae ante incrementa finita designabant, ad differentialia repraesentanda uti. Requiritur ergo ad hoc animi fictio, qua non tam ipsa linea Pp, quam ejus quasi pars infinitesima differentiale dx exprimere concipienda est. Punctum scilicet p continuo propius ad P admoveri fingendum est, et tum, cum in P revera incidit, atque adeo intervallum Pp evanescit, praebebit Pp differentiale dx. Quanquam ergo intervallum Pp in figura finitam habet magnitudinem, tamen id mente tanquam infinité parvum et evanescens concipi oportet, hocque modo quaevis differentialia, etiamsi revera sint nulla, per figuram repraesentare licebit.

9. Si igitur intervallum Pp tanquam infinite parvum concipiamus, ut sit $Pp = dx$, incrementum applicatae mn, quod ante erat finitum $= \Delta y$, nunc differentiale dy repraesentabit, ita ut sit $mn = dy$. Quamvis autem utraque linea Pp et mn sit infinite parva, tamen ratio, quae inter eas locum obtinet, erit finita, quoties differentiale functionis y ad differentiale dx finitam tenet rationem. Ratio enim $dy:dx$ plerumque est finita, atque eandem rationem habebit mn ad Pp seu Mn, etiamsi utraque concipiatur infinite parva seu nulla. Ex quo perspicuum est, etsi in calculo differentiali praecipue quantitates infinite parvae seu evanescentes tractentur, tamen ex iis quantitates finitas, quae scilicet rationes differentialium metiantur obtineri, sicque conclusiones, quae inde formantur, ad genus quantitatum finitarum vicissim revocari posse.

10. Quoniam igitur intervallum Pp evanescens concipitur, puncta curvae M et m infinite parum a se invicem distabunt, sicque elementum curvae Mm erit infinite parvum, ac propterea quavis assignabili quantitate minus. Unde hoc commodi nanciscimur, ut hoc curvae elementum Mm tanquam lineola recta considerari possit. Fingatur enim per puncta M et m duci corda Mm, hujus longitudo eo minus a longitudine arcus Mm discrepabit, quo magis arcus Mm diminuatur, hincque isto arcu in infinitum diminuto, omne discrimen inter ipsum et cordam subtendentem evanescet, abibitque ratio arcus ad cordam in rationem aequalitatis. Continuo enim diminuendo distantiam punctorum M et m, quamdiu curvatura in arcu Mm deprehenditur, ulterius distantia Mm diminuatur; ex quo manifestum est, si distantia haec in infinitum fuerit diminuta, rationem aequalitatis inter arculum Mm et ejus cordam intercedere debere.

11. Hac ergo consideratione ad infinite parva translata, triangulum Mnm, quod quamdiu in finitis versabamur, erat mixtilineum, nunc evadet rectilineum, ideoque ejus hypotenusa Mm per theorema pythagoricum assignari poterit. Cum enim in triangulo Mnm ad n rectangulo sit

$$Mn = Pp = dx, \quad \text{et} \quad mn = dy,$$

erit hypotenusa $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Exhibet autem haec lineola Mm differentiale ipsius lineae

lineae curvae BM, et hanc ob rem etsi ipsa linea curva plerumque per quantitates x et y exprimi nequit, tamen ejus differentiale per quantitatum x et y differentialia commode exprimitur. Quo commodo cum differentiae finitae careant, perspicuum est, quantam utilitatem analysis infinitorum sit allatura.

12. Cum y sit functio ipsius x, ejus differentiale dy hujusmodi formam pdx habebit, ubi p erit functio ipsius x per differentiationem cognoscenda. Quare ob $dy = pdx$, differentiale ipsius lineae curvae $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ induet hanc formam $dx\sqrt{(1 + pp)}$. Quodsi ergo longitudinem curvae, abscissae $AP = x$ respondentem vocemus $= s$, etiamsi haec quantitas s plerumque finito modo per x et y exhiberi nequeat, tamen ejus differentiale facile assignatur, cum sit $ds = dx\sqrt{(1 + pp)}$. Hinc igitur vicissim via patet ad longitudinem lineae curvae s inveniendam; id enim solum requiritur, ut quantitas investigetur, cujus differentiale sit $= dx\sqrt{(1 + pp)}$, haecque quantitas longitudinem lineae curvae s exprimet. Hoc autem opus ad calculum integralem pertinet.

13. Quoniam in infinite parvis triangulum Mnm fit rectilineum, ejus area Mnm assignari poterit, eritque $= \frac{1}{2}\,dx\,dy$. Cum igitur totius areae, quae linea curva et coordinatis x et y includitur, differentiale seu incrementum infinite parvum sit trapezium $PMmp$, id quoque exhiberi poterit. Trapezium enim $PMmp$ constat duabus partibus, rectangulo $PMnp$, cujus area est $= ydx$, et triangulo $Mnm = \frac{1}{2}\,dx\,dy$, unde area trapezii, atque adeo differentiale areae erit $= ydx + \frac{1}{2}\,dx\,dy$. Ostensum autem est supra terminum $\frac{1}{2}\,dx\,dy$ prae altero ydx evanescere. Cum enim sit

$$ydx + \frac{1}{2}\,dx\,dy = (y + \frac{1}{2}\,dy)\,dx \quad \text{et} \quad y + \frac{1}{2}\,dy = y, \quad \text{ob} \quad dy = 0,$$

erit areae curvae differentiale $= ydx$; unde quantitas, cujus differentiale $= ydx$ exhibebit aream inter lineam curvam et coordinatas x et y contentam.

14. Hinc etiam infinitarum aliarum quantitatum, quae ipsae per x et y exprimi nequeunt, differentialia assignari poterunt. Concipiatur curva BM circa axem AP converti, ut generetur solidum rotundum, atque hac rotatione trapezium $PMmp$ generabit conum truncatum, cujus soliditas praebebit differentiale illius solidi rotundi; superficies autem convexa istius coni truncati differentiale superficiei solidi rotundi. Ad haec differentialia exprimenda sit $1 : \pi$ ratio diametri ad peripheriam, seu radii ad semicircumferentiam, erit circuli, radio $PM = y$ descripti, peripheria $= 2\pi y$, et area πyy; circuli autem radio $pm = y + dy$ descripti peripheria $= 2\pi(y + dy)$ et area $= \pi(y + dy)^2$. Jam pro differentiali superficiei erit semisumma circumferentiarum utriusque basis coni truncati $= \pi y + \pi(y + dy) = 2\pi y$, quae per latus coni $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ multiplicata dabit differentiale superficiei solidi rotundi $= 2\pi y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 2\pi y\,dx\sqrt{(1 + pp)}$, posito $dy = pdx$.

15. Soliditas autem hujus coni truncati, quae dat differentiale soliditatis solidi rotundi, secundum regulas stereometriae reperietur, si ad summam basium $\pi yy + \pi(y + dy)^2$ addatur media proportionalis inter easdem $\pi y(y + dy)$, eritque aggregatum $= 3\pi yy + 3\pi y\,dy + \pi dy^2 = 3\pi yy$, ob reliquos terminos prae $3\pi yy$ evanescentes. Deinde triens hujus summae πyy multiplicari debet per altitudinem coni scaleni $Pp = dx$, eritque productum $\pi yy\,dx$ soliditas coni truncati, simulque differentiale soliditatis solidi rotundi; unde ope calculi integralis vicissim tam volumen istius solidi rotundi quam ipsius superficiei inveniri poterit.

16. Praeterea hic quoque diligenter observandum est, in calculo omnia differentialia perpetuo tanquam affirmativa spectari. Scilicet quantitas variabilis quaecunque z in statu sequente proximo semper in $z + dz$ abire assumitur, sive ea crescat sive decrescat; et cum differentiale sit differentia quae remanet, si quantitas variabilis z a suo valore sequente $z + dz$ subtrahatur, erit $+dz$ semper ejus differentiale. Nihilo tamen minus hoc modo omnium quantitatum, sive sint crescentes sive decrescentes, differentialia distincte exhibentur; si enim z crescat, ejus differentiale dz affirmativum, sin decrescat, negativum valorem habere invenitur. Sic si sit $z = \frac{1}{x}$ erit $+dz = -\frac{dx}{xx}$, unde manifestum est quantitatem z decrescere, dum x crescit. Hac autem hypothesi innititur constantia regularum analysis infinitorum, unde summus usus in calculum redundat.

17. Quodsi autem figurae veritati conformiter delineentur, atque in iis differentialia modo ante exposito repraesententur, saepenumero ea a calculo discrepare videbuntur; neque tamen hinc ulla confusio, si ad principia sedulo attendamus, oriri poterit, quin potius, si ab hac lege recederemus, maximis difficultatibus implicaremur, unde nos extricare non possemus, nisi novis calculi differentialis regulis stabiliendis. Sic si quantitas variabilis x (Fig. 3) linea recta AP repraesentetur, eaque in situm proximo abeat in Ap, haec linea Ap per $x + dx$ designari debebit, eritque propterea $Pp = Ap - AP = dx$. Si quis autem hoc decrementum Pp per dx exprimere velit, atque ideo $Ap = x - dx$ statuere, is contra principia calculi differentialis stabilita peccaret, vel aliis regulis ad calculum prosequendum uti deberet. Praeter necessitatem autem has regulas multiplicare ridiculum foret.

18. Omnis autem ambiguitas evitabitur, si, postquam singulas quantitates in calculum ingredientes suis litteris denominaverimus, easdem quantitates in situm proximum translatas iisdem litteris suis differentialibus auctis designemus. In figura autem, si lineis principalibus litteras majusculas adscripserimus, iisdem in statum proximum translatis, easdem litteras minusculas adscribemus. Sit si (Fig. 4) in curva BM ad axem AP relata vocetur abscissa $AP = x$, et applicata $PM = y$, in situ proximo erit abcissa $Ap = x + dx$, et applicata $pm = y + dy$. Unde manifestum est fore $Pp = Ap - AP = dx$ et ducta mn axi parallela, erit particula $Mn = PM - pm = -dy$. Imprimis igitur attendendum est ad quantitatem variabilem primariam, cujus reliquae tanquam functiones spectantur, qua cautela adhibita omnes difficultates, quae alias subnasci possent, sponte evanescent.

19. Neque etiam opus est, ut omnes quantitates variabiles ab eodem axis puncto initium trahant, a quo abscissae computantur; sed nihil impedit, quominus reliquae quantitates variabiles ad aliud principium referantur. Sic etiamsi abscissarum AP (Fig. 2) initium in axis puncto A collocetur, fieri potest ut, exempli gratia, area curvae BPM ab alio puncto fixo B aestimetur. Positis enim coordinatis $AP = x$, $PM = y$, si vocetur area $BPM = \varrho$, erit puncto P in situm proximum p promoto, $Ap = x + dx$, $pm = y + dy$, et area $Bpm = \varrho + d\varrho$, unde cum sit $d\varrho = PMmp$, erit ut ante $d\varrho = ydx$. Simili modo, si (Fig. 4) sumtis abscissa $AP = x$, $PM = y$, area $CDMP$ a puncto fixo C computetur et ponatur $= \varrho$, fiet omnibus in situm proximum translatis, area $CDmp = \varrho + d\varrho$, eritque ergo $d\varrho = -PMmp = -ydx$. Atque si arcus DM positus fuerit $= s$, erit $Dm = s + ds$ et $ds = -Mn = -\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Haeque animadversiones sufficiunt ad calculum cum figuris conjungendum.

20. Quae hactenus de differentialibus applicatarum, arearum et arcuum curvae sunt tradita proprie tantum ad ejusmodi curvas pertinent, quarum applicatae sunt functiones uniformes abscissarum, ita ut unicuique abscissae unica tantum applicata respondeat. Si enim eidem abscissae plures applicatae respondeant, alii abscissae, priore scilicet quapiam quantitate aucta, totidem applicatae respondebunt, atque applicatae incrementum multiplex esse oporetbit: quaelibet namque applicatarum priorum, a qualibet posteriorum subtracta, relinquet residuum, quod applicatae incrementum repraesentabit. Simili modo hoc casu eidem abscissae plures respondebunt areae, ac propterea eidem abscissae incremento multo plura arearum incrementa; sicque apparet functionum multiformium incrementa esse quoque functiones multiformes. His ergo casibus, si ex dato abscissae incremento quaeratur incrementum applicatae vel areae, quaestio non erit determinata, sed plures responsiones postulabit.

21. Quae quo clarius perspiciantur, ponamus applicatam y esse functionem triformem ipsius abscissae x, seu eidem abscissae (Fig. 5) $AP=x$ respondeant tres applicatae PM, PM' et PM'', quae omnes * in valore litterae y contineantur, quod evenit si y per hujusmodi aequationem cubicam exprimatur $y^3-Py^2+Qy-R=0$, existentibus P, Q, R, functionibus quibuscunque ipsius x. Hujus ergo aequationis pro abscissa $AP=x$ tres radices erunt PM, PM' et $-PM''$, propterea quod ultima in regionem negativam cadit. Quare ex natura aequationum erit

$$P=PM+PM'-PM''$$
$$Q=PM.PM'-PM.PM''-PM'.PM''$$
$$R=-PM.PM'.PM''.$$

22. Ponamus jam abscissam x incremento, ac primo quidem finito Δx augeri, ita ut sit $Ap=x+\Delta x$ et $Pp=\Delta x$. Applicata ergo y abibit in $y+\Delta y$, quae in figura denotabit tres applicatas pm, pm', $-pm''$. Cum igitur y designet quamvis ex applicatis PM, PM' et $-PM''$, differentia Δy exhibere debet singulas differentias inter has et illas applicatas, unde Δy sequentes novem denotabit valores:

1. $pm-PM$,	4. $pm'-PM$,	7. $-pm''-PM$
2. $pm-PM'$,	5. $pm'-PM'$,	8. $-pm''-PM'$
3. $pm+PM''$,	6. $pm'+PM''$,	9. $-pm''+PM''$.

Quamobrem necesse est ut Δy per aequationem noni gradus determinetur. Scilicet si ipsa quantitas y eliminetur, prodibit aequatio, in qua quantitas Δy ad nonum gradum ascendet.

23. Ad hanc aequationem inveniendam ponatur in aequatione pro curva $y^3-Py^2+Qy-R=0$, $x+\Delta x$ loco x, et $y+\Delta y$ loco y; et cum sint P, Q et R functiones ipsius x, eae, si pro x ponatur $x+\Delta x$, abeant in $P+\Delta P$, $Q+\Delta Q$ et $R+\Delta R$. Sicque prodibit haec aequatio

$$\left.\begin{array}{l}
y^3+3y^2\Delta y+3y\Delta y^2+\Delta y^3\\
-Py^2-2Py\Delta y-P\Delta y^2\\
-y^2\Delta P-2y\Delta P\Delta y-\Delta P\Delta y^2\\
+Qy+Q\Delta y\\
+y\Delta Q+\Delta Q\Delta y\\
-R\\
-\Delta R
\end{array}\right\}=0.$$

*

Si jam ex hac aequatione cum priori conjuncta littera y eliminetur, et Δy tanquam incognita spectetur, orietur aequatio novem dimensionum, cujus radices erunt novem illae differentiae supra exhibitae.

24. Si quis hunc eliminationis laborem in se suscipere velit, revera ad aequationem novem dimensionum perveniet. Neque vero hac eliminatione est opus; cum enim y per priorem aequationem cubicam detur, unde tres nanciscitur valores, qui si tanquam cogniti spectentur, ex altera aequatione pariter cubica incognita Δy erui poterit, quae pariter ternos sortietur valores. Quia autem in illos tres valores ingredietur variabilis y, quae jam per se triplicem habet valorem, si ejus loco hi valores seorsim substituantur, omnino novem ipsius Δy provenient valores, qui erunt ii ipsi valores, quos supra exhibuimus. Ad hoc autem commodius paestandum prior aequatio a posteriori subtrahi potest, sicque relinquetur sequens aequatio

$$\left.\begin{aligned}
&-y^2\Delta P + 3y^2\Delta y + 3y\Delta y^2 + \Delta y^3\\
&+y\,\Delta Q - 2Py\Delta y - P\Delta y^2\\
&-\Delta R - 2y\Delta P\Delta y - \Delta P\Delta y^2\\
&+Q\Delta y\\
&+\Delta Q\Delta y
\end{aligned}\right\} = 0.$$

25. Quemadmodum igitur, si y fuerit functio triformis ipsius x, seu si definiatur per aequationem cubicam, ejus incrementum Δy novem induit valores, ita si aequatio, qua applicata y determinatur, habuerit quatuor dimensiones, ejus incrementum Δy, quod pariter, nisi y eliminetur, ad quatuor dimensiones exsurgit, omnino sedecim habebit valores diversos. Atque in genere si applicata y per aequationem n dimensionum definiatur, ejus incrementam Δy aequatione totidem dimensionum determinatum reperietur, totidemque habebit valores, in quibus etiamnum inerit y, quae cum ipsa habeat n valores, incrementum Δy omnino nn sortietur valores, qui erunt differentiae inter singulos valores ipsarum y et $y + \Delta y$.

26. Ne igitur tanta sit valorum incrementi Δy multitudo, consideremus aequationem quadratam quae duos tantum ipsius y exhibeat valores, sitque

$$yy - 2Py + Q = 0$$

ubi P et Q sint functiones quaecunque abscissae x, et y denotet applicatam. Ex hac ergo aequatione commode ambo valores ipsius y exhiberi possunt, qui sunt

$$y = P + \sqrt{(P^2 - Q)} \text{ et } y = P - \sqrt{(P^2 - Q)}.$$

Crescat nunc abscissa x incremento Δx, hincque ejus functiones P et Q incrementis ΔP et ΔQ, applicatae vero y incrementum sit Δy, quod propterea hac aequatione exponetur

$$\left.\begin{aligned}
&yy + 2y\Delta y + \Delta y^2\\
&-2Py - 2P\Delta y\\
&-2y\Delta P - 2\Delta P\Delta y\\
&+Q\\
&+\Delta Q
\end{aligned}\right\} = 0$$

vel priori aequatione ablata, hac

$$\left.\begin{array}{l} -2y\Delta P + 2y\Delta y + \Delta y^2 \\ +\Delta Q \quad -2P\Delta y \\ \qquad\quad -2\Delta P\Delta y \end{array}\right\} = 0.$$

27. Quodsi jam ex hac aequatione quaeratur incrementum Δy, reperietur

$$\Delta y = -y + P + \Delta P \pm \sqrt{(y^2 - 2yP + P^2 + 2P\Delta P + \Delta P^2 - \Delta Q)}$$

qui bini valores, si loco y ejus valores ambo ante inventi substituantur, abibunt in quatuor valores ipsius Δy, qui his binis formulis continebuntur

$$\Delta y = \Delta P \pm \sqrt{(P^2 - Q)} + \sqrt{(P^2 - Q + 2P\Delta P + \Delta P^2 - \Delta Q)}$$
$$\Delta y = \Delta P \pm \sqrt{(P^2 - Q)} - \sqrt{(P^2 - Q + 2P\Delta P + \Delta P^2 - \Delta Q)}$$

seu in unica formula erit

$$\Delta y = \Delta P \pm \sqrt{(P^2 - Q)} \pm \sqrt{(P^2 - Q + 2P\Delta P + \Delta P^2 - \Delta Q)}.$$

28. Ponamus jam incrementum ipsius x, quod in his valoribus finitum est assumtum, fieri infinite parvum, eruntque functionum P et Q incrementa ΔP et ΔQ pariter infinite parva, abibuntque in dP et dQ. Hinc erit

$$\sqrt{(P^2 - Q + 2P\,dP + dP^2 - dQ)} = \sqrt{(P^2 - Q)} + \frac{2P\,dP - dQ}{2\sqrt{(P^2 - Q)}}$$

unde quaterni ipsius Δy valores erunt

$$\Delta y = 2\sqrt{(P^2 - Q)} + dP + \frac{2P\,dP - dQ}{2\sqrt{(P^2 - Q)}}$$
$$\Delta y = -2\sqrt{(P^2 - Q)} + dP - \frac{2P\,dP + dQ}{2\sqrt{(P^2 - Q)}}$$
$$\Delta y = dP + \frac{2P\,dP - dQ}{2\sqrt{(P^2 - Q)}}$$
$$\Delta y = dP - \frac{2P\,dP + dQ}{2\sqrt{(P^2 - Q)}}.$$

Ex his apparet binos priores valores ipsius Δy non obstante incrementi dx parvitate infinita, esse finitae magnitudinis, binos autem posteriores esse infinite parvos; hisque casibus ob $\sqrt{(P^2 - Q)} = y - P$, erit

$$\Delta y = dP + \frac{2P\,dP - dQ}{2y - 2P} = \frac{2y\,dP - dQ}{2y - 2P}$$

qui valor quoque per differentiationem consuetam eruitur.

29. Scilicet si ponamus binos ipsius y valores in figura esse PM et PM', qui abscissae $AP = x$ respondeant, atque abscissae suo differentiali auctae $Ap = x + dx$ respondere applicatas pm et pm', quae per $y + \Delta y$ exprimentur, incrementum Δy hos quatuor habebit valores

1. $pm - PM$, 3. $pm' - PM$
2. $pm - PM'$, 4. $pm' - PM'$

quorum duo, nempe secundus et tertius, erunt finitae magnitudinis, primus autem et quartus infinite parvi. Illi ergo duo valores, cum sint finiti, non pro differentiali ipsius y haberi, neque per dy exprimi poterunt, sed soli duo posteriores, qui cum sint infinite parvi, differentialia utriusque applicatae repraesentabunt. Ductis nimirum axi AP parallelis lineolis Mn et $M'n'$, erit mn differentiale applicatae PM, et $-m'n'$ differentiale alterius applicatae PM'.

30. Simili modo, si uti in figura applicata y tres habeat valores, tum ex novem valoribus ipsius Δy tres erunt infinite parvi, siquidem pro incremento abscissae sumatur ejus differentiale dx. Isti scilicet tres ipsius Δy valores infinite parvi erunt: $pm - PM = mn$, $pm' - PM' = -m'n'$ et $-pm'' + PM'' = -m''n''$, quia videlicet applicatae pm'' et PM'' sunt negativae. Hae igitur tres lineolae mn, $-m'n'$, $-m''n''$ praebent valores differentialis ipsius y, ideoque per dy designari possunt. Reliqui autem sex valores ipsius Δy hic in considerationem non veniunt. Atque in hoc ipso denuo insignis calculi differentialis usus includitur, quod valores ipsius Δy ad propositum facientes facile a reliquis inutilibus segregare liceat; nam nisi differentia Δx infinite parva statuatur, tam facile ex novem illis ipsius Δy valoribus, qui omnes essent finiti, ii, qui differentias duarum applicatarum in eodem curvae ramo sumtarum denotant, separari non possent.

31. Cum igitur hic ii tantum ipsius Δy valores requirantur, qui sint infinite parvi, et locum ipsius dy tenere queant, ponamus dy loco Δy, et dP, dQ et dR pro ΔP, ΔQ et ΔR, neglectisque in aequatione (24) inventa terminis, in quibus differentialia plures obtinent dimensiones, habebitur ista aequatio

$$-y^2 dP + ydQ - dR + 3y^2 dy - 2Py\,dy + Qdy = 0,$$

ex qua fit

$$dy = \frac{y^2 dP - ydQ + dR}{3y^2 - 2Py + Q}.$$

Quanquam autem hic unicus duntaxat pro dy valor invenitur, tamen quia ipsa applicata y triplicem habet valorem, hinc etiam tres valores pro dy oriuntur. Scilicet si pro y ponatur PM, tum prodit $dy = mn$; sin ponatur PM' pro y, fiet $dy = -m'n'$; at si pro y substituatur $-PM''$, invenietur $dy = -m''n''$.

32. Hinc perspicitur has applicatarum differentias infinite parvas dy, quae prodeunt dum abscissa x suo differentiali dx augetur, per regulas consuetas calculi differentialis inveniri. Si enim aequatio proposita

$$y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$$

differentietur, prodibit

$$3yy\,dy - 2Py\,dy - y^2 dP + Qdy + ydQ - dR = 0,$$

unde oritur, uti modo invenimus:

$$dy = \frac{y^2 dP - ydQ + dR}{3yy - 2Py + Q}.$$

Quocirca calculus differentialis etiam functionum multiformium ea ipsa praebet differentialia, quibus opus habemus. Neque enim quasvis requirimus differentias inter singulos applicatarum valores praecedentes et sequentes, sed eas tantum, quae ad unum eundemque ramum pertinent. Ex his enim differentiis determinari debet positio tangentium et normalium aliarumque quantitatum a curvatura pendentium.

33. Quotcunque ergo applicatae in eadem linea curva eidem abscissae respondeant, uniuscujusque incrementum vel decrementum assignari, sicque plures rami, ex quibus linea curva componitur, tanquam totidem lineae simplices considerari possunt. Quaecunque enim fuerit aequatio inter abscissam x et applicatam y, ejus differentialis erit hujusmodi $dy = Zdx$, denotante Z functionem ipsius

valet y. Quodsi ergo valores ipsius y fuerint p, q, r, s, etc., si in functione Z pro y ponatur valor p, prodibit incrementum applicatae p; similique modo si pro y successive ponantur valores q, r, s, etc. quantitas Zdx harum applicatarum differentialia exhibebit. Hinc ergo magis confirmantur et illustrantur, quae in libro superiori de differentiatione functionum multiformium sunt tradita.

34. Quoniam ergo pro differentiali dy totidem valores nanciscimur, quot ipsa applicata y diversos sortitur valores, totidem inde quoque resultabunt expressiones pro differentialibus singulorum curvae ramorum. Scilicet cum ante invenerimus elementum seu differentiale lineae curvae per $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ exprimi, si pro dy substituatur valor mn, tum $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ praebebit elementum Mm, quod est differentiale arcus EM; sin autem pro dy substituatur $-m'n'$, eadem expressio dabit differentiale arcus DM'; ac si fiat $dy = -m''n''$, tum $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ exhibebit differentiale arcus EM''. Simili ergo modo quotcunque linea curva habuerit ramos, eidem abscissae respondentes, hinc singulos istos ramos seorsim dimetiri licebit; quod argumentum fusius pertractabitur, ubi de dimensione linearum curvarum sermo instituetur.

35. Quae hactenus explicavimus ad eos tantum casus, quibus natura curvae aequatione inter binas coordinatas orthogonales exprimitur, pertinent. Interim tamen ex his quoque facile perspicitur, quemadmodum, si coordinatae non fuerint normales inter se, sed ad datum quemvis angulum inclinatae, differentialia ad figuras transferri debeant. Quin etiam, si natura curvae alio quocunque modo exprimatur, applicatio calculi ad figuram nullam fere habebit difficultatem; atque si ulla supersit, ea in sequenti tractatione prorsus tolletur. Ceterum in hujusmodi investigationibus omnis vis in eo est posita, quod differentiale ipsius lineae curvae tanquam lineola recta spectari possit; idem enim modus, quo hoc pro coordinatis orthogonalibus est ostensum, aeque ad omnes alios modos naturam curvarum exprimendi patet.

Caput II.

De tangentibus linearum curvarum.

1. In capite praecedente vidimus particulas infinite parvas cujusvis lineae curvae tanquam lineolas rectas spectari posse. Hancobrem omnis linea curva instar figurae rectilineae, cujus latera sint infinite parva, considerari poterit; definitio autem nostra infinite parvorum, qua ea prorsus evanescentia nihiloque aequalia statuimus, omnes difficultates, quae vulgo contra hanc propositionem allegari solent, penitus tollit. Quando enim dicimus lineam curvam per multisectionem in infinitum repetitam in particulas rectas secari, nihil aliud affirmamus, nisi hoc sectionis modo nunquam prorsus ad particulas, quae sint lineolae rectae, perveniri; sicque ab iis non dissentimus, qui negant ullas linearum curvarum particulas, quantumvis sint exiguae, unquam recte pro lineolis rectis haberi. Quamprimum autem particulae infinite parvae considerantur, eae a particulis infinite parvis lineae rectae omnino discrepare non possunt.

2. Quo haec clarius intelligantur, primo quidem nullum est dubium, quin omnes partes lineae rectae, quantumvis sint parvae, sint pariter lineolae rectae. Quocirca quando dicimus particulas