$$\frac{dx}{a}=\frac{dq\sin p-dp\sin q\cos(p+q)}{\sin^2(p+q)} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{a}=\frac{dp\sin q-dq\sin p\cos(p+q)}{\sin^2(p+q)},$$

qui valores in formulis supra inventis substituti dabunt

$$\operatorname{tang} AMT=\frac{dp}{(dp+dq)\cot(p+q)-dq\cot q}, \quad \operatorname{tang} BMT=\frac{dq}{dp\cot p-(dp+dq)\cot(p+q)}.$$

Quodsi autem tangens MT eousque producatur, donec cum AB producta concurrat, atque angulus iste ponatur $=t$, reperietur

$$\operatorname{tang} t=\frac{dq\sin^2 p+dp\sin^2 q}{dq\sin p\cos p-dp\sin q\cos q}.$$

Ex hoc angulo t vicissim relatio inter incrementa angulorum p et q cognoscetur, erit enim

$$dp:dq=\sin p\sin(t-p):\sin q\sin(t+q).$$

At elementum curvae, si in superiori expressione loco dx et dy valores hic inventi substituantur, reperietur

$$Mm=\frac{a\sqrt{(dp^2\sin^2 q+dq^2\sin^2 p-2dp\,dq\sin p\sin q\cos(p+q))}}{\sin^2(p+q)}.$$

Sin autem angulus AMB recta MC bisecetur, erit

$$\operatorname{tang} CMT=\frac{dq\sin p-dp\sin q}{dq\sin p+dp\sin q}\cot.\tfrac{1}{2}(p+q).$$

Exemplum. Sit summa angulorum p et q perpetuo eadem, puta $p+q=\theta$, seu $q=\theta-p$, erit

$$\operatorname{tang} AMT=\frac{1}{\cot(\theta-p)}=\operatorname{tang} q;$$

ideoque ang. $AMT=$ ang. ABM et ang. $t=p-q$, quae cum sit proprietas circuli, manifestum est curvam esse circulum per puncta ambo A et B transeuntem, quippe quae circuli proprietas ex elementis constat.

Caput III.

De tangentibus linearum curvarum, quae per alias lineas curvas utcunque determinantur.

1. Curvas, quarum tangentes in capite praecedente invenire docuimus, vel per coordinatas, sive orthogonales sive obliquangulas, vel per alias lineas rectas, utcunque ductas determinatas assumsimus, ita ut in determinationem illarum curvarum solae lineae rectae exclusis curvis ingrederentur. Cum autem saepenumero constructio linearum curvarum jam alias lineas curvas requirat, in hoc capite methodum trademus earum quoque linearum curvarum tangentes inveniendi, quarum natura per alias lineas curvas determinatur: quod cum innumerabilibus modis fieri possit, hic tantum praecipuos commemorabimus, quibus tam plerarumque linearum adhuc tractatarum proprietates continentur, quam simul via aperiatur ad alias quasvis determinationum rationes enodandas.

2. Sit igitur (Fig. 21) data curva quaecunque AL ad axem AP applicatis LP sive normalibus sive ad datum angulum inclinatis relata. Ex hac autem curva ita generetur alia AM, ut ejus applicatae PM ad illius curvae applicatas PL datam teneant rationem, siquidem ad eandem abscissam AP referantur. Si jam ponamus curvae datae AL tangentes LT in quovis puncto L esse cognitas, hinc positionem *

tangentium alterius curvae genitae AM investigemus. Ponamus igitur abscissam $AP = x$, quae utrique curvae est communis, applicatam curvae datae $PL = u$, ejus subtangentem $PT = t$, erit sive applicatae sint normales sive ad datum angulum inclinatae, $t = \frac{udx}{du}$. Pro curva autem genita AM vocetur applicata $PM = y$; et quia ratio $PM : PL$ est constans, sit ea $= n : 1$ eritque $y = nu$, unde, quicunque valor numero n tribuatur, ex curva data AL altera curva genita AM facile construitur.

3. Cum igitur sit $y = nu$, erit $dy = ndu$, ideoque elementa applicatarum mn et lk inter se eandem tenent rationem, quam ipsae applicatae. Subtangens itaque curvae genitae AM, quae est $= \frac{ydx}{dy}$, ob $y = nu$ et $dy = ndu$, abit in $\frac{udx}{du} = t$, unde patet utramque curvam AL et AM communem habere subtangentem PT, pro eadem abscissa AP, atque tangentes in L et M axi in eodem puncto T occurrere. Cum igitur curvae AM subtangens $PT = \frac{udx}{du}$ non a ratione n pendeat, si ex curva AL infinitae hujusmodi curvae AM concipiantur genitae, omnes pro eadem abscissa AP eandem habebunt subtangentem. Si curva AL fuerit semicirculus, curvae hoc modo genitae erunt semi-ellipses super eodem axe descriptae, quae igitur omnes eandem habebunt subtangentem, uti constat.

4. Curvae autem datae erit subnormalis $PK = \frac{udu}{dx}$, curvae genitae autem subnormalis erit $PN = \frac{ydy}{dx}$. Cum igitur sit $y = nu$, erit $PN = \frac{nnudu}{dx}$, seu erit $PN : PK = nn : 1 = PM^2 : PL^2$, subnormales ergo multo magis sunt inaequales quam applicatae PM et PL. Porro cum areae APL elementum sit $= udx$, et areae APM elementum $= ydx = nudx$, haec elementa arearum eandem inter se rationem tenent, quam ipsae applicatae, quae quia est constans, areae quoque ipsae eandem inter se rationem habebunt, eritque area APM : aream $APL = n : 1$. Quare si curvae datae area APL assignari poterit, curvae quoque genitae APM area habebitur. Hinc si area circuli exhiberi posset, omniumque quoque ellipsium areae forent cognitae: Secus vero est comparata ratio arcuum AL et AM, illius enim si applicatae sint orthogonales, elementum est $Ll = \sqrt{(dx^2 + du^2)}$, hujus vero $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dx^2 + nndu^2)}$, cujus ad illud ratio non est constans, neque ideo ex rectificatione curvae AL rectificatio curvae AM cognoscitur.

5. Ex his jam facile perspicitur, quemadmodum curvae genitae AM tangens MT inveniri debeat, si applicata $PM = y$ rationem quamcunque variabilem ad applicatam $PL = u$ habeat, seu si y fuerit functio quaecunque non solum ipsius u, sed etiam ipsarum x et u conjunctim. Sit enim differentiali sumto $dy = Pdx + Qdu$, erit curvae genitae AM subtangens $= \frac{ydx}{Pdx + Qdu}$, et subnormalis $= \frac{y(Pdx + Qdu)}{dx}$. At si curvae datae AL ponatur subtangens $\frac{udx}{du} = t$, ut sit $dx : du = t : u$, per quantitates finitas reperietur curvae genitae AM subtangens $AT = \frac{ty}{Pt + Qu}$, et subnormalis $PN = Py + \frac{Quy}{t}$. Ex quibus formulis saepe concinnae constructiones elici possunt: ita si fuerit $yy = aa + uu$, ideoque $ydy = udu$ et $\frac{ydy}{dx} = \frac{udu}{dx}$, curva data AL et genita AM communem habebunt subnormalem.

6. Neque etiam inventio tangentis fit difficilior, si (Fig. 22) ipse arcus AL curvae datae in expressionem applicatae PM ingrediatur. Ponamus curvam AM ex curva data AL ita formari, ut perpetuo sit applicata $PM = PL +$ arcu AL. Sic autem curva AM erit cyclois, si pro curva data AL accipiatur circulus centrum in axe AP habens. Sit vero curva AL quaecunque, ac ponatur abscissa ejus $AP = x$, applicata $PL = u$ et arcus $AL = s$, erit ejus elementum $ds = \sqrt{(dx^2 + du^2)}$, siquidem applicatae statuantur ad axem AP perpendiculares. Atque si hujus curvae normalis ducatur LJ, erit

$$PJ = \frac{u\,du}{dx} \quad \text{et} \quad LJ = \frac{u\sqrt{(dx^2+du^2)}}{dx} = \frac{u\,ds}{dx}.$$

Ex A erigatur ad axem normalis AQ, ducaturque $LQ = AP = x$, erit $AQ = u$, cui tangens LR occurrat in R, erit ob similitudinem triangulorum LPJ et LQR, $QR = \frac{x\,du}{dx}$ et $LR = \frac{x\,ds}{dx}$, unde relatio differentialium dx, du et ds per lineas finitas LP, PJ, LJ seu LQ, QR, LR exprimetur.

7. Cum jam ponamus esse $PM = PL + AL = u + s$, quoniam et curvae genitae abscissa est $AP = x$, ponatur ejus applicata $PM = y$, eritque $y = u + s$ et $dy = du + ds$. Ducta itaque tangente MT, erit subtangens $PT = \frac{y\,dx}{dy} = \frac{y\,dx}{du + ds}$. Cum autem differentialibus dx, du, ds sint proportionales rectae LQ, QR, LR, erit $PT = \frac{PM \cdot LQ}{QR + LR}$. Jungatur ergo ipsi QR in directum $RS = LR$, ut sit $QS = QR + LR$, erit $PT = \frac{PM \cdot LQ}{QS}$, seu $QS : LQ = PM : PT$, unde patet triangula SQL et MPT esse similia, ideoque tangentem MT rectae LS parallelam. Si curva AL sit circulus, erit $RA = LR$, ac recta LS fiet corda LA, cui igitur tangens cycloidis MT erit parallela, uti constat.

8. Inventa positione tangentis MT sponte se offert positio normalis MN; interim tamen immediate satis succincte exhiberi potest. Cum enim sit subnormalis $= \frac{y\,dy}{dx}$, erit

$$\operatorname{tang} PMN = \frac{dy}{dx} = \frac{du + ds}{dx}.$$

Differentialibus autem dx, du, ds proportionales sunt rectae LP, PJ, LJ, quibus loco differentialium substitutis erit

$$\operatorname{tang} PMN = \frac{PJ + LJ}{LP}.$$

Sumatur ergo in axe $JK = LJ$, erit $PK = PJ + LJ$, et jungatur LK, eritque

$$\operatorname{tang} PMN = \frac{PK}{LP} = \operatorname{tang} PLK.$$

Prodit ergo angulus $PMN = \text{ang}.\, PLK$, ideoque normalis MN parallela est rectae LK. Quodsi ergo curva AL fuerit circulus, erit J ejus centrum, LJ radius, ideoque K altera diametri extremitas, ad quam si ducatur corda LK, erit ei constanter parallela recta MN, quae ad cycloidis punctum M ducitur normalis.

9. Ponamus jam (Fig. 23) ex curva data am formari aliam AM ita, ut etiam abscissae varientur. Sit in curva proposita am abscissa $ap = t$, applicata $pm = u$, ideoque subtangens $pt = \frac{u\,dt}{du}$ et subnormalis $pn = \frac{u\,du}{dt}$, siquidem coordinatae t et u fuerint normales. In curva autem formata AM vocentur coordinatae $AP = x$, $PM = y$, unde fit subtangens $PT = \frac{y\,dx}{dy}$ et subnormalis $PN = \frac{y\,dy}{dx}$.

Ponamus igitur primo curvam AM ex data am ita formari, ut tam abscissae quam applicatae eandem perpetuo teneant rationem: sit scilicet $x = nt$ et $y = nu$, qua proprietate continetur natura similitudinis, ita ut curva AM similis futura sit curvae am punctaque M et m homologa. Cum igitur sit quoque $dx = ndt$ et $dy = ndu$, erit

$$PT = \frac{nudt}{du} \text{ et } PN = \frac{nudu}{dt}, \text{ seu } PT = n \,.\, pt \text{ et } PN = n \,.\, pn,$$

quemadmodum natura similitudinis postulat.

10. Sin autem utraque quidem ratio $AP : ap$ et $PM : pm$ fuerit constans, sed non eadem, scilicet $x = mt$ et $y = nu$, curvae non erunt similes, sed tamen arcta quadam affinitate ita conjunguntur, ut eas affines appellari conveniat. In his igitur curvis cum sit $dx = mdt$ et $dy = ndu$ habebitur $\frac{ydx}{dy} = \frac{mudt}{du}$ et $\frac{ydy}{dx} = \frac{nnudu}{mdt}$. Erit itaque $PT = m \,.\, pt$, seu $PT : pt = AP : ap$, ita ut subtangentes ipsam rationem abscissarum teneant. Verum ob $PN = \frac{nn}{m} \cdot pn$, erit

$$PN : pn = PM^2 \,.\, ap : pm^2 \,.\, AP \quad \text{seu} \quad \frac{AP \,.\, PN}{PM^2} = \frac{ap \,.\, pn}{pm^2}.$$

Porro cum elementum areae APM sit $ydx = mnudt$, erit ipsa area APM ad aream apm ut mn ad 1, hoc est ut $AP \,.\, PM$ ad $ap \,.\, pm$. Elementum autem ipsius arcus AM, quod est

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(m^2 dt^2 + n^2 du^2)}$$

non tenet constantem rationem ad elementum arcus am, quod est $= \sqrt{(dt^2 + du^2)}$, praeter casum $m = n$, quo affinitas in similitudinem abit. Hoc autem casu manifestum est esse $AM : am = AP : ap$.

* 11. Contemplemur nunc (Fig. 24) applicatas CM ex puncto quodam fixo C exeuntes, sitque data quaecunque curva BL, cujus tangentes QL cuique applicatae CL respondentes constent. Tum ex hac curva formetur alia AM hac lege, ut intervallum LM in recta CL producta sumtum semper aequale capiatur rectae cuidam datae, eritque curva AM ex conchoidum genere, quia, si curva data BL sumatur recta, hoc modo prodit conchois vulgaris. Quo igitur curvae AM hac ratione ex curva data BL formatae tangens MP definiatur, ponatur in curva data $CL = y$ et angulus $CLQ = \theta$, ut demisso ex C in tangentem LQ perpendiculo CQ, sit $CQ = y \sin\theta$ et $LQ = y \cos\theta$. Deinde ponatur intervallum constans $LM = a$, ut sit curvae quaesitae applicata $CM = a + y$; angulus vero CMP, quem tangens MP cum CM constituit, vocetur $= \varphi$, ita ut ducta CP ad tangentem MP normali, sit $CP = (a + y) \sin\varphi$ et $MP = (a + y) \cos\varphi$.

12. Concipiatur jam ducta applicata proxima Clm, centroque C describantur arculi $L\lambda$ et $M\mu$ pro rectis habendi; ob $lm = LM = a$ et $\lambda\mu = LM = a$, erit $m\mu = l\lambda = dy$; atque ob triangula similia $CL\lambda$ et $CM\mu$ erit $M\mu : L\lambda = CM : CL = a + y : y$. Cum igitur sit

$$\text{tang}\, Mm\mu = \text{tang}\, CMP = \text{tang}\, \varphi = \frac{M\mu}{m\mu}, \text{ et } \text{tang}\, Ll\lambda = \text{tang}\, CLQ = \text{tang}\, \theta = \frac{L\lambda}{l\lambda},$$

erit

$$\text{tang}\, \varphi : \text{tang}\, \theta = \frac{M\mu}{m\mu} : \frac{L\lambda}{l\lambda} = M\mu : L\lambda = a + y : y;$$

ideoque

$$\text{tang}\, \varphi = \frac{(a+y)}{y} \text{tang}\, \theta.$$

Hinc ergo definitur tangens anguli CMP, cum sit tang CMP : tang $CLQ = CM : CL$; ideoque positio tangentis MP determinatur. Seu erit

$$\frac{CP}{MP} : \frac{CQ}{LQ} = CM : CL, \text{ vel } \frac{CM \cdot MP}{CP} = \frac{CL \cdot LQ}{CQ}.$$

Ideoque inventio tangentis MP ad resolutionem et constructionem problematis geometrici est perducta.

13. Commoda autem hinc constructio sequenti modo adornari potest. (Fig. 25) Ad applicatam CLM in C constituatur perpendicularis CRS tangentem curvae datae LR secans in R, erit *

$$\frac{CR}{CL} = \text{tang } CLR = \text{tang } \theta.$$

Tum per M ducatur recta MS ipsi LR parallela, erit

$$CL : CM = CR : CS, \quad \text{ideoque} \quad CS = \frac{CM \cdot CR}{CL}.$$

Quodsi jam ducatur recta LS, erit tang CLS : tang $CLR = CS : CR = CM : CL$, hincque fiet

$$\text{tang } CLS = \frac{CM}{CL} \text{tang } CLR = \frac{a+y}{y} \text{tang } \theta.$$

Quamobrem erit tang $CLS =$ tang φ, ideoque $CLS = \varphi$, angulus ergo CMT aequalis esse debet angulo CLS. Hinc per M ducatur rectae LS parallela MT, eritque haec MT tangens curvae formatae AM. Sicque facilis modus omnium curvarum conchoidalium tangentes inveniendi habetur: ducatur scilicet ad CM normalis CS, et per M tangenti LR parallela MS, junctaeque rectae LS per M ducatur parallela MT, erit haec tangens quaesita.

14. Prodit ergo haec succincta tangentium constructio, si intervallum LM perpetuo datae magnitudinis capiatur; sin autem LM ad applicatam CL in data ratione sumeretur, manifestum est curvam AM ipsi BL similem esse futuram, atque tangentes in punctis L et M fore parallelas. Generatim autem problema ita proponi posset, ut sumta $CM =$ functioni cuicunque ipsius CL, positio tangentis, in M investigaretur, neque solutio difficilior foret (Fig. 24). Positis enim *

$$CL = y, \text{ ang}. CLQ = \theta \text{ atque } CM = z \text{ et ang}. CMP = \varphi, \text{ erit } l\lambda = dy \text{ et } m\mu = dz.$$

Hinc fiet $\text{tang } Ll\lambda = \text{tang } \theta = \frac{L\lambda}{dy}$ et $\text{tang } Mm\mu = \text{tang } \varphi = \frac{M\mu}{dz}$,

unde habebitur haec analogia

$$\text{tang } \varphi : \text{tang } \theta = \frac{M\mu}{dz} : \frac{L\lambda}{dy} = \frac{z}{dz} : \frac{y}{dy} = \frac{z\,dy}{y\,dz} : 1, \text{ ob } M\mu : L\lambda = z : y,$$

ita ut sit

$$\text{tang } \varphi = \frac{z\,dy}{y\,dz} \text{tang } \theta.$$

Quare si constituta (Fig. 25) CR ad CL normali, capiatur $CR : CS = 1 : \frac{z\,dy}{y\,dz}$, recta LS parallela erit tangenti quaesitae MT. *

15. Huc quoque referendae sunt ejusmodi curvarum descriptiones, ubi recta CM non functioni ipsius applicatae CL, sed functioni arcus BL curvae datae aequalis assumitur. Ex quo genere imprimis sunt notatu dignae eae curvae, quae hoc modo ex circulo nascuntur. Sit itaque curva data

*

* circulus (Fig. 26), cujus centrum in ipso puncto C sit positum. Detur igitur circulus ABE centro C descriptus, cujus radius AC ponatur $=a$, sumtoque puncto A pro initio, a quo arcus AS computentur, ponatur arcus $AS=s$, ac per S agatur recta CSM aequalis functioni cuicunque arcus AS; sicque puncta M posita erunt in quadam curva CMD hoc modo describenda, cujus tangentes in singulis punctis M determinari oporteat. Manifestum autem est hujusmodi curvas CMD fore transcendentes, cum earum constructio a rectificatione circuli pendeat. Atque ex hoc genere non nullae lineae curvae a geometris diligentius sunt exploratae et propriis nominibus distinctae, quas hic evolvi conveniet.

16. Primum ergo ponamus rectam CM perpetuo ipsi arcui AS proportionalem capi, sicque orietur curva CMD a primo inventore spiralis Archimedea appellata. Haec enim curva, postquam ex C exierit, spiris continuo divergentibus in infinitum gyratur. Deinde arcubus AS sumtis negativis, haec constructio praebebit alterum curvae ramum CN priori CM similem et aequalem, ita ut recta CD ad AC normaliter constituta hujus curvae futura sit diameter. Cum igitur positis

$$AC=a,\ AS=s \text{ et } CM=y, \text{ sit } y=\frac{bs}{a}.$$

Si tota peripheria hujus circuli ponatur $=c$, sumtis arcubus s, $c+s$, $2c+s$, $3c+s$, etc., rectae CM respondentes eandem positionem tenebunt, atque ideo recta CM producta spiralem in infinitis punctis secabit, seu longitudo CM infinitos habebit valores, qui erunt

$$\frac{bs}{a},\ \frac{b(c+s)}{a},\ \frac{b(2c+s)}{a},\ \frac{b(3c+s)}{a}, \text{ etc.},$$

ideoque in progressione arithmetica, cujus differentia est $=\frac{bc}{a}$ procedunt, quae est proprietas palmaria hujus spiralis Archimedeae.

17. Ad tangentem hujus curvae inveniendam consideretur radius proximus Cm, ducaturque arculus $M\mu$. Jam ob $Ss=ds$, erit

$$M\mu=\frac{yds}{a}=\frac{bsds}{aa} \text{ et } m\mu=dy=\frac{bds}{a},$$

ex quo fiet
$$m\mu : M\mu = 1 : \frac{s}{a}.$$

Quare si ad radium SC normalis jungatur $CV=\text{arc}\,AS=s$, erit $CS:CV=a:s=m\mu:M\mu$, ideoque angulus VSC aequalis erit angulo $Mm\mu=CMT$. Hinc si rectae SV per M parallela ducatur MT, haec tanget spiralem Archimedeam in puncto M. Facilius autem normalis ad curvam MO definitur: Si enim recta CO sit ad CM normalis, erit

$$M\mu : m\mu = MC : CO, \text{ hoc est ob } MC=\frac{bs}{a}, \text{ erit } s:a=\frac{bs}{a}:CO, \text{ unde fit } CO=b.$$

Quare si radio MC perpetuo normaliter jungatur recta $CO=b$, tum recta MO erit in curvam normalis. Ceterum cum sit $\text{tang}\,CMT=\frac{s}{a}$, perspicuum est angulum CMT, quem radius CM cum curva facit, continuo crescere: in ipso enim puncto C, pro quo fit $AS=0$, hic angulus evanescit, ideoque ipsa recta CA ibi spiralem tanget. In puncto D, ubi fit $s=\frac{1}{4}c$ et $\frac{s}{a}=1{,}5707963$, angulus CDM fit $=57^{0}\,31'\,6''\,6'''$. Deinceps hi anguli continuo fiunt majores, atque in spiris infinitesimis cum rectis confunduntur.

18. Exhiberi quoque potest pro hac curva aequatio ad perpendiculum CQ ex C in tangentem MT demissum. Si enim ponatur $CQ=p$ et $MQ=q$, ut sit $pp+qq=yy$, quia est

$$\frac{p}{q}=\frac{M\mu}{m\mu}=\frac{s}{a}, \text{ ob } \frac{s}{a}=\frac{y}{b} \text{ erit } \frac{p}{q}=\frac{y}{b} \text{ seu } bp=qy \text{ vel } y=\frac{bp}{\sqrt{(yy-pp)}},$$

unde fit
$$y^4=(bb+yy)pp \quad \text{atque} \quad p=\frac{yy}{\sqrt{(bb+yy)}} \quad \text{et} \quad q=\frac{by}{\sqrt{(bb+yy)}}.$$

Quin etiam aequatio transcendens inter coordinatas orthogonales $CP=x$ et $PM=z$ dari poterit. Ponatur enim angulus

$$ACS=\frac{s}{a}=\varphi, \text{ erit } y=b\varphi \text{ et } \frac{x}{z}=\operatorname{tang}\varphi, \text{ itemque } \frac{x}{y}=\sin\varphi \text{ et } \frac{z}{y}=\cos\varphi,$$

unde fit
$$\frac{ydx-xdy}{yy}=d\varphi\cos\varphi=\frac{zd\varphi}{y}.$$

At est
$$d\varphi=\frac{dy}{b}, \quad \text{ergo} \quad ydx-xdy=\frac{yzdy}{b}.$$

Jam vero est
$$yy=xx+zz, \text{ hincque } ydy=xdx+zdz, \; dy=\frac{xdx+zdz}{\sqrt{(xx+zz)}},$$

atque
$$ydx-xdy=\frac{zzdx-xzdz}{\sqrt{(xx+zz)}}=\frac{z(xdx+zdz)}{b}.$$

Quamobrem inter coordinatas x et z haec eruitur aequatio differentialis $\frac{zdx-xdz}{\sqrt{(xx+zz)}}=\frac{xdx+zdz}{b}$, quae naturam spiralis Archimedeae exprimit.

19. Quemadmodum ante applicatae CM arcui AS directe proportionales sunt positae, ita nunc easdem arcubus reciproce proportionales statuamus. Sit igitur (Fig. 27) arcus circuli $CA=a$, * arcus $AS=s$ et curvae quaesitae applicata $CM=y$, erit pro hac curva $y=\frac{ab}{s}$, seu $CM.AS=ab$; ob cujus aequationis similitudinem cum hyperbola ad asymtotos relata, haec curva a Cel. Joh. Bernoullio spiralis hyperbolica est appellata. Cum igitur posito $s=0$ fiat $y=\infty$, evidens est radium CA productum cum curva in infinito convenire. Dehinc crescentibus arcubus s, applicatae $CM=y$ continuo decrescunt, neque tamen penitus evanescent, nisi fiat $s=\infty$, ex quo perspicitur hanc curvam infinitis gyris circa centrum C serpere, qui perpetuo fiant minores, donec tandem post infinitos circumitus in ipsum centrum incidant. Porro etiam sumtis arcubus negativis, uti casu praecedente intelligitur, radium CB similiter fore asymtoton, rectamque ex C ad AB normaliter erectam fore hujus curvae diametrum.

20. Jam ad tangentes hujus curvae inveniendas ducatur applicata proxima $Cm=y+dy$, erit $M\mu=-dy$; et ob $Ss=ds$ fiet $m\mu=\frac{yds}{a}$, ideoque erit $M\mu:\mu m=-dy:\frac{yds}{a}$. Cum igitur sit $y=\frac{ab}{s}$, erit $dy=\frac{-abds}{ss}$, ideoque $M\mu:\mu m=\frac{ab}{ss}:\frac{b}{s}=a:s$. Ducatur ad radium CM normalis CT tangenti occurrens in T, eritque ob triangula similia $M\mu m$ et MCT, $MC:CT=a:s$. Quare per S ducatur tangenti parallela SV, erit $CS:CV=a:s$, unde ob $CS=a$, erit $CV=s=AS$. Ac propterea vicissim si radio CS jungatur normalis $CV=$ arcui AS, rectaeque SN parallela

agatur MT, erit haec tangens curvae in puncto M. Vel facilius, cum sit

$$CM = \frac{ab}{s}, \quad \text{erit} \quad CM : CT = a : s = \frac{ab}{s} : b.$$

Hincque fit $CT = b$. Ergo perpetuo radio MC normaliter jungatur $CT = b$, eritque MT tangens curvae. Anguli itaque CMT, quem radius CM cum curva facit, tangens erit $= \frac{s}{a}$. Hic ergo angulus continuo fit major, et postquam curva circa C infinitas spiras absolverit, tandem abibit in rectum, ultimaeque spirae fient circulares.

21. Si hujus curvae aequatio ad perpendiculum CQ ex C in tangentem demissum desideretur, vocetur $CQ = p$ et $MQ = q$, ut sit $pp + qq = yy$. Erit ergo $\frac{p}{q} = \operatorname{tang} CMT = \frac{s}{a}$; sed quia est $y = \frac{ab}{s}$, erit $\frac{s}{a} = \frac{b}{y}$, ideoque habetur $\frac{p}{q} = \frac{b}{y}$ et $py = bq$, seu $ppyy = bbyy - bbpp$, sicque erit $p = \frac{by}{\sqrt{(bb + yy)}}$ et $y = \frac{bp}{\sqrt{(bb - pp)}}$. Patet ergo perpendiculum p perpetuo minus esse recta constanti b; factoque $y = \infty$, quo casu punctum M per E in infinitum removetur, fore $p = b$. Non itaque haec curva in infinito cum asymtota CF ita convenit, ut ipsa recta CF ejus fiat tangens; proprie ergo non tam ipsa recta CF, sed alia recta huic ad intervallum $= b$ parallela erit istius curvae asymtota. Sit JK ista recta intervallo $= b$ ab AB ducta, atque curva, secus ac figura indicat, ad hanc lineam continuo propius accedet, atque in infinito ab ea tangetur, neque etiam usquam habebit punctum flexus contrarii.

22. Ex hoc casu liquet, nonnunquam summa circumspectione opus esse, si ex sola curvarum genesi earum asymtotas definire velimus. Quod quo clarius perspiciatur, lineam AS fingamus rectam ad CF normalem, continuoque rectam CM ita accipi, ut rectangulum $CM \cdot AS$ sit constans, ex quo sequi videtur si sumatur $AS = 0$, quia fit CM infinita, hanc in ipsam rectam CF incidere, curvaeque fore asymtotam. Rem autem secus se habere ex eo statim liquet, quod distantiae PM continuo crescant, decrescentibus AS. Sit enim $CP = x$, $PM = z$ et $AC = a$, erit $AS = \frac{az}{x}$ et $CM = \sqrt{(xx + zz)}$, unde erit $z\sqrt{(xx + zz)} = bx$ atque $xx = \frac{z^4}{bb - zz}$. Hinc ergo perspicuum est non posito $z = 0$, sed facto $z = b$ fieri $x = \infty$, etiamsi hoc casu intervallum

$$AS = \frac{az}{x} = \frac{a\sqrt{(bb - zz)}}{z} \text{ fiat } = 0;$$

ideoque rectam JK ipsi CF parallelam et ab ea intervallo $= b$ distantem fore veram asymtotam.

23. Cum ista curva algebraica confundetur igitur nostra spiralis hyperbolica in infinito circa asymtotam KJ, quia arcus AS minimus in rectam abit. Sin autem pro hac curva aequationem inter coordinatas $CP = x$ et $PM = z$ invenire velimus, ponamus angulum

$$ACS = \frac{s}{a} = \varphi, \quad \text{erit} \quad CM = y = \frac{b}{\varphi} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{b}{y} \quad \text{ideoque} \quad d\varphi = -\frac{b\,dy}{yy}.$$

Erit vero $z = y \sin\varphi$ et $x = y \cos\varphi$, unde $\frac{y\,dz - z\,dy}{yy} = d\varphi \cos\varphi = \frac{x\,d\varphi}{y} = -\frac{bx\,dy}{y^3}$. Hinc ergo habemus hanc aequationem $yy\,dz - zy\,dy + bx\,dy = 0$. Cum vero sit

$$yy = xx + zz,\ ydy = xdx + zdz \text{ et } dy = \frac{xdx + zdz}{\sqrt{(xx + zz)}},$$

erit
$$xxdz - xzdx + \frac{bx(xdx + zdz)}{\sqrt{(xx + zz)}} = 0,$$

quae per x divisa dat $zdx - xdz = \frac{b(xdx + zdz)}{\sqrt{(xx + zz)}}$, aequationem spiralis hyperbolicae naturam explicantem.

24. Consideremus nunc spiralem parabolicam, (Fig. 28) in qua sit perpetuo applicata CM radici * quadratae ex arcu AS proportionalis. Posito igitur radio circuli $CA = a$, et arcu quocunque $AS = s$, sit $CM = y = \sqrt{2bs}$, et $m\mu = dy = \frac{bds}{\sqrt{2bs}} = \frac{bds}{y}$. Si ergo centro C describatur arculus $M\mu$, erit $M\mu = \frac{yds}{a}$ et $M\mu : m\mu = \frac{y}{a} : \frac{b}{y} = yy : ab = 2s : a$; unde erit tang $Mm\mu$ = tang $CMT = \frac{2s}{a}$, unde positio tangentis MT facile definitur. Sin autem ducatur ad spiralem normalis MN, atque radio CM jungatur normalis CN, erit $M\mu : m\mu = CM : CN$, hoc est $yy : ab = y : \frac{ab}{y}$, erit ergo

$$CN = \frac{ab}{y} \text{ seu } CM \,.\, CN = ab.$$

Crescente ergo arcu $AS = s$, angulus CMT continuo fit major, donec tandem post infinitas spiras fiat rectus. Ceterum manifestum est hanc curvam circa C duas habere partes CM et CL similes et alternatim positas.

25. Quamvis autem haec curva spiralis parabolicae nomen mereri videatur, tamen a Jac. Bernoullio hoc nomen aliae curvae est tributum, quae oritur, si axis parabolae juxta peripheriam circuli incurvetur, atque applicatae ad axem interea normales manere concipiantur. Qui modus generationis quo latius pateat, fingamus (Fig. 29, 30) curvae datae am axem as peripheriae circuli * AS circumplicari ita, ut in curva hoc modo genita AM si capiatur arcus AS aequalis abscissae as, recta SM circulo normaliter insistens futura sit aequalis applicatae sm. Quod si ergo in curva proposita am ponatur abscissa $as = x$ et applicata $sm = z$, in curva autem descripta sit primo radius circuli $CA = a$, tum vero arcus $AS = s$ et recta $CM = y$; facto $AS = s = x$, erit

$$SM = sm = z, \text{ ideoque } CM = y = a + z.$$

Sicque ex aequatione inter x et z data dabitur aequatio pro curva AM inter $AS = s$ et $CM = y$. Patet autem si curva data am secundum axem as in infinitum excurrat, curvam genitam AM infinitis spiris circa centrum C circumvolvi, sicque ad spiralium genus pertinere.

26. Ad tangentem hujus curvae MT inveniendam consideretur radius proximus Cm, erit

$$m\mu = dy = dz \text{ et } M\mu = \frac{yds}{a} = \frac{(a + z)dx}{a}.$$

Hinc si in S ad radium CS normalis ducatur ST tangenti in T occurrens, ob triangula $mM\mu$ et MTS similia erit

$$m\mu : M\mu = MS : ST, \text{ seu } dz : \frac{(a + z)dx}{a} = z : \frac{(a + z)zdx}{adz}, \text{ ita ut sit } ST = \frac{(a + z)zdx}{adz}.$$

In curva autem data am est subtangens $st = \frac{zdx}{dz}$, unde erit $ST = \frac{a + z}{a} \cdot st$. Producatur ergo applicata ms in c, ut sit $cs = CS = a$, et ex c per t ducatur recta ct rectae mu, quae per m axi

as parallela sit acta, occurrens in u. Quoniam igitur est $cs = a$ et $cm = a + z$, erit $mu = \frac{a+z}{a} \cdot st$. Consequenter si recta ST aequalis statuatur isti lineae mu, recta MT tanget spiralem in puncto M.

27. Aliae spiralium tam parabolicarum quam hyperbolicarum species prodibunt, si recta CM indefinite cuipiam potestati arcus AS proportionalis statuatur. Si igitur posito radio circuli $AC = a$ * (Fig. 26) vocetur arcus $AS = s$ et recta $CM = y$, formetur ista aequatio $y = Cs^n$. Hinc igitur erit $m\mu = dy = nCs^{n-1}ds$ et $M\mu = \frac{yds}{a} = \frac{Cs^n ds}{a}$, unde fit $m\mu : M\mu = na : s$, eritque ergo

$$\text{tang}\, Mm\mu = \text{tang}\, CMT = \frac{s}{na}.$$

Quare si tangenti MT per S parallela ducatur SV, quae rectae CV ad radium CS perpendiculariter ductae occurrat in V, erit $CV = a\,\text{tang}\, CSV = \frac{s}{n}$. Unde si constituatur $CV = \frac{s}{n} = \frac{1}{n} AS$, hypotenusa SV erit tangenti MT parallela: sicque facillime in quovis harum spiralium puncto M positio tangentis definitur, ex qua porro rectas ad curvam vel normales, vel ad datum angulum inclinatas ducere in promtu est.

28. Hae autem curvae ad genus parabolicum pertinebunt, si exponens n fuerit numerus affirmativus, quibus casibus curvae initium in ipso centro C erit. Posito enim $s = 0$ fiet quoque $y = 0$, et cum anguli CMT tangens $\frac{s}{na}$ posito $s = 0$ evanescat, recta CA simul tangens erit curvae in puncto C. Dehinc curva continuo magis a centro C discedet, spirisque innumeris in infinitum extendetur. Sin autem n fuerit numerus negativus, posito $s = 0$, recta $CM = y$ fit infinita; unde crescente s continuo decrescunt et post infinitas spiras in centro C evanescunt. Neque vero, ut jam supra vidimus, recta CA, etsi in infinitum continuata, ad curvam pertingit, ideo erit curvae asymtota. Sed ad veram asymtotam inveniendam quantitatem perpendiculi CQ, quod ex C in tangentem curvae demittitur, definiri oportet; hujus enim quantitas, si ponatur $s = 0$, indicabit distantiam asymtotae * verae KJ a recta CA (Fig. 27). Hanc autem asymtotam rectae CA esse parallelam exinde intelligitur, quod angulus, quem radius CM cum curva facit, evanescat posito $s = 0$.

29. Cum igitur anguli CMQ tangens inventa sit $= \frac{s}{na}$, erit ejus sinus $= \frac{s}{\sqrt{(nnaa + ss)}}$, ac propterea perpendiculum $CQ = \frac{sy}{\sqrt{(nnaa + ss)}} = \frac{Cs^{n+1}}{\sqrt{(nnaa + ss)}}$. Sit jam n numerus negativus, puta $= -m$, erit $CQ = \frac{Cs^{1-m}}{\sqrt{(mmaa + ss)}}$, ideoque distantia asymtotae KJ ab radio CA posito $s = 0$ erit $= \frac{Cs^{1-m}}{ma}$, unde perspicitur, si exponens m fuerit unitate minor, tum asymtotam KJ cum ipso radio CA producto convenire, quod ergo evenit in his spiralibus hyperbolicis $y = \frac{C}{s^m}$ si $m < 1$. Verum si $m = 1$, qui est casus spiralis hyperbolicae supra tractatae, erit intervallum inter asymtotam KJ et radium $CA = \frac{C}{a}$, uti jam supra invenimus. Sin autem exponens m fuerit unitate major, tum distantia asymtotae KJ erit infinita, neque adeo radius curvae ME in infinitum excurrens asymtotam habebit, sed ad genus ramorum parabolicorum pertinebit.

30. Inter curvas spirales, quas hactenus consideravimus, ultimum locum occupet spiralis logarithmica seu logistica, quae hac definitur proprietate, ut arcus circuli AS sit logarithmo rectae CM proportionalis. Si igitur posito radio circuli $AC = a$, vocemus arcum $AS = s$, et rectam

$CM = y$, aequatio inter s et y pro hac curva erit $s = bl \cdot \frac{y}{a}$; atque hinc si fiat $y = a$, erit $s = 0$, seu curva per ipsum punctum A, unde arcus AS computantur, transibit. Quodsi ergo signum l denotet logarithmos hyperbolicos, atque e numerum, cujus logarithmus hyperbolicus $= 1$, erit $y = ae^{s:b}$. Crescentibus ergo s in ratione arithmetica, applicatae y in ratione geometrica augebuntur, sicque curva per J infinitis spiris a circulo recedet. Sin autem arcus s negativi capiantur versus E, distantiae y continuo decrescent, atque si $s = -\infty$, demum evanescent, unde haec curva quoque per infinitas spiras tandem in centrum C incidet.

31. Quaelibet ergo recta CM, e centro C educta, logarithmicam spiralem in infinitis punctis secabit. Posita enim tota circuli peripheria $= c$, recta CM in eandem positionem revertetur, si arcui AS sequentes valores tribuantur: s, $c + s$, $2c + s$, $3c + s$, $4c + s$, etc., itemque hi negativi $-c + s$, $-2c + s$, $-3c + s$, $-4c + s$, etc. Valores ergo rectae $CM = y$ per idem punctum M ductae erunt numero infiniti, scilicet

$$ae^{s:b},\quad ae^{(c+s):b},\quad ae^{(2c+s):b},\quad ae^{(3c+s):b},\quad ae^{(4c+s):b},\ \text{etc.}$$

item

$$ae^{-(c-s):b},\quad ae^{-(2c-s):b},\quad ae^{-(3c-s):b},\quad ae^{-(4c-s):b},\ \text{etc.}$$

Hi itaque valores progressionem geometricam constituunt, cujus denominator est $= e^{c:b}$, iique tam ascendendo quam descendendo in infinitum multiplicantur. Hanc curvam, quae plurimis elegantissimis proprietatibus abundat, primus investigavit Leibnizius, ac post eum Jacobus Bernoullius tantas in ea detexit praerogativas, ut eam ad suum symbolum adhibuerit.

32. Praecipua autem hujus curvae proprietas in tangentium lege est sita, quippe ex qua reliquae omnes facile consequuntur. Ad positionem ergo tangentis MQ inveniendam, concipiamus rectam $Cm = y + dy$ ipsi CM proximam, ductoque centro C arculo $M\mu$ erit $M\mu = \frac{yds}{a}$ et $m\mu = dy$. Cum autem sit $s = bl \cdot \frac{y}{a}$ erit $ds = \frac{bdy}{y}$, ideoque $M\mu = \frac{bdy}{a}$, ex quo anguli $Mm\mu$ seu ipsius QMC tangens erit $= \frac{M\mu}{m\mu} = \frac{b}{a}$. Qui angulus cum sit constans, perspicuum est hanc curvam omnes radios CM sub eodem angulo secare. Istius igitur anguli CMQ erit sinus $= \frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$ et cosinus $= \frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}$; unde si ex C in tangentem CQ demittatur perpendiculum CQ, erit $CQ = \frac{by}{\sqrt{(aa+bb)}}$ et $MQ = \frac{ay}{\sqrt{(aa+bb)}}$. Quodsi ergo fuerit $a = b$, angulus CMQ fiet semirectus, quo casu haec spiralis logarithmica semirectangula vocari solet.

33. Quia angulus $Mm\mu$ est constantis quantitatis, triangulum $Mm\mu$ erit specie datum; atque ob $m\mu = dy$ et $M\mu = \frac{bdy}{a}$, fiet hypotenusa $Mm = \frac{dy}{a}\sqrt{(aa+bb)}$. Cum igitur incrementum arcus spiralis $M\mu$ ad incrementum radii $m\mu$ constantem teneat rationem, atque facto $y = 0$ ipse arcus evanescat, necesse est ut tota spiralis e centro C computatae longitudo eandem teneat rationem ad totum radium $CM = y$. Erit ergo spiralis longitudo $CKAM = \frac{y}{a}\sqrt{(aa+bb)}$, quod eo magis est memorabile, quod haec curva infinitis spiris circa centrum C circumplicetur, atque adeo ista spirarum multitudine infinita non obstante longitudo spiralis finitam habet quantitatem; quae ex longitudine

radii CM facillime definiri atque linea recta finita ipsi aequalis exhiberi potest. Scilicet si radio MC normaliter jungatur recta, atque tangens MQ ad ejus occursum usque continuetur, tum ea aequalis erit longitudini spiralis $CKAM$.

34. Est igitur spiralis logarithmica curva rectificabilis, quod eo magis est mirandum, quod inter spirales has ipse circulus tanquam species continetur, qui tamen rectificationem non admittit. Si enim angulus CMQ, quem radius CM cum curva constanter facit, sit rectus, quod evenit si b fiat infinitum, ob $ds = \frac{b\,dy}{y}$, fiet $dy = 0$, atque adeo radii CM ejusdem perpetuo erunt magnitudinis, quae est proprietas circuli. Ad hoc ergo paradoxon explicandum ponamus in genere arcum spiralis $AM = \rho$, erit $MS = y - a$, et cum sit $AM : MS = Mm : m\mu$, erit $\rho = \frac{(y-a)\sqrt{(aa+bb)}}{a}$. Unde casu $b = \infty$, quo fit $y = a$, erit $\rho = 0 \cdot \infty$, quae expressio finitum valorem exhibet, ad quem inveniendum in subsidium ducatur aequatio $y = a e^{s:b}$, quae ob $b = \infty$ dat $y = a\left(1 + \frac{s}{b}\right)$ et $y - a = \frac{as}{b}$. Est vero eodem casu $\sqrt{(aa+bb)} = b$, unde fit $\rho = s$ et $AM = AS$, ex quo perspicuum est hoc solo casu, quo $b = \infty$, rectificationem curvae cessare atque ad mensuram arcuum circularium redire.

35. Superest ut hujus quoque curvae memorabilis aequationem inter coordinatas orthogonales exhibeamus. Hunc in finem sumatur radius CA pro axe, ac vocetur abscissa $CP = x$ et applicata $PM = z$. Ponatur angulus $ACM = \varphi$, erit $z = y \sin\varphi$ et $x = y\cos\varphi$, hincque

$$\frac{y\,dz - z\,dy}{yy} = d\varphi \cos\varphi = \frac{x\,d\varphi}{y}, \text{ seu } y\,dz - z\,dy = xy\,d\varphi.$$

Est vero $$\varphi = \frac{s}{a} \text{ et } d\varphi = \frac{ds}{a}.$$

Quare cum sit $$ds = \frac{b\,dy}{y}, \text{ erit } d\varphi = \frac{b\,dy}{ay}, \text{ et } xy\,d\varphi = \frac{bx\,dy}{a},$$

ita ut habeatur haec aequatio $y\,dz - z\,dy = \frac{bx\,dy}{a}$. Est autem $y = \sqrt{(x^2+z^2)}$ et $dy = \frac{x\,dx + z\,dz}{\sqrt{(xx+zz)}}$, quibus valoribus substitutis emerget haec aequatio:

$$a(x\,dz - z\,dx) = b(x\,dx + z\,dz) \text{ seu } dx : dz = ax - bz : az + bx,$$

unde patet si $b = \infty$, fore $x\,dx + z\,dz = 0$, curvamque propterea abire in circulum, cujus centrum sit in C.

36. Curvarum, quae ex circulo originem ducunt, unum adhuc exemplum afferamus, quadratricem * scilicet Dinostratis. Haec ita ex circulo construi solet, ut (Fig. 32) sumto arcu quocunque AS, in radio BC ad CA normali, capi jubeatur portio CP, quae sit ad radium, ut arcus AS ad quadrantem peripheriae ASB. Tum enim ducta PM ad BC normali, donec radium CS secet in M, erit M punctum in quadratrice Dinostratis. Vocetur circuli radius $AC = BC = a$ et angulus $ACS = \varphi$; posito toto quadrante ASB seu potius angulo recto $= \varrho$, fiet $CP = \frac{a\varphi}{\varrho}$; et cum angulus BCS sit $= \varrho - \varphi$, erit $$CM = \frac{a\varphi}{\varrho \sin\varphi} \text{ et } PM = \frac{a\varphi\cos\varphi}{\varrho\sin\varphi}.$$

Si ergo coordinatae orthogonales ponantur $CP = x$, $PM = z$, erit $x = \frac{a\varphi}{\rho}$ et $z = \frac{a\varphi\cos\varphi}{\rho\sin\varphi}$; unde constat si $\varphi = 0$, fore $x = 0$ et ob $\sin\varphi = \varphi$ et $\cos\varphi = 1$, esse $z = \frac{a}{\rho} = CD$. Punctum ergo D, ubi curva radium AC secat, ita se habet ut sit $ASB : AC = AC : CD$. Si itaque hoc punctum D assignari posset, inde haberetur peripheria circuli, adeoque et ejus quadratura, hancque ob rem haec curva quadratrix est appellata.

37. Quia sumto angulo φ negativo, valor ipsius x fit negativus, ipsius z vero idem manet, qui ante, perspicuum est radium AC fore hujus curvae diametrum orthogonalem. Quemadmodum autem haec curva ex D per M et B ulterius procedat, ex sequenti tabella perspicere licet:

si $\varphi = 0$	erit $x = 0$	et $z = \frac{a}{\rho}$
$\varphi = \frac{1}{2}\rho$	$x = \frac{1}{2}a$	$z = \frac{1}{2}a$
$\varphi = \rho$	$x = a$	$z = 0$
$\varphi = \frac{3}{2}\rho$	$x = \frac{3}{2}a$	$z = -\frac{3}{2}a$
$\varphi = 2\rho$	$x = 2a$	$z = \infty$
$\varphi = \frac{5}{2}\rho$	$x = \frac{5}{2}a$	$z = \frac{5}{2}a$
$\varphi = 3\rho$	$x = 3a$	$z = 0$
$\varphi = \frac{7}{2}\rho$	$x = \frac{7}{2}a$	$z = -\frac{7}{2}a$
$\varphi = 4\rho$	$x = 4a$	$z = \infty$
	etc.	etc.

Habet ergo haec curva infinitas asymtotas Ff, a se invicem intervallo diametro aequali distantes radioque AC parallelas.

38. Tangens hujus curvae MT tam ex relatione inter x et z, quam ex aequatione inter $AS = s$ et $CM = y$ definiri poterit. Posteriori modo cum sit $s = a\varphi$ et $y = \frac{a\varphi}{\rho\sin\varphi}$, erit

$$Ss = ds = a\,d\varphi \quad \text{et} \quad m\mu = dy = \frac{a\,d\varphi}{\rho\sin\varphi} - \frac{a\varphi\,d\varphi\cos\varphi}{\rho\sin^2\varphi},$$

unde

$$M\mu = \frac{y\,ds}{a} = y\,d\varphi = \frac{a\varphi\,d\varphi}{\rho\sin\varphi}.$$

Hinc ergo obtinetur $\quad \operatorname{tang} CMT = \frac{M\mu}{m\mu} = \varphi : \left(1 - \frac{\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi}\right) = \frac{\varphi\sin\varphi}{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi}.$

In puncto itaque D, ubi est $\varphi = 0$, $\sin\varphi = \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3$ et $\cos\varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$, erit tangens anguli, quem recta CD cum curva facit

$$= \frac{\varphi^2}{\varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 - \varphi + \frac{1}{2}\varphi^3} = \frac{3}{\varphi} = \infty;$$

unde iste angulus erit rectus et tangens in D perpendicularis ad radium AC. Ceterum quoties $\varphi = 2\rho$, vel 4ρ, vel 6ρ, vel etc. angulus CMT evanescit; casibus vero $\varphi = \rho$, $\varphi = 3\rho$, $\varphi = 5\rho$, etc., ob $\cos\varphi = 0$ erit $\operatorname{tang} CMT = \varphi$. Iste denique angulus praeter punctum D fiet rectus, si fuerit $\varphi = \operatorname{tang}\varphi$, quod evenit in quadrantibus tertio, quinto, septimo, nono, etc.

*

39. Cum inventa sit $\operatorname{tang} CMT = \frac{\varphi \sin\varphi}{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi} = \frac{\varphi \operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}\varphi - \varphi}$, angulus autem ACM sit $=\varphi$, erit

$$\operatorname{tang} CTM = \frac{\sin^2\varphi}{\varphi - \sin\varphi\cos\varphi},$$

quod idem ex aequatione coordinatarum invenitur. Demittatur enim ex M in AC perpendiculum MQ; quia posuimus $CQ = z = \frac{a\varphi}{\varrho \operatorname{tang}\varphi}$ et $MQ = x = \frac{a\varphi}{\varrho}$, erit subtangens $QT = \frac{-x\,dz}{dx}$. At est

$$dx = \frac{a\,d\varphi}{\varrho} \quad \text{et} \quad dz = \frac{a\,d\varphi}{\varrho \operatorname{tang}\varphi} - \frac{a\varphi\,d\varphi}{\varrho\sin^2\varphi},$$

unde fit $\quad QT = \frac{-a\varphi}{\varrho\operatorname{tang}\varphi} + \frac{a\varphi\varphi}{\varrho\sin^2\varphi}$ et $\frac{QM}{QT} = \operatorname{tang} CTM = \frac{\sin^2\varphi}{\varphi - \sin\varphi\cos\varphi}$, ut ante.

Cum autem sit $\quad \frac{a\varphi}{\varrho\operatorname{tang}\varphi} = z$, erit $QT = -z + \frac{a\varphi\varphi}{\varrho\sin^2\varphi}$, seu $CT = \frac{a\varphi\varphi}{\varrho\sin^2\varphi}$.

At posito $CM = y$, est $\varphi = \frac{\varrho x}{a}$ et $\sin\varphi = \frac{x}{y}$; ex quo obtinetur $CT = \frac{\varrho x^2 y^2}{a x^2} = \frac{\varrho}{a} yy$. Cum ergo sit $CD = \frac{a}{\varrho}$, erit ubique $CD : CM = CM : CT$, quae est proprietas non inelegans hujus curvae quadratricis. Promoto autem puncto M usque in B, quia ibi est $y = a$, erit $CT = \varrho a =$ quadranti ASB.

40. Aequatio denique differentialis pro hac curva quadratrice inter coordinatas $CP = MQ = x$ et $PM = CQ = z$ exhiberi potest, in qua angulus φ amplius non insit. Cum enim sumto

$$CM = y = \sqrt{(xx + zz)}, \ \text{sit} \ \sin\varphi = \frac{x}{y} \ \text{et} \ \cos\varphi = \frac{z}{y}, \ \text{erit} \ d\varphi\cos\varphi = \frac{z\,d\varphi}{y} = \frac{y\,dx - x\,dy}{yy}.$$

At est $d\varphi = \frac{\varrho\,dx}{a}$, unde obtinetur $\varrho yz\,dx = ay\,dx - ax\,dy$, seu $\varrho y^2 z\,dx = ay^2\,dx - axy\,dy$. Quia vero $yy = xx + zz$ et $y\,dy = x\,dx + z\,dz$, erit $\varrho xxz\,dx + \varrho z^3\,dx = azz\,dx - axz\,dz$, quae per z divisa abit in hanc $\varrho(xx + zz)\,dx = a(z\,dx - x\,dz)$. Vel si intervallum $CD = \frac{a}{\varrho}$ ponatur $= b$, erit $dx = \frac{b(z\,dx - x\,dz)}{xx + zz}$; positoque brevitatis gratia $z = px$, erit $dx = \frac{-b\,dp}{1 + pp}$. Unde vicissim per calculum integralem ipsae formulae superiores a quadratura circuli pendentes eruuntur.

41. Loco circuli, ex quo hactenus alias curvas formavimus, alias quascunque lineas curvas adhiberi licet, atque praecepta tradita sufficiunt ad tangentes linearum, inde utcunque constructarum inveniendas. Sit enim (Fig. 33) data quaecunque curva AL, cujus natura exprimatur aequatione inter rectam, ex puncto fixo C ad curvam ductam $CL = u$ et angulum $ACL = \varphi$. Ex hac porro construatur alia curva BM, sumendo distantiam $CM = y$ functioni cuicunque ipsius u aequalem. Ducatur recta ipsi CLM proxima Clm, centroque C fiant arculi $L\lambda$ et $M\mu$; ob ang. $MCm = d\varphi$, erit $L\lambda = u\,d\varphi$, $M\mu = y\,d\varphi$ et $l\lambda = du$, $m\mu = dy$. In L et M ducantur tangentes LV et MT rectae CV, quae ad LC sit normalis, occurrentes in V et T; erit $CV = \frac{uu\,d\varphi}{du}$ et $CT = \frac{yy\,d\varphi}{dy}$. Hinc ergo erit

$$CV : CT = \frac{uu}{du} : \frac{yy}{dy} = \frac{dy}{yy} : \frac{du}{uu}, \quad \text{seu} \quad CV : CT = d\,.\,\frac{1}{CM} : d\,.\,\frac{1}{CL}.$$

Sin autem normales ad utramque curvam producantur LK et MN, rectae CN, ad LC perpendiculari, occurrentes in K et N, erit $CK = \frac{du}{d\varphi}$ et $CN = \frac{dy}{d\varphi}$, ideoque $CK : CN = du : dy$. Cum igitur ratio $dy : du$ detur, ex positione normalis LK definietur positio normalis MN.

42. Superfluum esset exemplis hanc regulam per se facilem illustrare: quare ad alios generationis modos progrediamur, in quibus applicatae non ex puncto quopiam fixo egrediuntur, sed alio modo definiantur. Ubi cum infinita varietas locum habeat, ex ea ejusmodi casus eligamus, in quibus proprietates prae ceteris notatu dignae occurrunt. Ac primo quidem proposita sit (Fig. 34) curva quaecunque AL, ex qua ita formetur alia BM, ut rectae LM, quae curvae datae normaliter insistant, ubique ejusdem longitudinis capiantur. Hoc modo manifestum est, si linea AL fuerit recta, alteram quoque rectam illi parallelam esse futuram; ac si linea AL sit circulus, alteram BM pariter fore circulum ipsi concentricum. Generatim ergo cum lineae AL et BM ubique aequis intervallis a se invicem distent, parallelae inter se erunt censendae, quae est idea maxime adaequata parallelismi ad lineas curvas accomodati. *

43. Quia lineae ML et ml ad curvam AL ponuntur normales atque inter se aequales sunt, eaedem quoque in alteram curvam genitam BM erunt normales. Producantur enim hae duae lineae, donec concurrant in puncto O, et quia lineae OL et Ol sunt ad curvam normales, elementum Ll confundetur cum arculo circuli centro O descripti, eritque ergo $OL = Ol$; unde cum sit $LM = lm$, erit quoque $OM = Om$, quocirca et hae lineae OM et Om ad curvam genitam BM erunt normales, sicque et in hoc communis parallelismi natura locum habet, ut quae linea in alteram curvarum AL et BM sibi parallelarum sit normalis, eadem alteri perpendiculariter insistat. Hinc ergo porro sequitur tangentem curvae genitae MT parallelam fore tangenti curvae datae LV, ita ut si curvae datae tangentes ducere valeamus, in promtu sit curvarum hoc modo inde genitarum tangentes determinare.

44. Praeterea autem affinitas harum curvarum singularis est notanda, quae in hoc constat, ut longitudo curvae BM aequalis sit arcui curvae datae AL una cum arcu quodam circulari sic definiendo. Sit recta AB ad utramque curvam normalis, cui productae normalis ML occurrat in N. Ducatur $L\mu$ ipsi lm parallela, erit $m\mu = Ll$, ideoque $Mm = Ll + M\mu$. Jam centro N radio $EN = LM = AB$ describatur arcus circuli ES, atque ducatur Ns ipsi nl parallela, erit utique $M\mu = Ss$, ideoque $Mm = Ll + Ss$. Cum igitur sit Mm differentiale curvae BM, et Ll differentiale curvae AL, atque Ss differentiale arcus circularis ES, erit $d.BM = d.AL + d.ES$, ideoque et integralia aequalia esse oportet, unde fit $BM = AL + ES$. Differentia ergo inter arcus BM et AL aequalis est arcui circuli, cujus radius $= AB = LM$, respondenti angulo BNM, quem rectae in terminis curvarum normaliter ductae BN et MN inter se constituunt. Atque hinc duae lineae curvae exhiberi possunt, quarum differentia aequetur arcui circulari.

45. Sit (Fig. 35) curva data ALG, ex qua ita formetur altera curva BM, ut rectae LM, quae tangit curvam datam in L, certus tribuatur valor sive constans, sive functioni cuicunque a puncto L pendenti aequalis. Ponatur ergo arcus curvae datae $AL = s$, sitque longitudo tangentis $LM = y$. Ducatur secundum eandem legem ex puncto proximo l tangens $lm = y + dy$, et quia haec recta lm cum elemento curvae Ll in directum jacet, ob $Ll = ds$, erit linea $Lm = y + dy + ds$. Ex M in Lm demittatur perpendiculum $M\mu$, quod non differet ab arculo circuli centro L descripto, eritque propterea $L\mu = LM = y$, unde fit $m\mu = dy + ds$. Si jam innotesceret lineola $M\mu$, haberetur in triangulo $Mm\mu$ angulus $Mm\mu$, cui aequalis est angulus LMT, quem tangens curvae *

genitae MT cum recta LM constituit. Verum cum lineola $M\mu$ pendeat ab inclinatione mutua tangentium proximarum LM et lm, quam infra demum investigare constituimus, hunc casum in genere hic evolvere non licet.

46. Quando autem y ita determinatur per s, ut sit $dy + ds = 0$, erit $m\mu = 0$, unde quomodocunque se habeat valor lineolae $M\mu$, angulus $Mm\mu$ erit rectus, atque tangens MT ad rectam LM erit normalis, huncque ergo casum hic evolvere licet. Sit igitur $y = c - s$, eritque $dy + ds = 0$, et curva genita BM ita erit comparata, ut ejus tangens MT ubique sit ad rectam LM normalis. Quodsi ergo sumamus curvam $ALG = c$, erit arcus $GL = c - s$, ideoque $LM = LG$. Quamobrem genesis curvae BM ita describi poterit, ut (Fig. 36) curvae ALG circumplicetur filum, idque successive incipiendo ab G evolvatur. Filum enim hoc modo evolutum si tendatur, perpetuo curvam ALG tanget, et pars a curva jam extensa LM aequalis erit portioni curvae relictae LG. Unde si filum altero termino M fuerit stilo instructum, iste stilus describet curvam GMB, quae ex evolutione curvae GLA nata vocatur. De quo curvas describendi modo infra fusius explicabitur.

47. Si ergo curvae ALG hoc modo filum circumplicetur, idque in G stilo munitum evolvatur, describet curvam GMB, quae ex evolutione curvae GLA nata dicitur. Hujus igitur curvae haec sunt proprietates, ut primo recta LM, quae curvam datam in L tangit, sit normalis ad curvam genitam GMB: tum vero ut haec recta LM aequalis ubique sit arcui GL. Si porro filum longius capiatur, atque evolutio in puncto g incipiatur, perspicuum est curvam hoc modo genitam fore parallelam curvae GMB, recta enim LM producta simul in novam istam curvam erit normalis, et portio producta ubique aequalis erit arcui Gg; sicque hae duae curvae sibi erunt parallelae, prorsus ut ante (42) parallelismum descripsimus. Quamobrem vicissim curvae parallelae ex evolutione ejusdem lineae curvae BLG nascuntur.

48. Quemadmodum hic ex evolutione fili uni cuidam curvae circumplicati, nova curva est formata, ita facta quadam mutatione duae curvae pro arbitrio assumi possunt, ex quarum evolutione conjunctim nova producatur curva. Sint enim (Fig. 37) datae duae curvae ALa et BKb. Capiatur filum satis longum, cujus alter terminus in A alter in B firmetur; tum extendatur hoc filum ope stili M immissi ita, ut filum ad utramque curvam maneat applicatum, quoad in L et K, ubi curvae filo tanguntur, in directum extendatur. Hoc modo si stilus continuo promoveatur, ita ut filum perpetuo tensum teneatur, stilus describet curvam CMc, cujus natura cum a longitudine fili, tum a natura utriusque curvae ALa, BKb, tum a situ relativo harum duarum curvarum pendebit. Ac statim quidem perspicitur, si utraque curva ALa, BKb in punctum evanescat, hoc modo describi iri ellipsin, focos in utroque hoc puncto habentem, cujus axis transversus aequetur longitudini fili.

49. Ponamus totam fili longitudinem $ALMKB = a$, atque in praesente situ sit portio curvae Aa applicata, $AL = s$, et portio alteri curvae Bb applicata $BK = r$. Tum sint portiones in directum extensae $LM = y$ et $KM = z$, erit $s + y + r + z = a$. Jam stilus in situm proximum m promoveatur, quo puncta contactus transferantur in l et k, erit $Al = s + ds$, $Bk = r + dr$, ideoque $Ll = ds$ et $Kk = - dr$. Porro $lm = y + dy$ et $km = z + dz$, atque erit

$$ds + dy + dr + dz = 0.$$

Ex M in lm et ex m in KM demittantur perpendicula Mp et mq, et fiet $Lm = y + dy + ds$ et $kM = z - dr$. Jam ob $Lp = LM$ et $kq = km$ fiet

$$mp = Lm - LM = dy + ds \text{ et } Mq = kM - km = -dr - dz, \text{ unde erit } mp = Mq.$$

Cum igitur triangula rectangula Mpm et mqM praeter communem hypotenusam Mm, habeant latera mp et Mq aequalia, erunt ipsa aequalia ac similia, ideoque $Mp = mq$ et ang. $Mmp =$ ang. mMq.

50. Quodsi jam ducatur tangens TMV, erit ang. $Mmp = LMT$, et ang. $mMq = KMV$; hancque ob rem ang. $LMT = KMV$, ita ut tangens TMV utrinque aequaliter inclinetur ad directiones fili ML et MK. Cum igitur radii lucidi a superficie reflectente ita reflectantur, ut angulus incidentiae aequalis sit angulo reflexionis, manifestum est si curva CMc proprietate radios reflectendi gaudeat, atque LM fuerit radius incidens, fore MK radium reflexum. Ducatur ad curvam CMc in puncto M normalis MO, eritque ang. $LMO = KMO$. Quare si angulus LMK bisecetur recta MO, erit haec recta MO normalis in curvam CMc, atque si ad MO normalis ducatur TMV, haec curvam tanget in puncto M. Haec ergo proprietas, quae ex descriptione ellipsis per focos demonstrari solet, communis est omnibus curvis, quae hoc modo per duplicem evolutionem ex duabus curvis quibuscunque producuntur.

Caput IV.

De tangentibus curvarum, in certis locis inveniendis.

1. Etsi praecepta hactenus tradita latissime patent, atque tangentibus ad singula cujusque curvae puncta inveniendis sufficiunt, tamen dantur casus, quibus expedit regulis particularibus, ad eos casus accommodatis, utiquam regulas generales eo transferre. Hi autem casus potissimum occurrunt, quando alterutra binarum quantitatum variabilium vel evanescit, vel in infinitum excrescit. Si enim in his locis positio tangentis investiganda sit, non opus est, ut omnes aequationis termini considerentur, totaque aequatio differentietur, sed quia his casibus plures termini respectu reliquorum evanescunt, his praetermissis, operatio summopere contrahitur, et, quamvis aequatio sit maxime complicata, tamen facili negotio his casibus, quibus altera variabilium vel evanescit, vel in infinitum abit, positio tangentis definietur.

2. Cum igitur in hoc capite duo occurrunt casus evolvendi, prout altera variabilium vel evanescit, vel infinita ponitur, tractatio nostra erit bipartita. Primo ergo alteram variabilem nihilo aequalem assumamus, hocque casu, uti jam in *Introductione* abunde est ostensum, atque statim uberius explicabitur, tota aequatio, quantumvis fuerit composita, ad duos tantum terminos revocabitur; ita ut curva proposita in loco, quem consideramus, ubi scilicet $x = 0$, eandem habitura sit tangentis indolem, quam habet curva, cujus aequatio duobus tantum constat terminis. Cum igitur omnis aequatio inter binas variabiles x et y, si alterutra evanescens ponatur, ad duos terminos revocetur, in hanc abibit formam $y^m = Cx^n$, unde ad nostrum institutum sufficiet, positionem tangentis harum curvarum nosse, quando vel x vel y nihilo aequalis assumitur.