Quodsi ergo valores ipsius y fuerint p, q, r, s, etc., si in functione Z pro y ponatur valor p, prodibit incrementum applicatae p; similique modo si pro y successive ponantur valores q, r, s, etc. quantitas Zdx harum applicatarum differentialia exhibebit. Hinc ergo magis confirmantur et illustrantur, quae in libro superiori de differentiatione functionum multiformium sunt tradita.

34. Quoniam ergo pro differentiali dy totidem valores nanciscimur, quot ipsa applicata y diversos sortitur valores, totidem inde quoque resultabunt expressiones pro differentialibus singulorum curvae ramorum. Scilicet cum ante invenerimus elementum seu differentiale lineae curvae per $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ exprimi, si pro dy substituatur valor mn, tum $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ praebebit elementum Mn, quod est differentiale arcus EM; sin autem pro dy substituatur $-m'n'$, eadem expressio dabit differentiale arcus DM'; ac si fiat $dy=-m''n''$, tum $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ exhibebit differentiale arcus EM''. Simili ergo modo quotcunque linea curva habuerit ramos, eidem abscissae respondentes, hinc singulos istos ramos seorsim dimetiri licebit; quod argumentum fusius pertractabitur, ubi de dimensione linearum curvarum sermo instituetur.

35. Quae hactenus explicavimus ad eos tantum casus, quibus natura curvae aequatione inter binas coordinatas orthogonales exprimitur, pertinent. Interim tamen ex his quoque facile perspicitur, quemadmodum, si coordinatae non fuerint normales inter se, sed ad datum quemvis angulum inclinatae, differentialia ad figuras transferri debeant. Quin etiam, si natura curvae alio quocunque modo exprimatur, applicatio calculi ad figuram nullam fere habebit difficultatem, atque si ulla supersit, ea in sequenti tractatione prorsus tolletur. Ceterum in hujusmodi investigationibus omnis vis in eo est posita, quod differentiale ipsius lineae curvae tanquam lineola recta spectari possit; idem enim modus, quo hoc pro coordinatis orthogonalibus est ostensum, aeque ad omnes alios modos naturam curvarum exprimendi patet.

Caput II.

De tangentibus linearum curvarum.

1. In capite praecedente vidimus particulas infinite parvas cujusvis lineae curvae tanquam lineolas rectas spectari posse. Hancobrem omnis linea curva instar figurae rectilineae, cujus latera sint infinite parva, considerari poterit; definitio autem nostra infinite parvorum, qua ea prorsus evanescentia nihiloque aequalia statuimus, omnes difficultates, quae vulgo contra hanc propositionem allegari solent, penitus tollit. Quando enim dicimus lineam curvam per multisectionem in infinitum repetitam in particulas rectas secari, nihil aliud affirmamus, nisi hoc sectionis modo nunquam prorsus ad particulas, quae sint lineolae rectae, perveniri; sicque ab iis non dissentimus, qui negant ullas linearum curvarum particulas, quantumvis sint exiguae, unquam recte pro lineolis rectis haberi. Quamprimum autem particulae infinite parvae considerantur, eae a particulis infinite parvis lineae rectae omnino discrepare non possunt.

2. Quo haec clarius intelligantur, primo quidem nullum est dubium, quin omnes partes lineae rectae, quantumvis sint parvae, sint pariter lineolae rectae. Quocirca quando dicimus particulas

infinite parvas linearum curvarum pro lineolis rectis haberi posse, nihil aliud dicimus, nisi particulas infinite parvas linearum curvarum a particulis infinite parvis lineae rectae non differre. Quo ulterius enim linea curva dividitur et in minores particulas secatur, eo magis discrimen a curvedine ortum diminuitur; si enim arcus cujusvis curvae corda subtendatur, quantumvis sit discrimen inter arcum et ejus cordam, hoc discrimen continuo fiet minus, quo minor arcus capiatur. Hincque recte concluditur, si arcus in infinitum diminuatur, discrimen inter eum ejusque cordam penitus evanescere, atque adeo particulam infinite parvam cujusque lineae curvae pro lineola recta infinite parva haberi posse.

3. Hujus principii etiam insignis solet esse usus in geometria elementari. Ubi enim quadratura circuli investigatur, ibi assumitur area circuli aequari polygono infinitorum laterum, circulo vel inscripto vel circumscripto. Dum enim circulo polygona regularia inscribuntur, mox apparet omnia quidem circulo esse minora; interim tamen quo plura ea habeant latera, eo minus ea a circulo discrepare. Unde colligitur, si numerus laterum polygoni in infinitum augeatur, tum discrimen inter ejus aream et aream circuli omnino evanescere; quae convenientia quoque contrario modo in polygonis circumscriptis locum habet. Neque vero solum area polygoni infinitorum laterum sive inscripti sive circumscripti aequalis est areae circuli, sed etiam ejus perimeter aequalis censetur peripheriae circuli, quod admitti non posset, nisi arculi circuli infinite parvi suis cordis essent aequales.

4. Contra hanc arculorum circuli infinite parvorum cum suis cordis convenientiam ab iis, qui in mechanica sunt versati, grave argumentum allegari solet. Cum enim descensus corporis gravis super arcu circuli usque ad ejus imum punctum investigatur, deprehenditur tempus descensus non evanescere, etiamsi arcus in infinitum diminuatur, quo casu suae subtensae fit aequalis. Deinde omnes descensus corporis super singulis cordis in imo circuli puncto terminatis aeque diuturni inveniuntur, neque tamen si et arcus et corda infinite parva statuantur, tempus descensus super arcu aequale est tempori descensus super corda. Hocque vero casu is valde falleretur, qui arcum et cordam, etiamsi utrumque sit infinite parvum, inter se confundere vellet. Verum cum hic tempus descensus super arcu quamvis infinite parvo, tamen sit finitum, hoc ipso investigatio ab infinite parvis ad finita est traducenda, ita ut haec objectio in praesenti instituto nullam vim retineat. Hic enim plus non affirmamus, quam inter arcus et cordas evanescentes rationem aequalitatis intercedere, quam ista objectio non infringit.

5. Quamvis elementa infinite parva cujusque lineae curvae aliter nisi puncta concipi nequeant, ideoque in illis nullae dentur partes ullam longitudinem constituentes; tamen calculus nobis cujusvis * elementi directionem exhibet. Dum enim (Fig. 2) triangulum Mnm continua diminutione intervalli Pp in infinitum diminuitur atque in rectilineum abit, ob rationem inter ejus latuscula finitam, anguli ad M, n et m erunt cogniti, hincque inclinatio elementi Mn ad elementum Mn, quod axi AP parallelum concipitur, innotescet. Etiamsi igitur revera elementum Mn tanquam punctum in se nullam habeat directionem, tamen si cum sequente consideretur, plaga, secundum quam cum eo connectitur, directionem determinabit. Hanc directionem quoque hoc modo concipere licet, dum triangulum Mnm adhuc est finitum, intelligatur in eo ducta corda Mm cujus directio ergo erit nota; jam triangulum Mnm diminuendo, directio cordae continuo mutabitur. Sed ita tamen ad certam quandam

directionem jugiter propius accedet, quam attingere censenda erit tum, cum triangulum in infinitum erit diminutum.

6. Omnes autem difficultates penitus evanescent, si genesin linearum curvarum ita imaginemur, ut motu puncti super plano incedentis describantur. Sic enim linea curva BM erit quasi via, secundum quam punctum ex B in M est progressum. Hoc modo linea recta describitur, si punctum in motu suo perpetuo eandem servat directionem; linea curva autem, si ejus directio continuo immutatur. In quovis autem lineae curvae BM loco punctum istud describens certam habebit directionem, sine qua motus consistere non posset; atque in triangulo infinite parvo Mnm hypotenusa Mm repraesentabit directionem, secundum quam punctum illud, cum in M pervenerit, motum suum prosequitur. Hancobrem angulus mMn monstrabit inclinationem illius directionis ad axem AP; ex angulo autem Mmn constabit, quantum directio puncti lineam curvam describentis ad applicatam PM inclinetur.

7. Ducatur, per punctum curvae M linea recta indefinita TMV, quae ad axem AP (Fig. 6) vel rectam * ei parallelam Mn eandem teneat inclinationem, quam in triangulo infinite parvo Mmn habet hypotenusa Mm ad basin Mn, atque haec recta TMV ita exprimet directionem puncti motu suo lineam curvam AM describentis, ut si hoc punctum eandem directionem, quam in M habet, invariatam retineret, ipsam lineam rectam MV descripturum esset. Hujus ergo lineae rectae TMV elementum infinite parvum Mm, quia ad Mn eandem habet inclinationem, quam tenet elementum lineae curvae Mm, cum hoc elemento congruet, atque adeo elementum Mm commune erit lineae rectae TMV et curvae AM. Quamobrem ista linea recta TMV tanget lineam curvam in puncto M; linea recta enim tangens lineam curvam ita definitur, ut cum linea curva in eo puncto, ubi est contactus, eandem directionem habere dicatur.

8. Si igitur pro coordinatis orthogonalibus AP et PM vocetur abscissa $AP = x$, applicata $PM = y$, in triangulo infinite parvo Mnm erit $Mn = Pp = dx$, $mn = dy$ et $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, et angulus mMn metietur inclinationem tangentis TMV ad axem AP, eritque si tangens axem in puncto T secare ponatur, angulus $PTM = mMn$, unde ob angulos ad P et n rectos, triangula TMP et Mmn inter se erunt similia, ac propterea latera proportionalia. Fiet ergo

$$mn\,(dy) : Mn\,(dx) = MP\,(y) : PT\left(\frac{ydx}{dy}\right), \quad \text{ideoque} \quad PT = \frac{ydx}{dy}.$$

Hinc in axe definiri potest punctum T, ex quo, si per punctum M agatur linea recta TMV, ea futura sit tangens lineae curvae in puncto M. Vocari autem haec linea PT solet substangens.

9. Inventa ergo pro quavis curva, cujus natura aequatione inter coordinatas orthogonales exprimitur, subtangente $PT = \frac{ydx}{dy}$, tangens curvae in puncto M expeditissime ducitur, ducendo scilicet per puncta T, M linea recta TMV. Longitudo autem ipsius lineae tangentis MT erit $= \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy}$. Aliis quoque modis punctum T, quo tangens determinatur, assignari potest: sic ejus distantia a puncto A, seu intervallum AT erit $= \frac{ydx}{dy} - x = \frac{ydx - xdy}{dy}$. Sin autem punctum T nimis longe excurrat, commodius in linea recta AB ad axem normali definitur punctum S, per quod tangens transit. Namque ob triangula similia TAS, Mnm, erit $dx : dy = AT : AS$, ideoque ob

$$AT = \frac{ydx - xdy}{dy}, \text{ erit } AS = \frac{ydx - xdy}{dx} = y - \frac{xdy}{dx}.$$

Vel ducta MQ axi AP parallela, ob $AQ = PM = y$, erit $QS = \frac{xdy}{dx}$. Hinc invento puncto S, linea recta per ambo puncta M et S ducta curvam in M tanget.

10. Cognita tangente ad curvam facile linea recta duci poterit, quae cum curva angulum quemcunque constituat; quaevis enim recta ad lineam curvam in dato puncto aeque inclinata censetur, atque ad tangentem in eo puncto. Sic si per punctum M linea recta duci debeat, quae sit ad curvam normalis, totum negotium absolvetur, si ad tangentem MT in puncto M normalis educatur MN. Hujusmodi recta MN, quae in geometria sublimiori frequentissime occurrit, normalis appellari solet, et portio axis PN, inter applicatam et occursum normalis cum axe intercepta, subnormalis vocatur. Cum jam triangula Mmn, MNP sint pariter similia, erit

$$dx : dy = PM : PN \quad \text{ideoque} \quad PN = \frac{ydy}{dx}.$$

Facile ergo per differentiationem invenitur subnormalis PN, hincque recta per puncta M et N ducta erit normalis ad curvam in puncto M, quoniam ad tangentem est perpendicularis.

11. Ponamus ad curvam in puncto M duci debere rectam MO, quae cum curva angulum quemcunque datum OMT constituat. Sit iste angulus $TMO = \varphi$, et ponatur angulus $TMP = \omega$, ita ut sit

$$\sin \omega = \frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} \quad \text{et} \quad \cos \omega = \frac{dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}},$$

erit in triangulo PMO angulus $PMO = \varphi - \omega$, atque $\cos(\varphi - \omega) : y = \sin(\varphi - \omega) : PO$, unde fit

$$PO = y \operatorname{tang}(\varphi - \omega) = \frac{y(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\omega)}{1 + \operatorname{tang}\varphi \cdot \operatorname{tang}\omega}.$$

At est $\quad \operatorname{tang}\omega = \frac{dx}{dy}, \quad$ ergo $\quad PO = \frac{y(dy \operatorname{tang}\varphi - dx)}{dy + dx \operatorname{tang}\varphi}, \quad$ seu $\quad PO = \frac{y(dy \sin\varphi - dx \cos\varphi)}{dy \cos\varphi + dx \sin\varphi}.$

Hinc sequitur si angulus $OMT = \varphi$ debeat esse rectus, ob $\sin\varphi = 1$ et $\cos\varphi = 0$, fore $PO = PN = \frac{ydy}{dx}$. Sin autem angulus φ debeat esse nullus, seu MO in ipsam tangentem incidere, ob $\sin\varphi = 0$ et $\cos\varphi = 1$, erit $PO = -\frac{ydx}{dy} = -PT$, uti pro tangente invenimus.

12. Hoc modo non solum tangentes et aliae lineae rectae ad curvam utcunque inclinatae duci possunt, si applicata fuerit functio uniformis ipsius abscissae, sed etiam quotcunque curvae puncta eidem abscissae puncto P respondeant, ad quodvis punctum duci poterit tangens. Si enim applicata
* y tres habeat valores, puta PM, PM' et $-PM''$ (Fig. 5), ex aequationis resolutione non solum singuli cognoscentur, sed etiam cujusque differentiale dy. Habebuntur ergo tam pro y quam pro dy tres valores, qui in formula $\frac{ydx}{dy}$ substituti dabunt subtangentem pro quovis puncto. Vel si sit $dy = pdx$, existente p functione rationali ipsarum x et y, formula $\frac{y}{p}$, si ponatur $y = PM$, dabit subtangentem pro puncto M; sin autem pro y substituatur vel valor PM' vel PM'', prodibit subtangens vel pro puncto M', vel pro puncto M''.

13. Regulam pro inveniendis tangentibus, si natura curvae exprimatur aequatione inter coordinatas orthogonales, aliquot exemplis illustrasse juvabit.

* **Exemplum 1.** *Sit igitur curva* AM (Fig. 6) *parabola Appolloniana, cujus natura inter coordinatas* AP = x et PM = y *hac aequatione* yy = 2ax *exprimitur.*

Cum sit $yy = 2ax$, erit differentiando $ydy = adx$, ideoque $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{a}$, et subtangens

$$PT = \frac{ydx}{dy} = \frac{yy}{a} = 2x, \text{ ob } yy = 2ax.$$

Tenet ergo perpetuo subtangens PT ad abscissam AP rationem duplam. Deinde cum sit subnormalis $PN = \frac{ydy}{dx}$, ob $ydy = adx$, fiet $PN = a$; ideoque in parabola subnormalis perpetuo aequalis est semissi lateris recti. Cum porro sit resecta $AT = AP = x$, erit $AS = \frac{1}{2}y$; hinc si in puncto S ad tangentem MT ducatur normalis SF, erit $AF = \frac{1}{4}yy : x = \frac{1}{2}a$; ideoque punctum F est fixum et incidit in focum parabolae. Quae proprietates, cum aliunde sint notissimae, veritatem regulae non mediocriter confirmant.

Exemplum 2. *Sit curva* AM *parabola altioris gradus hac aequatione* $y^{m+n} = a^m x^n$ *expressa, cujus tangentem invenire oporteat.*

Si aequatio differentietur, prodit $(m+n)y^{m+n-1}dy = na^m x^{n-1}dx$, unde fit

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(m+n)y^{m+n-1}}{na^m x^{n-1}} \text{ et subtangens } PT = \frac{ydx}{dy} = \frac{(m+n)y^{m+n}}{na^m x^{n-1}}.$$

Jam ob $y^{m+n} = a^m x^n$ erit $PT = \frac{m+n}{n}x$, et $AT = \frac{m}{n}x$; ideoque abscissa AP ad resectam AT rationem habet constantem ut n ad m. Tum vero erit substangens PT ad abscissam AP ut $m+n$ ad n. Praeterea cum sit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{na^m x^{n-1}}{(m+n)y^{m+n-1}}, \text{ erit subnormalis } PN = \frac{ydy}{dx} = \frac{na^m x^{n-1}}{(m+n)y^{m+n-2}} = \frac{na^m x^n y^2}{(m+n)xy^{m+n}}.$$

Substituatur hic $a^m x^n$ loco y^{m+n} fietque $PN = \frac{ny^2}{(m+n)x}$.

Exemplum 3. *Sit* (Fig. 7) *curva* AMB *circulus centro* C *radio* AC = a *descriptus, cujus natura inter* AP = x *et* PM = y *hac aequatione* yy = 2ax − xx *exprimitur.* *

Haec aequatio differentiata dat $ydy = adx - xdx$, unde fit

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{a-x} \text{ et substangens } PT = \frac{yy}{a-x} = \frac{2ax - xx}{a-x} = \frac{x(2a-x)}{a-x}.$$

Quoniam vero est $AB = 2a$, erit $BP = 2a - x$, et ob $CP = a - x$, erit $PT = \frac{AP \cdot BP}{CP}$. Deinde est resecta

$$AT = \frac{2ax - xx}{a-x} - x = \frac{ax}{a-x} = \frac{AC \cdot AP}{CP}.$$

Porro erit

$$CT = \frac{ax}{a-x} + a = \frac{aa}{a-x} = \frac{AC^2}{CP}.$$

Denique cum sit $ydy = adx - xdx$, erit subnormalis $\frac{ydy}{dx} = a - x = CP$, unde patet normalem per centrum C transire. Quanquam hic pro abscissa $AP = x$ applicata y duplicem habet valorem, alterum PM, alterum $-PM'$, tamen quia neque in expressione subtangentis neque subnormalis inest y, tam utraque tangens MT et $M'T$ axem in eodem puncto T secat, quam utraque normalis MC et $M'C$ per centrum C transibit. Quae quidem sunt notissimae circuli proprietates.

Exemplum 4. *Si natura curvae* AM (Fig. 6) *hac aequatione exprimatur* yy = X, *existente* X *functione quacunque ipsius* x, *ejus tangentem in quovis puncto* M *invenire.* *

Sit $dX = Pdx$, et aequatio differentiata dabit $2ydy = Pdx$, unde fit

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{P}, \text{ et subtangens } PT = \frac{ydx}{dy} = \frac{2yy}{P} = \frac{2X}{P}.$$

*

Deinde cum sit $\frac{ydy}{dx} = \frac{1}{2}P$, subnormalis erit $PN = \frac{1}{2}P$, qui valores tam subtangentis quam subnormalis pro utroque applicatae valore $\pm\sqrt{X}$ valebunt, quod quidem per se est perspicuum, cum partes curvae ad utramque axis partem sitae sint inter se similes et aequales.

* **Exemplum 5.** *Positis* (Fig. 8) *abscissa* $\mathrm{AP} = \mathrm{x}$ *et applicata orthogonali* $= \mathrm{y}$, *sit natura curvae hac aequatione expressa* $\mathrm{yy} = 2\mathrm{ay} + 2\mathrm{xy} - \mathrm{aa} + \mathrm{xx}$, *ita ut unicuique abscissae* $\mathrm{AP} = \mathrm{x}$ *binae respondeant applicatae* PM *et* $-$ PM$'$.

Aequatio differentiata dabit

$$ydy = ady + xdy + ydx + xdx$$

unde fit

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y - a - x}{y + x},$$

ideoque erit subtangens

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{yy - ay - xy}{y + x} = \frac{ay + xy - aa + xx}{y + x}, \quad \text{atque resecta} \quad \frac{ydx}{dy} - x = \frac{a(y - a)}{y + x}.$$

Jam ob binos valores ipsius y duo reperiuntur puncta T et T', quorum illud tangenti in M, hoc vero tangenti in M' respondet. Erit nempe, si $y = PM$, $AT = \frac{a(PM - a)}{AP + PM}$; sin autem $y = -PM'$, erit $AT' = -\frac{a(PM' + a)}{AP - PM'}$. Simili modo ob $\frac{dy}{dx} = \frac{y + x}{y - a - x}$, erit subnormalis

$$\frac{ydy}{dx} = \frac{yy + yx}{y - a - x} = \frac{2ay + 3yx - aa + xx}{y - a - x},$$

quae praebebit intervallum PN si ponatur $y = PM$; sin autem ponatur $y = -PM'$, prodibit intervallum PN' respondens puncto M'.

Exemplum 6. *Invenire subtangentem in lineis tertii ordinis hac aequatione contentis*

$$\mathrm{y}^3 + \alpha\mathrm{y}^2\mathrm{x} + \beta\mathrm{y}\mathrm{x}^2 + \gamma\mathrm{x}^3 + \delta\mathrm{y}^2 + \varepsilon\mathrm{yx} + \zeta\mathrm{xx} + \eta\mathrm{y} + \theta\mathrm{x} + \iota = 0.$$

Aequatione hac differentiata obtinebitur

$$dy(3yy + 2\alpha yx + \beta xx + 2\delta y + \varepsilon x + \eta) + dx(\alpha yy + 2\beta yx + 3\gamma xx + \varepsilon y + 2\zeta x + \theta) = 0$$

unde fit subtangens

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{-3y^3 - 2\alpha y^2 x - \beta yxx - 2\delta yy - \varepsilon yx - \eta y}{\alpha yy + 2\beta yx + 3\gamma xx + \varepsilon y + 2\zeta x + \theta}, \quad \text{seu}$$

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{\alpha y^2 x + 2\beta yxx + 3\gamma x^3 + \delta yy + 2\varepsilon yx + 3\zeta xx + 2\eta y + 3\theta x + 3\iota}{\alpha yy + 2\beta yx + 3\gamma xx + \varepsilon y + 2\zeta x + \theta}.$$

Si hinc abscissa x subtrahatur, remanebit resecta

$$\frac{ydx}{dy} - x = \frac{\delta yy + \varepsilon yx + \zeta xx + 2\eta y + 2\theta x + 3\iota}{\alpha yy + 2\beta yx + 3\gamma xx + \varepsilon y + 2\zeta x + \theta}.$$

Quodsi jam hic pro y ejus varii valores substituantur, prodibunt axis portiones AT pro singulis curvae punctis abscissae x respondentibus.

14. Formula $\frac{ydx}{dy}$ non solum quantitatem subtangentis, quae est portio axis inter applicatam et tangentem intercepta, ostendit, sed etiam ejus positionem demonstrat. Si enim $\frac{ydx}{dy}$ affirmativum habeat valorem, punctum T ad eandem partem applicatae PM cadit, in qua reperitur initium abscissarum. Scilicet si abscissae AP a puncto A dextrorsum capiantur, subtangens $\frac{ydx}{dy}$, si ejus valor fuerit affirmativus, a puncto P sinistrorsum capi debebit, et contra, si valor ipsius $\frac{ydx}{dy}$ fuerit negativus.

Subnormalis autem $PN = \frac{ydy}{dx}$ si fuerit affirmativa, a puncto P dextrorsum capi debebit, siquidem abscissae x ab initio A dextrorsum progrediantur; hocque casu subnormalem, si fuerit negativa, sinistrorsum sumi oportet.

15. Nullum autem dubium relinquetur, si punctorum T et N distantiae ab initio abscissarum A computentur, unde in unam axis plagam abscissae affirmativae, in alteram negativae vergunt. Ponamus (Fig. 9) tam punctum T quam N in regionem abscissarum affirmativarum incidere, et cum, positis *
$AP = x$, $PM = y$, sit $PT = \frac{ydx}{dy}$ et $PN = \frac{ydy}{dx}$, erit $AT = x - \frac{ydx}{dy}$ et $AN = x + \frac{ydy}{dx}$.
Quoties ergo expressio $\frac{xdy - ydx}{dy}$ affirmativum tenet valorem, toties intervallum AT a puncto A in regione abscissarum affirmativarum capi debet. Sin autem $\frac{xdy - ydx}{dy}$ habeat valorem negativum, seu $\frac{ydx - xdy}{dy}$ affirmativum, intervallum AT in regionem abscissarum negativarum incidet. Simili modo distantia $AN = \frac{xdx + ydy}{dx}$, si sit affirmativa, in regione axis affirmativa, sin autem sit $\frac{xdx + ydy}{dx}$ negativa quantitas, in regione axis negativa capienda erit. Cujus discriminis aliquot exempla subjungamus.

Exemplum 1. *Sit* (Fig. 7) *propositus circulus centro* C *radio* AC = a *descriptus, et abscissae* *
CP = x *a centro sinistrorsum capiantur, ut sit* yy = aa — xx, *invenire subnormalem et subtangentem.*

Cum sit $yy = aa - xx$, erit $ydy = -xdx$ et $\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$, unde fit

$$\frac{ydx}{dy} = -\frac{yy}{x} \text{ et } CT = x - \frac{ydx}{dy} = \frac{xx + yy}{x} = \frac{aa}{x};$$

quae expressio cum sit affirmativa, punctum T in parte axis affirmativa sumi debet. Sin autem abscissa x sumatur negativa, quantitas $\frac{aa}{x}$ pariter fit negativa, ideoque in axe a puncto C dextrorsum capi debet. Deinde pro normali cum sit $ydy + xdx = 0$, erit quoque $\frac{ydy + xdx}{dx} = 0$, unde patet normalem perpetuo per ipsum punctum C, quod est abscissarum initium simulque centrum circuli, transire.

Exemplum 2. *Sit* (Fig. 10) *linea curva ellipsis super axe* AB *centro* C *descripta, unde sumtis* *
coordinatis CP = x *et* PM = y, *ejus natura hac aequatione* aayy = aacc — ccxx *exprimatur.*

Erit ergo a semiaxis transversus CA vel CB, et c semiaxis conjugatus. Differentiata aequatione erit

$$aaydy = -ccxdx \text{ et } \frac{dx}{dy} = -\frac{aay}{ccx}, \text{ atque } \frac{ydx}{dy} = -\frac{aayy}{ccx},$$

unde fit

$$CT = x - \frac{ydx}{dy} = \frac{aayy + ccxx}{ccx} = \frac{aa}{x};$$

cadit ergo intervallum CT in partem axis abscissis affirmativis destinatam. Deinde cum sit

$$\frac{ydy}{dx} = -\frac{ccx}{aa}, \text{ erit } CN = \frac{ydy + xdx}{dx} = \frac{(aa - cc)x}{aa}.$$

Hoc est, si fuerit $a > c$, intervallum CN erit affirmativum, sin autem sit $a < c$, intervallum CN sinistrorsum sumi debet.

Exemplum 3. *Sit* (Fig. 11) *linea curva hyperbola, cujus natura inter coordinatas orthogonales* *
AP = x, PM = y *hac aequatione exprimatur:* $yy = 2xy + aa$.

Hic unicuique abscissae x duae respondent applicatae PM et PM' eritque

$$PM = x + \sqrt{(aa + xx)} \quad \text{et} \quad PM' = x - \sqrt{(aa + xx)}$$

atque in initio A fit $$AB = AB' = a.$$

Ad tangentes jam in punctis M et M' inveniendas differentietur aequatio, prodibitque

$$ydy = xdy + ydx, \quad \text{unde fit} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{y-x}{y}, \quad \text{et subtangens} \quad PT = y - x.$$

Unde si $y = PM$, erit $PT = PM - AP$; sin autem $y = -PM'$, quia punctum T' in regionem oppositam cadit, erit $-PT' = -PM' - AP$, seu $PT' = PM' + AP$. Cum autem sit

$$y = x \pm \sqrt{(aa + xx)}, \quad \text{erit subtangens} = \pm \sqrt{(aa + xx)},$$

cujus ambigui valoris prior $+\sqrt{(aa + xx)}$ dat subtangentem PT, alter $-\sqrt{(aa + xx)}$ subtangentem $-PT'$, erit ergo $PT = PT'$. Subnormalis porro

$$PN = \frac{yy}{\sqrt{(aa + xx)}} = \frac{aa + 2xx}{\sqrt{(aa + xx)}} + 2x,$$

et altera subnormalis

$$-PN' = \frac{-aa - 2xx}{\sqrt{(aa + xx)}} + 2x, \quad \text{seu} \quad PN' = \frac{aa + 2xx}{\sqrt{(aa + xx)}} - 2x.$$

Exprimi quoque potest tam subtangens quam subnormalis per applicatam y. Cum enim sit

$$x = \frac{yy - aa}{2y}, \quad \text{erit} \quad PT = \frac{yy + aa}{2y}, \quad AT = \frac{aa}{y} \quad \text{et} \quad PN = \frac{2y^3}{yy + aa},$$

unde pro duplici valore ipsius y gemini quoque valores pro punctis T et N inveniuntur.

* **Exemplum 4.** *Sit curva* BM (Fig. 9) *logarithmica ad suam asymtotam* AP *tanquam axem relata, cujus positis coordinatis* AP = x, PM = y, *natura hac aequatione exprimatur* $x = c\,l\frac{y}{a}$.

Differentiata hac aequatione erit $dx = \frac{cdy}{y}$, ideoque $\frac{ydx}{dy} = c$, unde subtangens logarithmicae $PT = \frac{ydx}{dy}$ ubique ejusdem est quantitatis, quae est hujus curvae proprietas notissima. Hinc cum subnormalis semper sit tertia proportionalis ad subtangentem et applicatam, erit subnormalis $PN = \frac{yy}{c}$. Ex hoc autem exemplo perspicitur, quomodo curvarum transcendentium tangentes inveniri oporteat.

16. Vulgo in elementis linea tangens ita definiri solet, ut omnia puncta praeter unicum, quod punctum contactus vocatur, extra lineam curvam posita habere dicantur. Haec autem definitio non nisi in circulo et sectionibus conicis aliisque curvis, quae a lineis rectis in pluribus quam duobus punctis secari nequeunt, justam tangentis ideam praebet. Ita si (Fig. 12) curva AMN alicubi curvaturam suum inflectat, linea recta TMN eam in puncto M tangere potest, etiamsi eadem alibi in N curvam secet; hocque modo fieri potest, ut eadem linea recta curvam tangat simulque in pluribus punctis intersecet. Casus autem iste nostram definitionem non turbat, qua diximus lineam tangentem in illo puncto cum linea curva ita convenire, ut ibi utraque communem habeat directionem. Seu cum etiam in minimo curvae elemento directio agnosci debeat, linea tangens nil aliud erit, nisi hoc elementum utrinque productum.

17. Alias quoque idea tangentis ex idea linearum secantium derivari solet, ita ut (Fig. 13) linea secans TMm in tangentem abire censeatur, cum binae intersectiones M et m in unum punctum conveniunt. Haec idea non solum cum ea, quam supra dedimus, perfecte congruit, sed etiam eandem regulam pro inveniendis tangentibus suppeditat. Posita abscissa $AP = x$, sit applicata respondens $PM = y$ functio quaecunque ipsius x; tum consideretur recta TMm per punctum quodpiam axis T ducta quaecunque, eritque posita $AT = t$ aequatio pro recta ista hujusmodi $y = n(t + x)$, quae ob y functionem ipsius x, tot habebit radices, quot fuerint intersectiones hujus rectae cum linea curva. Si jam ponamus duas intersectiones in unum punctum coalescere, aequatio $y = n(t + x)$ duas habebit radices aequales; ac propterea per ea, quae in praecedente libro de aequalitate duarum radicum sunt demonstrata, erit aequationem $y = n(t + x)$ differentiando, posita sola quantitate x ejusque functione y variabili, $dy = ndx$, unde fit $n = \frac{dy}{dx}$. Qui valor si loco n in illa aequatione substituatur, erit $y = \frac{(t+x)\,dy}{dx}$ et $(t + x) = PT = \frac{y\,dx}{dy}$, quae est eadem expressio, quam supra pro subtangente PT invenimus.

18. Patet ergo ex hoc consensu, si elementum lineae curvae, quod etiamsi sit infinite parvum, tamen determinata directione non caret, utrinque producatur in directum, lineam rectam hoc modo oriundam fore tangentem lineae curvae in eo elemento. Quamobrem perpetuo positio lineae tangentis ex directione elementi curvae, quae per minimum triangulum Mnm (Fig. 6) determinatur, recte definietur. Cum igitur hoc praestiterimus, quando natura curvae per aequationem inter coordinatas orthogonales definitur, superest, ut quoque alios modos naturam curvarum exprimendi perpendamus, et quemadmodum lineae tangentes inveniri queant, ostendamus. Cognita autem tangente, simul omnes aliae lineae, quarum positio ab ea pendet, cujusmodi sunt normales in curvam, aliaeque lineae ad curvam utcunque inclinatae, facillime innotescent.

19. Quoniam hactenus applicatas ad axem normales assumsimus, faciant nunc applicatae MP cum axe AP angulum quemcunque constantem APM, qui sit $= \zeta$; voceturque abscissa $AP = x$, applicata $PM = y$. Sumatur jam alia abscissa aliquanto major $Ap = x + \Delta x$, sitque respondens applicata $pm = y + \Delta y$. Ducta ergo linea Mn axi parallela, erit $Mn = Pp = \Delta x$, et $mn = \Delta y$, atque triangulum mixtilineum Mnm abibit in rectilineum, si incrementum Δx statuatur infinite parvum. Fiat igitur $\Delta x = dx$ et $\Delta y = dy$, atque in triangulo rectilineo Mnm, ob data $Mn = Pp = dx$, $mn = dy$ et angulum $Mnm = \zeta$, dabitur positio lateris Mm, quae producta praebebit tangentem curvae MT in puncto M, quae si axi in T occurrat, triangula Mnm et TPM erunt similia, unde oritur $mn(dy) : Mn(dx) = PM(y) : PT$, erit ergo intervallum $PT = \frac{y\,dx}{dy}$, sicque innotescit punctum T, per quod si ex M ducatur recta MT, ea futura sit curvae tangens quaesita, unde patet subtangentem PT ab angulo ζ non pendere.

20. Definiri hinc quoque possunt differentialia tam areae quam arcus curvae. Si enim ponatur area $APM = u$, erit area $Apm = u + du$, ideoque du = trapezio $PpmM$, quod cum constet duabus partibus, parallelogrammo scilicet $PpnM$ et triangulo Mnm, erit area parallelogrammi $PpnM = y\,dx \sin\zeta$ et area trianguli $Mnm = \frac{1}{2}\,dx\,dy \sin\zeta$; hincque fit elementum areae $du = y\,dx \sin\zeta + \frac{1}{2}\,dx\,dy \sin\zeta$, quod est differentiale areae completum. In quo cum terminus posterior prae priori evanescat, erit

$du = y\,dx \sin\zeta$. Deinde, si arcus curvae AM ponatur $= s$, erit $Mm = ds$; verum ex trian[gulo] Mnm reperitur

$$Mm = \sqrt{(dx^2 - 2dx\,dy\cos\zeta + dy^2)}, \quad \text{unde erit} \quad ds = \sqrt{(dx^2 - 2dx\,dy\cos\zeta + dy^2)}.$$

Quodsi ergo quantitates assignari possent, quarum differentialia sint

$$y\,dx \sin\zeta \quad \text{et} \quad \sqrt{(dx^2 - 2dx\,dy\cos\zeta + dy^2)},$$

earum altera aream curvae u, altera arcum s esset exhibitura.

21. Ex cognita positione tangentis MT determinari poterit angulus, quem linea utcunque [per] punctum M ducta cum linea curva constituit, quaevis enim linea cum curva eundem angulum [con]stituere censetur, atque cum tangente. Hinc ergo vicissim duci poterit recta MO, quae cum c[urva] in M angulum datum constituat. Sit iste angulus $TMO = \theta$, ac ponatur tantisper ang[ulus] $TMP = Mmn = \varphi$, erit angulus $PMO = \theta - \varphi$, atque ob $APM = \zeta$, erit $AOM = \zeta - \theta + \varphi$. Hinc ob cognitum in triangulo PMO, praeter omnes angulos, latus $PM = y$, erit

$$\sin AOM : PM = \sin PMO : PO, \quad \text{ideoque fiet} \quad PO = \frac{y\sin(\theta-\varphi)}{\sin(\zeta-\theta+\varphi)} = \frac{y\,\mathrm{tang}\,(\theta-\varphi)}{\sin\zeta - \cos\zeta\,\mathrm{tang}\,(\theta-\varphi)}.$$

At est $\mathrm{tang}\,\varphi = \mathrm{tang}\,Mmn = \frac{dx\sin\zeta}{dy - dx\cos\zeta}$, ideoque

$$\mathrm{tang}\,(\theta-\varphi) = \frac{dy\,\mathrm{tang}\,\theta - dx\cos\zeta\,\mathrm{tang}\,\theta - dx\sin\zeta}{dy - dx\cos\zeta + dx\sin\zeta\,\mathrm{tang}\,\theta} = \frac{dy\sin\theta - dx\sin(\zeta+\theta)}{dy\cos\theta - dx\cos(\zeta+\theta)}.$$

Quamobrem reperietur

$$PO = \frac{y\,(dy\sin\theta - dx\sin(\zeta+\theta))}{dy\sin(\zeta-\theta) + dx\sin\theta}.$$

Si ergo linea MO ad curvam debeat esse normalis, ob $\theta = 90^0$, erit $PO = \frac{y\,(dy - dx\cos\zeta)}{-dy\cos\zeta + dx}$, unde [si] normalis MN ad alteram partem applicatae MP cadat, erit

$$PN = \frac{y\,(dx\cos\zeta - dy)}{dx - dy\cos\zeta}.$$

* **Exemplum.** Sit curva AM (Fig. 10) ellipsis, vel alia sectio conica quaecunque, cuju[s] AB diameter et PM applicata alteri diametro conjugatae parallela. Positis ergo $AP = x$, PM [$= y$] et angulo $APM = \zeta$, erit ex natura sectionum conicarum: $yy = 2ax - nxx$. Hinc fit

$$y\,dy = a\,dx - nx\,dx, \quad \text{seu} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a - nx}{y}.$$

Quare erit subtangens

$$PT = \frac{y\,dx}{dy} = \frac{yy}{a - nx}, \quad \text{ideoque} \quad PT = \frac{x\,(2a - nx)}{a - nx}.$$

Sit C centrum sectionis conicae, erit $AC = \frac{a}{n}$, et $AB = \frac{2a}{n}$, ex quibus obtinetur

$$PT = \frac{x\,(AB - x)}{AC - x} = \frac{AP \cdot BP}{CP}, \quad \text{et} \quad CT = \frac{aa}{n\,(a - nx)} = \frac{AC^2}{CP}.$$

Deinde si MN fuerit ad curvam normalis, erit

$$PN = \frac{y(a - nx - y\cos\zeta)}{y - (a - nx)\cos\zeta},$$

us lineae valor erit duplex, prout y significet vel applicatam superiorem PM, vel inferiorem PM'. ia autem inferior superiori est aequalis, pro puncto M' fiet y negativa, eritque ergo pro subnorli puncto M' respondente

$$PN' = \frac{y(a - nx + y\cos\zeta)}{y + (a - nx)\cos\zeta},$$

le in lineis erit

$$PN = \frac{PM(CP.PM - AP.BP\cos\zeta)}{AP.BP - CP.PM\cos\zeta} \quad \text{et} \quad PN' = \frac{PM(CP.PM + AP.BP\cos\zeta)}{AP.BP + CP.PM\cos\zeta}.$$

22. Sit jam (Fig. 15) angulus APM, quem applicata PM cum axe AP constituit, utcunque variabilis, * exprimatur per functionem quampiam abscissae AP, cujus cum quoque applicata PM sit functio, assumta qualibet abscissa AP, tam angulus APM quam longitudo applicatae PM determinabitur, que punctum curvae M innotescet. Sit ergo abscissa $AP = x$, angulus $APM = \varphi$ et applicata $M = y$, atque si tam φ quam y detur per x, hinc facile aequatio pro curva inter coordinatas hogonales eruetur. Nam demissa ex M in axem AP perpendiculari MQ, ponatur $AQ = p$ et $Q = q$, eritque $q = y\sin\varphi$ et $p = x - y\cos\varphi$, unde aequatio inter p et q elicietur, inventa positio tangentis MT sine difficultate definietur. Cum enim sit $QT = \frac{q\,dp}{dq}$, ob $q = y\sin\varphi$, $= dx - dy\cos\varphi + y\,d\varphi\sin\varphi$ et $dq = dy\sin\varphi + y\,d\varphi\cos\varphi$, erit

$$QT = \frac{y\sin\varphi\,(dx - dy\cos\varphi + y\,d\varphi\sin\varphi)}{dy\sin\varphi + y\,d\varphi\cos\varphi}.$$

datur $PQ = y\cos\varphi$ prodibitque intervallum

$$PT = \frac{y(dx\sin\varphi + y\,d\varphi)}{dy\sin\varphi + y\,d\varphi\cos\varphi}.$$

23. Definiamus autem sine subsidio hujus reductionis positionem tangentis MT, ex sola coneratione differentialium. In hunc finem concipiatur applicata proxima pm, ita ut sit

$$Pp = dx, \quad \text{ang.}\, Apm = \varphi + d\varphi \quad \text{et} \quad pm = y + dy.$$

ducantur hae ambae applicatae, donec sibi occurrant in V, et cum in triangulo PVp sit $Pp = dx$, guli $VPp = \varphi$, $VpB = \varphi + d\varphi$, et propterea angulus $V = d\varphi$, fiet

$$\sin d\varphi : dx = \sin(\varphi + d\varphi) : PV = \sin\varphi : pV.$$

are ob $\sin d\varphi = d\varphi$, $\sin(\varphi + d\varphi) = \sin\varphi + d\varphi\cos\varphi$, eo quod $\cos d\varphi = 1$, erit

$$PV = \frac{dx\sin\varphi + dx\,d\varphi\cos\varphi}{d\varphi} \quad \text{et} \quad pV = \frac{dx\sin\varphi}{d\varphi}.$$

cta jam Mn axi AP parallela erit $PV : pV = PM : pn$, hincque

$$pn = \frac{y\,dx\sin\varphi}{dx\sin\varphi + dx\,d\varphi\cos\varphi} = \frac{y\sin\varphi}{\sin\varphi + d\varphi\cos\varphi} = y - \frac{y\,d\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi};$$

nde ob $PV : dx = VM : Mn$ erit $Mn = dx + \frac{y\,d\varphi}{\sin\varphi}$. Est vero $pm = y + dy$, ideoque erit

$$mn = dy + \frac{y\,d\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

triangula Mmn et TMP sunt inter se similia, quia discrimen inter triangula TMP et Tmp infinite parvum, seu nullum; hincque erit

$$mn : Mn = PM : PT$$

$$dy + \frac{y\,d\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi} : dx + \frac{y\,d\varphi}{\sin\varphi} = y : \frac{y\,(dx\sin\varphi + y\,d\varphi)}{dy\sin\varphi + y\,d\varphi\cos\varphi},$$

quae congruit cum expressione ante inventa.

24. Ex hoc ratiocinio intelligitur quantitates infinite parvas prae finitis non semper abjici licere; quanquam enim inveneramus $PV = \frac{dx}{d\varphi}(\sin\varphi + d\varphi\cos\varphi)$, tamen in altero factore $\sin\varphi + d\varphi\cos\varphi$ posterius membrum prae priori perperam negligeretur. Negligi quidem sine errore posset, si lineae PV quantitas absoluta quaereretur. At cum differentia inter eam et lineam pV in computum sit ducenda, ob $pV = \frac{dx\sin\varphi}{d\varphi}$, si idem valor pro PV quoque assumeretur, differentia prodiret nulla, neque propterea cum differentiali Pp comparari posset. Hinc ergo simul perspicitur, quibus casibus differentialia prae finitis quantitatibus rejicere liceat; hoc scilicet fieri potest, si valor absolutus quantitatis cujuspiam finitae investigatur. Verum si quantitas ejusmodi sit definienda, cujus deinde discrimen ab alia finita sibi aequali considerari debeat, isthac rejectione uti non licebit. Non magis enim pro valore lineae VP accipi potest $\frac{dx\sin\varphi}{d\varphi}$, cum sit revera $\frac{dx\sin\varphi}{d\varphi} + \frac{dx\,d\varphi\cos\varphi}{d\varphi}$, quam pro $Ap = x + dx$ valor x. Quoniam enim comparatio inter infinite parva est instituenda, etsi ea revera sint nulla, tamen suis debitis expressionibus designari debent, ut comparatio institui possit. Contra vero in determinando valore lineolae Mn pro PV recte adhibitus est valor $\frac{dx\sin\varphi}{d\varphi}$, quia nusquam differentia inter eam et aliam sibi aequalem in computum ingreditur.

25. Cum in triangulo Mnm sit $Mn = dx + \frac{y\,d\varphi}{\sin\varphi}$ et $mn = dy + \frac{y\,d\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi}$ atque ang. $Mnm = \varphi$, erit area hujus trianguli

$$= \frac{1}{2} Mn \,.\, mn \sin\varphi = \frac{(dx\sin\varphi + y\,d\varphi)\,(dy\sin\varphi + y\,d\varphi\cos\varphi)}{2\sin\varphi},$$

quae quia est differentialis secundi ordinis, prae differentialibus primi ordinis evanescit. Quare si hujus curvae area APM ponatur $= u$, erit

$$du = \text{trapezio } PMnp = \frac{1}{2}(Pp + Mn)\,MQ,$$

unde erit

$$du = y\,dx\sin\varphi + \frac{1}{2}yy\,d\varphi.$$

Si porro arcus curvae AM dicatur $= s$, erit $ds = Mm$, cujus valor ex triangulo Mnm reperitur

$$= \sqrt{(Mn^2 - 2Mn.mn.\cos\varphi + mn^2)} = \sqrt{(dx^2 - 2dx\,dy\cos\varphi + dy^2 + 2y\,dx\,d\varphi\sin\varphi + y^2\,d\varphi^2)} = ds.$$

Definiamus nunc quoque normalem MN in curvam, quae ex coordinatis superioribus $AQ = p$, $QM = q$, ita est assignata ut sit

$$QN = \frac{q\,dq}{dp} = \frac{y\sin\varphi\,(dy\sin\varphi + y\,d\varphi\cos\varphi)}{dx - dy\cos\varphi + y\,d\varphi\sin\varphi},$$

qui valor a $PQ = y\cos\varphi$ subtractus relinquit:

$$PN = \frac{y\,(dx\cos\varphi - dy)}{dx - dy\cos\varphi + y\,d\varphi\sin\varphi}.$$

26. Denique notari meretur pro quavis abscissa punctum V, ex quo applicatae divergunt; erit autem

$$PV = \frac{dx\sin\varphi}{d\varphi} \quad \text{et recta} \quad MV = y + \frac{dx\sin\varphi}{d\varphi}.$$

Ad hoc punctum alio modo determinandum demittatur ex eo in axem perpendiculum VX, eritque ob $PV = \frac{-dx \sin\varphi}{d\varphi}$ et $VPX = \varphi$, $VX = \frac{dx \sin^2\varphi}{d\varphi}$ et $PX = \frac{dx \sin\varphi \cos\varphi}{d\varphi}$, unde fit $AX = x + \frac{dx \sin\varphi \cos\varphi}{d\varphi}$. Cognito autem puncto hoc V, subtangens PT ita definietur, ut sit $PT = \frac{y.MV.d\varphi}{dy \sin\varphi + y\,d\varphi \cos\varphi}$. Hinc apparet, si fuerit $x = a + \frac{b \cos\varphi}{\sin\varphi}$, ob $dx = -\frac{b\,d\varphi}{\sin^2\varphi}$, fore $VX = -b$ et $AX = a$, ita ut hoc casu omnes applicatae se mutuo constanter in eodem puncto V decussent. Quod idem quoque hinc intelligitur, si ob punctum V constans ponatur $AX = a$ et $VX = -b$, erit enim $PV = -\frac{b}{\sin\varphi}$ et $PX = -\frac{b \cos\varphi}{\sin\varphi}$; ideoque $AP = x = a + \frac{b \cos\varphi}{\sin\varphi}$, uti ante assumseramus.

27. Cum relatio inter abscissam $AP = x$ et angulum $APM = \varphi$ data ponatur, ex ea cognoscetur pro quavis abscissa $AP = x$ (Fig. 16) punctum V, quia est $PV = \frac{dx \sin\varphi}{d\varphi}$, hincque tangentis TM positio ita simplicius exprimitur, ut sit $PT = \frac{MV.y\,d\varphi}{dy \sin\varphi + y\,d\varphi \cos\varphi}$. Ponamus nunc applicatam $PM = y$ perpetuo esse constantis magnitudinis, ex qua hypothesi conchois vulgaris resultat, si punctum V statuatur fixum. Quamvis autem hoc punctum V utcunque sit variabile, dummodo sit $PM = y = c$, tamen tangens expedite determinatur; nam ob $dy = 0$, erit $PT = \frac{MV}{\cos\varphi}$. Ducatur ergo ad MV normalis MS, et per V axi AP parallela VS, illi MS occurrens in S, erit $VS = \frac{MV}{\cos\varphi}$, quare si ex S rectae VM parallela agatur ST, fiet $PT = \frac{MV}{\cos\varphi}$, atque recta MT curvam in puncto M tanget. Hinc si punctum V praeterea statuatur fixum, tangens conchoidis facillime invenitur. *

28. Si natura curvae exprimatur aequatione inter rectam CM (Fig. 17) ex puncto quodam fixo C ad curvam ductam, et angulum ACM, quem ista recta CM cum recta data CA pro axe assumta constituit, hic casus quidem in praecedente continebitur; verum quia saepissime natura curvarum hoc modo exhiberi solet, methodum ducendi tangentes hic seorsim trademus. Sit igitur recta $CM = y$ et angulus $ACM = \varphi$; concipiatur ducta proxima Cm, erit $Cm = y + dy$ et $ACm = \varphi + d\varphi$, ideoque angulus $MCm = d\varphi$. Centro C radio CM describatur arculus Mn, qui cum sit infinite parvus, pro lineola recta haberi poterit, quae simul in Cm erit perpendicularis. Erit ergo $mn = dy$, et cum sit $\frac{Mn}{CM} = d\varphi$, erit $Mn = y\,d\varphi$, atque triangulum Mnm erit rectilineum simulque ad n rectangulum, cujus hypotenusa Mm producta dabit positionem tangentis MT. *

29. Demittatur nunc ex C in tangentem MT perpendiculum CP, et si triangula CmP, Mmn inter se comparentur, ea similia deprehendentur, propterea quod ambo sunt rectangula et angulum ad m communem habent. Quia vero triangulum CMP a triangulo CmP infinite parum tantum, hoc est nihil differt, triangulum quoque CMP simile erit triangulo Mnm. Cum igitur in triangulo Mmn sit $Mm = \sqrt{(dy^2 + y^2 d\varphi^2)}$, erit $Mm : CM = Mn : CP = mn : MP$ ideoque

$$CP = \frac{yy\,d\varphi}{\sqrt{(dy^2 + y^2 d\varphi^2)}} \quad \text{et} \quad MP = \frac{y\,dy}{\sqrt{(dy^2 + y^2 d\varphi^2)}}.$$

Si ergo super CM tanquam diametro describatur semicirculus, in eoque ex M corda applicetur

$$MP = \frac{y\,dy}{\sqrt{(dy^2 + y^2 d\varphi^2)}},$$

dabit ea tangentem curvae in puncto M.

*

30. Alio autem modo facilius punctum T in axe inveniri potest, per quod tangens MT transeat. In hunc finem ducatur per M recta Mt axi parallela, atque ob angulum $CMt = \varphi$, et $Mtm = \varphi + d\varphi$ in triangulo CMt erit

$$\sin Mtm \quad : CM = \sin MCt : \quad Mt \quad = \sin CMt : \quad Ct$$

$$\sin\varphi + d\varphi\cos\varphi : \; y = d\varphi \quad : \frac{y\,d\varphi}{\sin\varphi + d\varphi\cos\varphi} = \quad \sin\varphi : \frac{y\sin\varphi}{\sin\varphi + d\varphi\cos\varphi}$$

Erit ergo $Mt = \frac{y\,d\varphi}{\sin\varphi + d\varphi\cos\varphi} = \frac{y\,d\varphi}{\sin\varphi}$; quia enim differentia lineolae Mt ab alia sibi aequali nusquam in computum venit, in denominatore terminum $d\varphi\cos\varphi$ prae $\sin\varphi$ tuto rejicimus. At cum Ct subtrahere debeamus ab Cm, et differentia haec ipsa sit infinite parva, praecedentem omissionem facere non licet, eritque $Ct = \frac{y\sin\varphi}{\sin\varphi + d\varphi\cos\varphi} = y - \frac{y\,d\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi}$. Quare cum sit

$$Cm = y + dy, \text{ fiet } mt = dy + \frac{y\,d\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Nunc igitur triangula mtM et MCT similia dabunt $mt : Mt = MC : CT$, unde obtinetur

$$CT = \frac{yy\,d\varphi}{dy\sin\varphi + y\,d\varphi\cos\varphi}.$$

* 31. Exprimatur nunc (Fig. 18) natura curvae BM aequatione inter rectam CM, ex puncto quodam fixo C ad curvam ductam, et portionem rectae AP positione datae, quae a recta illa CM abscinditur. Consideratur scilicet haec recta AP instar axis, in quo punctum A, ubi recta CA ad axem est normalis, pro initio assumatur, voceturque $AP = x$ et $CM = y$. Ducatur recta Cm ipsi CM proxima, eritque $Ap = x + dx$, ideoque $Pp = dx$ et $Cm = y + dy$. Jam ex triangulo CAP rectangulo, posito $CA = a$, erit $CP = \sqrt{(aa + xx)}$, et ex natura differentialium

$$Cp = \sqrt{(aa + xx)} + \frac{x\,dx}{\sqrt{(aa + xx)}}.$$

Hinc ducta Mn axi parallela, ob triangula CPp et CMn similia, erit $CP : CM = Pp : Mn = Cp : Cn$, unde fit
$$Mn = \frac{y\,dx}{\sqrt{(aa + xx)}} \quad \text{et} \quad Cn = y + \frac{yx\,dx}{aa + xx}.$$

Hanc ob rem erit $mn = dy - \frac{yx\,dx}{aa + xx}$. Cum nunc ducta tangente MT triangulum pmT ideoque et PMT simile sit triangulo nmM, erit $mn : Mn = PM : PT$, ideoque

$$PT = \frac{(y - \sqrt{(aa + xx)})\,y\,dx}{dy\sqrt{(aa + xx)} - \frac{yx\,dx}{\sqrt{(aa + xx)}}}.$$

32. Ponatur $PM = z$, dataque sit aequatio inter x et z, unde aeque ac in casu praecedente curva cognoscetur et construetur. Erit ergo $y = z + \sqrt{(aa + xx)}$ et $dy = dz + \frac{x\,dx}{\sqrt{(aa + xx)}}$, quibus valoribus substitutis obtinebitur $PT = \frac{z\,dx\,(z + \sqrt{(aa + xx)})}{dz\sqrt{(aa + xx)} - zx\,dx : \sqrt{(aa + xx)}}$. Si statuatur z constans sive affirmativa, sive negativa, curva erit conchois vel exterior, vel interior; hocque casu si ponatur $z = c$ ob $dz = 0$, fiet $PT = \frac{c(c + \sqrt{(aa + xx)})}{-cx : \sqrt{(aa + xx)}} = \frac{-c\sqrt{(aa + xx)} - aa - xx}{x}$, seu erit $PT = -\frac{CM \cdot CP}{AP}$, ita ut sit $AP : CP = CM : -PT$, unde pro tangente conchoidis invenienda eadem oritur constructio quam jam ante dedimus.

* 33. Referatur nunc (Fig. 19) proposita curva EM ita ad duo puncta fixa A et B ceu polos, ut inde ad quodvis curvae punctum M ductis rectis AM et BM relatio inter istas rectas exprimatur aequatione

quacunque. Sit igitur $AM = x$, $BM = y$, et concipiatur punctum m ipsi M proximum, ad quod ductis rectis Am et Bm erit $Am = x + dx$ et $Bm = y + dy$. Tum centris A et B descriptis arculis Ma, Mb, qui cum sint infinite parvi, pro lineolis rectis in Am et Bm normalibus haberi poterunt, erit $ma = dx$ et $mb = dy$; sicque super communi hypotenusa Mm duo habebuntur triangula rectangula Mam et Mbm. Jam ex quovis tangentis puncto T demittantur in AM et BM perpendicula TP et TQ, quae cum quoque in Am et Bm futura sint normalia, erunt triangula Tpm seu TPM et Mam, itemque triangula Tqm seu TQM et Mbm inter se similia, ideoque $Mm : MT = ma : MP = mb : MQ$, unde erit $MP : MQ = ma : mb = dx : dy$. Cum igitur ex aequatione inter x et y detur ratio $dx : dy$, in eadem ratione capiantur intervalla MP et MQ; quo facto, ex punctis P et Q ad AM et BM normaliter ducantur PT et QT, sese in puncto T intersecantes, eritque recta MT curvae tangens in puncto M.

34. Quantitas autem elementi curvae Mm sequenti modo determinabitur: Sit angulus AMB seu $AmB = \varphi$, qui ex distantia punctorum AB dabitur; si enim ponatur haec distantia

$$AB = a, \quad \text{erit} \quad \cos\varphi = \frac{xx + yy - aa}{2xy}.$$

Tum juncta ab ob angulum $amb = \varphi$, erit $ab = \sqrt{(dx^2 + dy^2 - 2dxdy\cos\varphi)}$. Describatur nunc (Fig. 20) super diametro Mm semicirculus, erunt puncta a et b in ejus peripheria, et in cordam ab ex centro c demittatur perpendiculum cd, erit ang. $acd = amb = \varphi$, ideoque $\frac{ad}{ac} = \frac{ab}{Mm} = \sin\varphi$; hinc erit $Mm = \frac{ab}{\sin\varphi}$. Quare habebitur elementum curvae (Fig. 19) $Mm = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2 - 2dxdy\cos\varphi)}}{\sin\varphi}$. *

35. Invento elemento $Mm = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2 - 2dxdy\cos\varphi)}}{\sin\varphi}$, reperietur $Ma = \frac{dx\cos\varphi - dy}{\sin\varphi}$ et $Mb = \frac{dx - dy\cos\varphi}{\sin\varphi}$, qui iidem valores geometrice quoque inveniuntur, si ex a in Bm, item ex b in Am demittantur perpendicula puta $a\alpha$ et $b\beta$, quae quidem in figura non sunt expressa. Erit autem

$$m\alpha = dx\cos\varphi \quad \text{et} \quad b\alpha = dx\cos\varphi - dy \quad \text{atque} \quad \frac{b\alpha}{Ma} = \sin\varphi,$$

similique modo erit $m\beta = dy\cos\varphi$ et $a\beta = dx - dy\cos\varphi$ atque $\frac{a\beta}{Mb} = \sin\varphi$. Jam ob triangula MPT et maM similia, si MP pro lubitu capiatur, atque ex P ad AM normalis usque ad tangentem MT ducatur, erit $ma : Ma = MP : PT$, ideoque $PT = MP \cdot \frac{dx\cos\varphi - dy}{dx\sin\varphi}$. Hinc ergo angulus AMT cognoscitur, quippe cujus tangens $= \frac{dx\cos\varphi - dy}{dx\sin\varphi}$; similique modo anguli BMT tangens erit $= \frac{dx - dy\cos\varphi}{dy\sin\varphi}$. Bisecetur angulus AMB recta MC, et cum sit angulus $AMC = \frac{1}{2}\varphi$, erit

$$\operatorname{tang} CMT = \frac{(dx - dy)\cos\frac{1}{2}\varphi}{(dx + dy)\sin\frac{1}{2}\varphi}, \quad \text{seu} \quad \operatorname{tang} CMT \cdot \operatorname{tang} AMC = \frac{dx - dy}{dx + dy}.$$

Quia vero est $\cos\varphi = \frac{xx + yy - aa}{2xy}$, erit $\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi} = \sqrt{\frac{(x + y + a)(x + y - a)}{(a - x + y)(a + x - y)}}$, ideoque

$$\operatorname{tang} CMT = \frac{dx - dy}{dx + dy}\sqrt{\frac{(x + y + a)(x + y - a)}{(a - x + y)(a + x - y)}}.$$

Exemplum 1. Sit $mx + ny = b$, erit curva, si $m = \pm n$, sectio conica circa focos A et B descripta; in genere ergo cum sit $mdx + ndy = 0$, fiet $dx : dy = n : -m$. Quare sumtis in rectis AM, BM portionibus $MP : MQ = n : -m$, concursus normalium PT, QT in puncto T dabit tangentem. Quod si autem angulus AMB ponatur $= \varphi$, erit

$$\operatorname{tang} AMT = \frac{n \cos \varphi + m}{n \sin \varphi} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} BMT = \frac{-n - m \cos \varphi}{m \sin \varphi}.$$

Ducta vero recta MC angulum AMB bisecante, erit $\operatorname{tang} CMT = \frac{(m+n) \cos \frac{1}{2} \varphi}{(n-m) \sin \frac{1}{2} \varphi}$; unde patet si $m = n$, quod fit in ellipsi, angulum CMT esse rectum; sin autem $m = -n$, quod fit in hyperbola, tangens MT angulum AMB bisecabit, uti ex elementis constat.

Exemplum 2. Sit $mxx + nyy = bb$, erit $mxdx + nydy = 0$, ideoque $dx : dy = ny : -mx$; unde si capiatur $MP : MQ = n . BM : -m . AM$, concursus perpendiculorum in T determinabit positionem tangentis MT. Posito autem angulo $AMB = \varphi$, qui ex aequatione $\cos \varphi = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2xy}$ datur, erit $\operatorname{tang} AMT = \frac{ny \cos \varphi + mx}{ny \sin \varphi}$ et $\operatorname{tang} BMT = \frac{-ny - mx \cos \varphi}{mx \sin \varphi}$. Dicatur ang $AMT = \theta$, ut sit $\operatorname{tang} \theta = \frac{ny \cos \varphi + mx}{ny \sin \varphi}$, et angulus $BAM = p$, ut sit $\cos p = \frac{a^2 + x^2 - y^2}{2ax}$, atque concipiatur recta CM ad tangentem MT normalis, erit angulus $AMC = 90^0 - \theta$ et $BCM = 90^0 - \theta + p$. Hinc erit $\sin BCM : AM = \sin AMC : AC$, seu $AC = \frac{x \cos \theta}{\cos (\theta - p)} = \frac{x}{\cos p + \sin p \operatorname{tang} \theta}$. At est $\sin \varphi : \sin p = a : y$, ideoque $\sin p = \frac{y \sin \varphi}{a}$, unde fit $\sin p \operatorname{tang} \theta = \frac{ny \cos \varphi + mx}{na} = \frac{mx}{na} + \frac{xx + yy - aa}{2ax}$; hincque porro $\cos p + \sin p \operatorname{tang} \theta = \frac{mx}{na} + \frac{x}{a} = \frac{(m+n)x}{na}$. Ex quibus efficitur $AC = \frac{na}{m+n}$ et $BC = \frac{ma}{m+n}$. Punctum ergo C in recta AB erit fixum, ex quo cum omnes rectae ad curvam ductae in eam simul sint normales, manifestum est hanc curvam esse circulum centro C descriptum; quod idem ex elementis facile demonstratur. Radius ergo hujus circuli erit recta CM, cujus longitudo reperitur ex analogia hac:

$$\sin AMC : AC = \sin p : MC, \quad \text{unde fit} \quad MC = \frac{na \sin p}{(m+n) \cos \theta} = \frac{ny \sin \varphi}{(m+n) \cos \theta}.$$

Est vero

$$\cos \theta = \frac{ny \sin \varphi}{\sqrt{(m^2 x^2 + n^2 y^2 + 2mnxy \cos \varphi)}}, \text{ seu } \cos \theta = \frac{ny \sin \varphi}{\sqrt{(m(m+n)xx + n(m+n)yy - mnaa)}} = \frac{ny \sin \varphi}{\sqrt{((m+n)bb - mnaa)}}$$

ergo erit radius

$$CM = \frac{\sqrt{((m+n)bb - mnaa)}}{m+n}.$$

Denique cum sit $dx : dy = ny : -mx$, erit elementum curvae

$$Mm = \frac{dx \sqrt{(n^2 y^2 + m^2 x^2 + 2mnxy \cos \varphi)}}{ny \sin \varphi} = \frac{dx \sqrt{((m+n)bb - mnaa)}}{ny \sin \varphi},$$

est vero

$$y \sin \varphi = \frac{\sqrt{(2(m+n)bbxx - 2n(m-n)aaxx - (bb - naa)^2 - (m+n)^2 x^4)}}{2nx}.$$

36. Referatur nunc quidem, ut ante, curva ad duos polos fixos A et B, quorum distantia sit $AB = a$; verum detur relatio inter angulos $BAM = p$ et $ABM = q$. Hinc angulus AMB, quem ante vocavimus φ, nunc erit $= 180^0 - p - q$, ita ut sit

$$\sin \varphi = \sin (p+q) \quad \text{et} \quad \cos \varphi = -\cos (p+q).$$

Ex triangulo ergo AMB erit

$$AM = x = \frac{a \sin q}{\sin (p+q)} \quad \text{et} \quad BM = y = \frac{a \sin p}{\sin (p+q)}.$$

Hinc erit

$$\frac{dx}{a}=\frac{dq\sin p-dp\sin q\cos(p+q)}{\sin^2(p+q)} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{a}=\frac{dp\sin q-dq\sin p\cos(p+q)}{\sin^2(p+q)},$$

qui valores in formulis supra inventis substituti dabunt

$$\operatorname{tang} AMT=\frac{dp}{(dp+dq)\cot(p+q)-dq\cot q}, \quad \operatorname{tang} BMT=\frac{dq}{dp\cot p-(dp+dq)\cot(p+q)}.$$

Quodsi autem tangens MT eousque producatur, donec cum AB producta concurrat, atque angulus iste ponatur $=t$, reperietur

$$\operatorname{tang} t=\frac{dq\sin^2 p+dp\sin^2 q}{dq\sin p\cos p-dp\sin q\cos q}.$$

Ex hoc angulo t vicissim relatio inter incrementa angulorum p et q cognoscetur, erit enim

$$dp:dq=\sin p\sin(t-p):\sin q\sin(t+q).$$

At elementum curvae, si in superiori expressione loco dx et dy valores hic inventi substituantur, reperietur

$$Mm=\frac{a\sqrt{(dp^2\sin^2 q+dq^2\sin^2 p-2dp\,dq\sin p\sin q\cos(p+q))}}{\sin^2(p+q)}.$$

Sin autem angulus AMB recta MC bisecetur, erit

$$\operatorname{tang} CMT=\frac{dq\sin p-dp\sin q}{dq\sin p+dp\sin q}\cot.\tfrac{1}{2}(p+q).$$

Exemplum. Sit summa angulorum p et q perpetuo eadem, puta $p+q=\theta$, seu $q=\theta-p$, erit

$$\operatorname{tang} AMT=\frac{1}{\cot(\theta-p)}=\operatorname{tang} q;$$

ideoque ang. $AMT=$ ang. ABM et ang. $t=p-q$, quae cum sit proprietas circuli, manifestum est curvam esse circulum per puncta ambo A et B transeuntem, quippe quae circuli proprietas ex elementis constat.

Caput III.

De tangentibus linearum curvarum, quae per alias lineas curvas utcunque determinantur.

1. Curvas, quarum tangentes in capite praecedente invenire docuimus, vel per coordinatas, sive orthogonales sive obliquangulas, vel per alias lineas rectas, utcunque ductas determinatas assumsimus, ita ut in determinationem illarum curvarum solae lineae rectae exclusis curvis ingrederentur. Cum autem saepenumero constructio linearum curvarum jam alias lineas curvas requirat, in hoc capite methodum trademus earum quoque linearum curvarum tangentes inveniendi, quarum natura per alias lineas curvas determinatur: quod cum innumerabilibus modis fieri possit, hic tantum praecipuos commemorabimus, quibus tam plerarumque linearum adhuc tractatarum proprietates continentur, quam simul via aperiatur ad alias quasvis determinationum rationes enodandas.

2. Sit igitur (Fig. 21) data curva quaecunque AL ad axem AP applicatis LP sive normalibus sive ad datum angulum inclinatis relata. Ex hac autem curva ita generetur alia AM, ut ejus applicatae PM ad illius curvae applicatas PL datam teneant rationem, siquidem ad eandem abscissam AP referantur. Si jam ponamus curvae datae AL tangentes LT in quovis puncto L esse cognitas, hinc positionem *