Ex M in lm et ex m in KM demittantur perpendicula Mp et mq, et fiet $Lm = y + dy + ds$ et $kM = z - dr$. Jam ob $Lp = LM$ et $kq = km$ fiet

$mp = Lm - LM = dy + ds$ et $Mq = kM - km = - dr - dz$, unde erit $mp = Mq$. Cum igitur triangula rectangula Mpm et mqM praeter communem hypotenusam Mm, habeant latera mp et Mq aequalia, erunt ipsa aequalia ac similia, ideoque $Mp = mq$ et ang. $Mmp =$ ang. mMq.

50. Quodsi jam ducatur tangens TMV, erit ang. $Mmp = LMT$, et ang. $mMq = KMV$; hancque ob rem ang. $LMT = KMV$, ita ut tangens TMV utrinque aequaliter inclinetur ad directiones fili ML et MK. Cum igitur radii lucidi a superficie reflectente ita reflectantur, ut angulus incidentiae aequalis sit angulo reflexionis, manifestum est si curva CMc proprietate radios reflectendi gaudeat, atque LM fuerit radius incidens, fore MK radium reflexum. Ducatur ad curvam CMc in puncto M normalis MO, eritque ang. $LMO = KMO$. Quare si angulus LMK bisecetur recta MO, erit haec recta MO normalis in curvam CMc, atque si ad MO normalis ducatur TMV, haec curvam tanget in puncto M. Haec ergo proprietas, quae ex descriptione ellipsis per focos demonstrari solet, communis est omnibus curvis, quae hoc modo per duplicem evolutionem ex duabus curvis quibuscunque producuntur.

Caput IV.

De tangentibus curvarum, in certis locis inveniendis.

1. Etsi praecepta hactenus tradita latissime patent, atque tangentibus ad singula cujusque curvae puncta inveniendis sufficiunt, tamen dantur casus, quibus expedit regulis particularibus, ad eos casus accommodatis, utiquam regulas generales eo transferre. Hi autem casus potissimum occurrunt, quando alterutra binarum quantitatum variabilium vel evanescit, vel in infinitum excrescit. Si enim in his locis positio tangentis investiganda sit, non opus est, ut omnes aequationis termini considerentur, totaque aequatio differentietur, sed quia his casibus plures termini respectu reliquorum evanescunt, his praetermissis, operatio summopere contrahitur, et, quamvis aequatio sit maxime complicata, tamen facili negotio his casibus, quibus altera variabilium vel evanescit, vel in infinitum abit, positio tangentis definietur.

2. Cum igitur in hoc capite duo occurrunt casus evolvendi, prout altera variabilium vel evanescit, vel infinita ponitur, tractatio nostra erit bipartita. Primo ergo alteram variabilem nihilo aequalem assumamus, hocque casu, uti jam in *Introductione* abunde est ostensum, atque statim uberius explicabitur, tota aequatio, quantumvis fuerit composita, ad duos tantum terminos revocabitur; ita ut curva proposita in loco, quem consideramus, ubi scilicet $x = 0$, eandem habitura sit tangentis indolem, quam habet curva, cujus aequatio duobus tantum constat terminis. Cum igitur omnis aequatio inter binas variabiles x et y, si alterutra evanescens ponatur, ad duos terminos revocetur, in hanc abibit formam $y^m = Cx^n$, unde ad nostrum institutum sufficiet, positionem tangentis harum curvarum nosse, quando vel x vel y nihilo aequalis assumitur.

3. Perspicuum autem porro est in hac aequatione $y^m = Cx^n$ exponentes m et n non solum esse numeros integros, sed etiam primos inter se. Si enim essent fracti, per evectionem potestatis ad integros perducerentur, sin autem inter se essent compositi, seu communem divisorem haberent, hic per extractionem radicis tolleretur. His igitur casibus omissis, quemadmodum pro ceteris positio tangentis, quando vel x vel y nihilo aequalis ponitur, sit comparata, erit dispiciendum. Ac primo quidem, si uterque exponens m et n fuerit numerus affirmativus, manifestum est posito $x=0$, fore quoque $y=0$, et vicissim. Sin autem horum exponentium m et n alter fuerit affirmativus, alter negativus, tum posito $x=0$, erit $y=\infty$, ac vicissim, si sit $y=0$ erit $x=\infty$. Probe autem recordandum est, utrum aequatio $y^m = Cx^n$ ex aequatione proposita sit nata facto $x=0$, an vero $y=0$, quo eadem hypothesis in tangentis investigatione retineatur.

4. Ponamus igitur aequationem propositam quamcunque posito x evanescente coaluisse in hanc $y^m = Cx^n$, et utrumque exponentem m et n esse affirmativum, ita ut simul sit $y=0$. Ad tangentem ergo hujus curvae inveniendam differentietur aequatio: habebitur

$$my^{m-1}dy = nCx^{n-1}dx, \text{ unde fit } \frac{dy}{dx} = \frac{nCx^{n-1}}{my^{m-1}} = \frac{nx^{n-1}y}{mx^n} = \frac{ny}{mx}.$$

At est
$$y = C^{1:m}x^{n:m} \quad \text{ideoque erit} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{n}{m}C^{\frac{1}{m}}x^{\frac{n-m}{m}}.$$

Exprimit autem $\frac{dy}{dx}$ tangentem anguli, quem tangens curvae facit cum axe, in quo abscissae sumuntur. Posito ergo $x=0$, quoniam fit quoque $y=0$, tangens curvae per ipsum initium abscissarum transit, atque cum axe angulum constituit, cujus tangens erit

$$= \frac{n}{m}C^{\frac{1}{m}}x^{\frac{n-m}{m}} \quad \text{posito } x=0.$$

Hic igitur angulus erit $=0$ si $n > m$; rectus autem fiet si sit $n < m$; sin autem sit $n = m$, iste angulus erit obliquus, quippe cujus tangens fit finita $= C^{\frac{1}{m}} = C$ siquidem $m=1$.

5. Quando ergo in aequatione $y^m = Cx^n$, ad quam posito x evanescente pervenitur, tam m quam n fuerit numerus affirmativus, atque ideo curva in ipso abscissarum principio axem secat, tres occurrunt casus considerandi, quorum primus est sit $n > m$ seu $m < n$. Hoc casu (Fig. 38) ipse axis AB curvam in puncto A tanget. Ramus igitur curvae ex A egrediens erit vel AM vel AN, vel Am vel An, vel etiam binos pluresve hujusmodi ramos conjunctim habebit, quod ex aequatione generali est decidendum. Lex continuitatis autem postulat, ut curva semper ad minimum duos hujusmodi arcus habeat, et si plures fuerint, eorum numerus perpetuo par sit necesse est. Quod cum naturam curvedinis sumus evoluturi, clarius patebit. Cum enim hic tantum positionem tangentis investigemus, quonam tractu curva ulterius procedat, hic non curamus, sed infra cautiones, quibus in hac investigatione utendum est, accuratius tradentur.

6. Secundus casus est, si fuerit $m > n$ atque tangens curvae (Fig. 39) in puncto A normalis erit ad axem AB. His igitur casibus recta DAT axem in A perpendiculariter trajiciens curvam ibidem tanget, unde rami curvae ex A ulterius progredientes erunt vel AM vel AN, vel Am, vel An

quod ex aequatione completa est dijudicandum. Tertius denique casus existit si $m = n$, quo casu aequatio $y^m = Cx^n$ abit in hanc $y = Cx$, naturam lineae rectae exprimens. Tangens igitur curvae, ex qua posito $x = 0$ haec aequatio $y = Cx$ est nata, (Fig. 40) ad axem AB erit inclinata angulo BAD, * cujus tangens est $= C$, sicque recta DAT curvam in puncto A tanget. Figura igitur curvedinis prope A erit vel AM vel AN, vel Am vel An, atque vel ex duobus, vel quatuor, vel sex etc. hujusmodi ramis consistet. De vero autem curvae tractu tam antecedentia quam consequentia versus hic nihil certi statuere licet, nisi reliquorum quoque aequationis terminorum hic neglectorum ratio habeatur. Interim tamen hinc ad quemcunque horum casuum aequatio curvae facto $x = 0$ perducatur, positio tangentis in hoc loco facillime definitur.

7. Diximus supra si in aequatione $y^m = Cx^n$ exponentes m et n communem habeant divisorem, hanc aequationem per extractionem radicis ad simpliciorem formam deprimi posse. Hoc autem ita intelligendum est, nisi extractio ob signum quantitatis C impediatur. Si enim communis divisor fuerit numerus par, et coëfficiens C sit quantitas negativa, extractio radicis deduceret ad imaginaria; ex quo intelligitur, abscissis x, si iis valor finitus tribuatur, nullam plane respondere applicatam. Sic si habeatur $y^2 = -x^2$ vel $y^4 = -aaxx$, vel $y^6 = -aax^4$ seu $y^6 = -a^4xx$ etc. singulis valoribus finitis ipsius x nullae applicatae respondent; interim tamen facto $x = 0$ manifestum est fore et $y = 0$. His igitur casibus aequatio pertinet ad unicum punctum in initio abscissarum positum, et curvae, ex quibus hujusmodi aequationes pro $x = 0$ proveniunt, nullos habebunt ramos per punctum A transeuntes, sed ibi habebunt punctum separatum, quod conjugatum vocari solet, cujus tangens concipi nequit. Quod idem indicat formula ante pro positione tangentis inventa, quae ob $C^{\frac{1}{m}}$, si C est quantitas negativa et m numerus par, imaginarium, assignari omnino nequit.

8. Sin autem in aequatione binomia $y^m = Cx^n$, ad quam posito $x = 0$ pervenitur, exponens n fuerit numerus negativus, tum valori $x = 0$ respondebit valor $y = \infty$, sicque (Fig. 41) applicata in * puncto A erit infinite magna. Tangens autem anguli, quem tangens in hoc loco cum curva constituit, erit $= \frac{n}{m} C^{\frac{1}{m}} x^{\frac{n-m}{m}}$, quae ob n numerum negativum, posito $x = 0$, semper fit infinita, isque angulus rectus. Ipsa ergo recta EAF, axi in A normalis, erit tangens curvae, ejusque idcirco asymtotos; ex quo curva ad minimum duos ejusmodi ramos, cujusmodi sunt MP, NQ, mp, nq, ex infinito redeuntes habebit. Sin autem, ut ante meminimus, uterque exponens m et n fuerit numerus par, et C quantitas negativa, tum aequatio casu quoque $x = 0$ erit imaginaria, nisi forte dicere velimus curvam in distantia infinita rectae AE vel AF habere punctum solitarium conjugatum.

9. Casus igitur evolvimus eos, quibus posito $x = 0$ applicata y vel quoque evanescit, vel in infinitum excrescit. Sin autem y posito $x = 0$ finitum obtineat valorem, puta $y = a$, tum iste casus ponendo $y = a + z$ ad priorem reducitur, quippe z evanescet posito $x = 0$. Cum autem haec substitutio, praesertim si aequatio proposita pluribus constet terminis, non parum molestiae pareret, modum trademus, cujus ope sine hac substitutione tangens definiri queat. Ceterum aequationes binomiales hactenus tractatae viam nobis aperiunt ad aequationes, quae pluribus constant terminis, progrediendi, tam quod in hoc genere sint simplicissimae, quam quod aequationes utcunque compositae

casu $x=0$ ad binomiales reducantur. Quemadmodum ergo haec reductio sit instituenda, hic clarius explicemus, atque ejusmodi regulas pro disponendis terminis aequationum trademus, quarum ope deinceps quoque natura curvedinis ramorumque inflexio facile definiri queat.

10. Ac primo quidem quaecunque aequatio proponatur inter x et y, si ponatur $x=0$, omnes quidem termini x continentes evanescerent, nisi y valorem induat infinitum, sed inter hos ipsos terminos evanescentes gradus distingui conveniet, qui inter se rationem infinitam tenent. Hujusmodi progressionem constituunt sequentes termini.

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5,\ x^6, \text{ etc.},$$

sicut enim casu $x=0$ prae 1 evanescit x, ita prae x evanescit xx, et x^3 prae xx, ita ut quisque terminus sit infinities minor praecedente infinitiesque major sequente. Similiter erunt comparatae sequentes series, quicunque valor alteri variabili y conveniat:

$$y,\ xy,\ x^2y,\ x^3y,\ x^4y,\ x^5y, \text{ etc.},$$
$$y^2,\ xy^2,\ x^2y^2,\ x^3y^2,\ x^4y^2,\ x^5y^2, \text{ etc.},$$

et generaliter

$$y^n,\ xy^n,\ x^2y^n,\ x^3y^n,\ x^4y^n,\ x^5y^n, \text{ etc.}$$

11. Quaecunque ergo aequatio algebraica inter x et y habeatur, postquam ea tam ad rationalitatem fuerit perducta quam a fractionibus liberata, singuli ejus termini in istis seriebus continebuntur. Quo igitur ordo terminorum, secundum quem alii prae aliis evanescunt, facilius perspiciatur, rejectis coëfficientibus constantibus termini ita disponantur

	0	1	2	3	4	5	6	
0.	1	y	y^2	y^3	y^4	y^5	y^6	etc.,
1.	x	xy	xy^2	xy^3	xy^4	xy^5	xy^6	etc.,
2.	x^2	x^2y	x^2y^2	x^2y^3	x^2y^4	x^2y^5	x^2y^6	etc.,
3.	x^3	x^3y	x^3y^2	x^3y^3	x^3y^4	x^3y^5	x^3y^6	etc.,
4.	x^4	x^4y	x^4y^2	x^4y^3	x^4y^4	x^4y^5	x^4y^6	etc.,
5.	x^5	x^5y	x^5y^2	x^5y^3	x^5y^4	x^5y^5	x^5y^6	etc.,
6.	x^6	x^6y	x^6y^2	x^6y^3	x^6y^4	x^6y^5	x^6y^6	etc.,
7.	x^7	x^7y	x^7y^2	x^7y^3	x^7y^4	x^7y^5	x^7y^6	etc.,
	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	

12. Terminis ergo aequationis hoc modo dispositis, manifestum est posito $x=0$ in qualibet serie verticali omnes terminos inferiores prae superioribus evanescere, ita ut hoc casu supremi tantum termini cujusque seriei verticalis relinquantur, ac reliqui rejici queant. In hoc autem schemate assumsimus in aequatione proposita omnes terminos occurrere, ita ut hoc casu, quo $x=0$, termini supremae seriei horizontalis omnes remaneant; ex qua y obtineret unum pluresve valores finitos. Sin autem in aequatione proposita aliqui termini desint, eorum loca in hoc schemate vacua relinquuntur, atque ob superiorem rationem pro casu $x=0$ in qualibet serie verticali supremi tantum termini in computum venient. Sicque contingere potest, ut termini residui non in eadem serie horizontali sint constituti.

13. Terminis hoc modo superfluis expunctis tot remanebunt termini, quot habebuntur series verticales; sicque aequatio plerumque ad satis paucos terminos reducitur. Horum autem terminorum residuorum non omnes semper inter se erunt homogenei, sed denuo aliqui prae reliquis evanescent. Quomodo igitur isti termini, qui prae ceteris evanescunt, sint dignoscendi, nobis explicandum restat. Ponamus itaque supremos cujusque columnae verticalis terminos relictos esse

$$x^\alpha,\ x^\beta y,\ x^\gamma y^2,\ x^\delta y^3,\ x^\varepsilon y^4,\ x^\zeta y^5, \text{ etc.},$$

quorum quinam sint inter se homogenei, vel prae reliquis evanescant, dispiciamus. Fingamus duos quosvis terminos, puta x^α et $x^\beta y$ inter se esse homogeneos, statimque patebit, utrum reliqui termini his sint homogenei, vel iis infinities minores, vel infinities majores. Qui autem fuerint homogenei omnes erunt retinendi, qui infinities minores rejiciendi; sin autem nonnulli reperiantur infinities majores, hi soli retineantur, cum prae his et illi, quos assumseramus, evanescant.

14. Ad hoc autem judicium rite instituendum notasse sufficiet, si in progressione geometrica duo quicunque termini fuerint homogenei, simul omnes tam antecedentes quam medios et sequentes iis fore homogeneos. Terminos enim homogeneos vocamus, quorum est ratio infinita; hinc si in progressione geometrica duo termini habuerint rationem finitam, necesse est, ut singuli inter se rationem quoque finitam teneant. Quare si termini x^α et $x^\beta y$ sint homogenei, omnes termini hujus progressionis geometricae inter se erunt homogenei

$$x^\alpha,\ x^\beta y,\ x^{2\beta-\alpha} y^2,\ x^{3\beta-2\alpha} y^3,\ x^{4\beta-3\alpha} y^4, \text{ etc.}$$

Quodsi jam in termino $x^\gamma y^2$ fuerit $\gamma = 2\beta - \alpha$, hic terminus illis x^α et $x^\beta y$ erit homogeneus; sin autem sit $\gamma > 2\beta - \alpha$, terminus $x^\gamma y^2$ prae illis x^α et $x^\beta y$ evanescet; sin autem $\gamma < 2\beta - \alpha$, tum illi termini x^α et $x^\beta y$ prae hoc $x^\gamma y^2$ ipsi evanescent, similique modo reliqui termini dijudicabuntur.

15. Sin alios duos quoscunque terminos homogeneos fingere velimus, ut $x^\beta y$ et $x^\varepsilon y^4$, ex his primum progressio geometrica ad singulas potestates ipsius y est formanda, quae igitur erit

$$\begin{array}{llllll} x^{\frac{4\beta-\varepsilon}{3}}, & x^\beta y, & x^{\frac{\varepsilon+2\beta}{3}} y^2, & x^{\frac{2\varepsilon+\beta}{3}} y^3, & x^\varepsilon y^4, & x^{\frac{4\varepsilon-\beta}{3}} y^5, \text{ etc.}, \\ x^\alpha, & x^\beta y, & x^\gamma y^2, & x^\delta y^3, & x^\varepsilon y^4, & x^\zeta y^5, \text{ etc.}, \end{array}$$

qui igitur termini inferioris seriei cum superioribus congruunt, ii duobus propositis erunt homogenei. Sin autem exponens ipsius x in quopiam termino inferioris seriei major fuerit quam in respondente superioris, ille terminus prae superioribus evanescit; sin autem alicubi in serie inferiori exponens ipsius x minor fuerit quam in termino suprascripto, tum prae eo omnes termini superioris seriei evanescent.

16. Si igitur casus iste ultimus, quo aliquis terminus inferioris seriei infinities major existit terminis superioris, nusquam occurrit, rejectis terminis evanescentibus remanebit aequatio inter terminos mere homogeneos, quae naturam curvae in loco $x = 0$ exprimit. Sin autem quis terminus in seriei inferiori fiat infinite magnus respectu superiorum, tum is in locum binorum illorum terminorum, ex quibus hoc judicium petivimus, assumatur, eademque operatio denuo instituatur, et quoties terminis propositis infinities majores occurrunt, tam diu reiteretur donec omnes termini

$$x^\alpha,\ x^\beta y,\ x^\gamma y^2,\ x^\delta y^3, \text{ etc.},$$

*

cum binis assumtis vel prodeant homogenei, vel prae iis evanescant. Hocque modo tandem pervenietur ad aequationem duobos pluribusve terminis constantem, qua natura curvae in loco $x=0$ exprimetur, ex qua deinceps non difficile erit tangentis positionem definire.

17. Quodsi ergo hoc modo plures termini relinquantur, ii progressionem geometricam constituent, atque ex hac consideratione facile est istos terminos mechanice determinare, eo scilicet modo, * quem Neutonus per parallelogrammum et regulam tradidit (Fig. 42). Si enim termini aequationis omissis coëfficientibus modo ante exposito in cellulas parallelogrammi aequaliter divisas inscribantur, atque in unaquaque cellula punctum medium notetur, facile perspicitur, terminos, qui in ratione geometrica progrediuntur in directum fore dispositos. Sic linea aa per puncta media cellularum transit, in quibus reperiuntur termini isti progressionem geometricam tenentes: x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^5. Linea autem bb transit per puncta media cellularum x^3, x^2y^2, xy^4, y^6, et linea cc per puncta media cellularum x, x^2y^2, x^3y^4, x^4y^6, atque linea dd ducta est per puncta media cellularum, quae hanc praebent progressionem geometricam: y, xy^2, x^2y^3, x^3y^4, x^4y^5, x^5y^6.

18. Si igitur puncta media cellularum pro veris locis singulorum terminorum habeantur, et linea recta utcunque per hoc parallelogrammum traducatur, termini in ista linea constituti progressionem geometricam formabunt; ideoque si eorum duo fuerint homogenei, omnes erunt homogenei. Deinde ex ante expositis facile liquet, omnes terminos, qui supra hujusmodi lineam rectam cadunt, respectu eorum, qui in ipsa hac linea sint positi, fore infinite magnos, terminos autem, qui infra hanc lineam cadunt eorumdem respectu futuros esse infinite parvos, ideoque prae iis evanescere, posito scilicet $x=0$. Si enim series verticales interpolentur, termini interpolati omnes, quorum loca in lineam rectam incidunt, progressionem geometricam constituent, quorum respectu superiores omnes sunt infiniti, inferiores infinite parvi. Sic recta bb interpolatione instituta transibit per terminos

$$x^3,\ x^{\frac{5}{2}}y,\ x^3y^2,\ x^{\frac{3}{2}}y^3,\ xy^4,\ x^{\frac{1}{2}}y^5,\ y^6.$$

19. Si igitur ejusmodi termini desiderentur, quorum respectu reliqui omnes pro nihilo haberi queant, linea recta per duos ejusmodi terminos duci debebit, ut supra eam nulli prorsus termini existant. Unde si aequationis propositae singuli termini in cellulas ipsis convenientes hujus parallelogrammi inscribantur, et cellulae, quarum termini in aequatione desunt, vacuae relinquantur, per ejusmodi duos supremos terminos in duabus columnis verticalibus linea recta duci, vel ipsis regula applicari debet, ut super ea nulli prorsus termini appareant. Hoc enim facto bini illi termini, vel plures, si qui in istam eandem lineam rectam cadant, non solum progressionem geometricam formabunt, sed ita erunt comparati, ut prae iis reliqui omnes aequationis termini negligi queant. His ergo terminis in aequatione expunctis ii, qui sunt residui, naturam curvae in loco $x=0$ expriment.

20. Si linea recta hoc modo ducta duos tantum terminos exhibeat, habebitur aequatio binomia pro curva in loco $x=0$, ejusque ergo tangens per praecepta ante tradita invenietur, nisi linea illa recta fuerit horizontalis, quo casu applicata y vel finitum vel imaginarium obtinebit valorem; priori que casu tangens ex his duobus terminis definiri nequit. Hoc ergo casu regula motu sibi parallelo promoveatur, donec unum pluresve novos terminos attingat, hique ad illos adjiciantur, et ex aequatione resultante tangens definiatur. Cum enim reliqui termini prae his de novo adjectis evanescant,

aequatio pro curva erit completa in loco $x = 0$, nisi forte et isti novi termini evanescant, si ipsi y valor ante inventus tribuatur. His ergo incommodis ut remedium afferatur, expediet, si ex terminis primo inventis valor finitus pro y puta $y = a$ fuerit inventus, ut substitutione $y = a + z$ utamur, hincque aequationem inter x et z modo supra descripto examini subjiciamus.

21. Verum si hanc substitutionem $y = a + z$ evitare velimus, invento valore finito $y = a$, differentietur tota aequatio proposita, quaeraturque ratio $\frac{dy}{dx}$. Tum in expressione inventa fiat ubique $x = 0$ et $y = a$, sicque prodibit tangens anguli, quem tangens curvae in isto puncto cum directione axis constituit. Hoc modo etiam, si forte applicata y plures habuerit valores finitos, puta $y = a$, $y = b$, $y = c$, etc., pro singulis ex eadem formula $\frac{dy}{dx}$ positio tangentis reperietur; cum si substitutione uti voluerimus, pro unoquoque valore ipsius y peculiarem substitutionem fieri oporteret. Plerumque etiam in differentiatione aequationis plures terminos omittere licet, ac saepenumero sufficit ope regulae proximum terminorum ordinem adjicere; cum tamen dentur casus, quibus ad ultimum usque terminorum ordinem procedendum est, consultius est totam aequationem differentiare, quam omissione terminorum errorem in determinatione tangentis committere.

22. Facilius autem judicare licebit, utrum aliquot aequationis terminos omittere liceat, si aequatio proposita secundum dimensiones ipsius x disponatur, atque factores harum potestatum in divisores resolvantur. Ita si hujusmodi aequatio fuerit proposita

$$(a-y)^4 - 3(a-y)^3 x + 2(a-y)^2 xx - (a-y)x^3 + x^4 = \frac{x^5}{a},$$

ubi posito $x = 0$ fit $y = a$, in differentiatione nulli termini praeter ultimum rejici poterunt, sicque quinque terminorum ordines, quos promotio regulae horizontaliter deorsum facta indicat, assumi oportebit. Fiet enim

$$-4dy(a-y)^3 + 9dy(a-y)^2 x - 4dy(a-y)xx + dy.x^3 - 3dx(a-y)^3 + 4x\,dx(a-y)^2 -$$
$$3xx\,dx(a-y) + 4x^3\,dx = \frac{5x^4\,dx}{a},$$

seu $$\frac{dy}{dx} = \frac{3(a-y)^3 - 4x(a-y)^2 + 3xx(a-y) - 4x^3 + \frac{5x^4}{a}}{-4(a-y)^3 + 9(a-y)^2 x - 4(a-y)xx + x^3}.$$

statuatur jam $y = a$ et $x = 0$, et quia in singulis terminis cyphra tres habet dimensiones, praeter $\frac{5x^4}{a}$ hunc solum rejicere licet.

23. Quia igitur hoc casu tam numerator quam denominator evanescit, atque omisso termino $\frac{5x^4}{a}$ reliquorum terminorum nullus prae ceteris rejici potest, ad tangentem definiendam aliud remedium non superest, quam ut substitutione $y = a - z$ seu $a - y = z$ utamur, qua facta aequatio pro curva transit in hanc formam:

$$z^4 - 3z^3 x + 2zzxx - zx^3 + x^4 = \frac{x^5}{a}.$$

His autem terminis in parallelogrammum dispositis regula indicabit hos terminos, quibus natura curvae casu $x = 0$ exprimitur:

$$z^4 - 3z^3 x + 2zzxx - zx^3 + x^4 = 0.$$

Ponatur $z = px$, ut sit $p^4 - 3p^3 + 2pp - p + 1 = 0$, cujus radices, quarum duae sunt reales $p = 1$ et $p = 2,2055$ proxime, dabunt aequationes pro lineis rectis, quae erunt tangentes totidem curvae ramorum per initium abscissarum transeuntium, radices vero binae imaginariae indicant punctum conjugatum, pro quo $x = 0$ et $z = 0$. Atque ex hoc exemplo patet, tutissimam tangentis inveniendae methodum saepe in substitutione esse sitam.

24. Cum igitur haec substitutionis methodus sit tutissima neque unquam investigationem in ambiguo relinquat, eam prae ceteris commendamus. Quoties ergo evenit, ut regula in situ horizontali terminos aequationis eligendos indicet, quo casu utique semper supremis cellulis erit applicata, cum aequatio semper unum saltem terminum ex serie suprema contineat, quia alias per x foret divisibilis, toties valor finitus pro y inde resultans ope substitutionis eliminetur, atque aequatio inter x et novam variabilem introductam denuo ad parallelogrammum examinetur. Hoc ergo modo situs regulae horizontales, qui tangentis positionem non determinant, excluduntur, atque omnis investigatio ad situs regulae obliquos reducitur, ex quibus valor ipsius y semper vel $= 0$ vel $= \infty$ elicitur, quibus casibus determinatio tangentis est in promtu.

25. Si enim regula secundum praecepta ante tradita applicata situm tenet obliquum, vel duos vel plures suppeditabit terminos, ex quibus aequatio utramque variabilem x et y continens conficitur, ex qua propterea tangentis positio determinatur; si enim duos tantum praebeat terminos, aequatio inde hujusmodi orietur: $y^m = Cx^n$, ex qua tangentem jam supra definivimus. Sin autem tres pluresve terminos exhibeat, ii erunt in progressione geometrica, atque hujusmodi aequationem pro curva praebebunt:

$$A + Bx^m y^n + Cx^{2m} y^{2n} + Dx^{3m} y^{3n} + Ex^{4m} y^{4n} + \text{etc.} = 0,$$

quae posito $x^m y^n = p$ induet hanc formam

$$A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + Ep^4 + \text{etc.} = 0.$$

Ex hac eliciantur omnes radices reales ipsius p, qui sint $p = \alpha$, $p = \beta$, $p = \gamma$, etc., unde totidem prodibunt aequationes inter x et y binomiales

$$x^m y^n = \alpha,\ x^m y^n = \beta,\ x^m y^n = \gamma,\ \text{etc.},$$

quibus totidem curvae rami cum tangentibus assignantur. Radices autem imaginariae absentiam applicatarum, quae abscissae $x = 0$ respondeant, indicant, vel puncta conjugata, uti ante jam monuimus. Binae autem radices imaginariae puncta conjugata sine tangentibus indicabunt.

26. Interdum autem fieri potest, ut regula duobus pluribusve modis ita duobus supremis terminis applicari queat, ut nulli termini supra eam compareant. Quod evenit si curva plures habeat ramos abscissae $x = 0$ respondentes, sicque singulorum horum ramorum tangentes innotescent. Quae investigatio tangentium, quo facilius perspiciatur, simulque usus parallelogrammi Neutoniani uberius explicetur, exempla aliquot adjungamus, in quibus omnes isti casus diversi occurrant, ita ut hoc modo facile cognoscere queamus, quot curvae rami abscissae $x = 0$ respondeant, et quales habituri sint tangentes in hoc loco, sive rami in infinitum excurrant, sive in spatio finito subsistant.

Exemplum 1. *Proposita curva hac aequatione contenta*

$$x^2 - xy + 2y^3 + 2x^4 - 3x^3y^2 - 3x^2y^3 - 2xy^4 + 4x^2y^4 - 2x^5y + 5x^4y^3 - x^5y^4 + 4x^4y^5 = 0$$

invenire tangentes ejus ramorum abscissae $x = 0$ *respondentium.*

Rejectis coëfficientibus, si termini hujus aequationis in parallelogrammum modo ante descripto inscribantur, apparebit regulam triplici modo ita ad duos terminos applicari posse, ut supra eam nulli prorsus termini appareant, quos regulae situs in figura 43 lineae Aa, Bb, Cc, repraesentant. *
Primus situs Aa, qui terminos xx et xy praebet, indicat curvam propositam ad abscissarum initium ramum habere aequatione hac $xx - xy = 0$ (reliquis nempe terminis omnibus neglectis) expressum, qua per x divisa concludimus rectam hac aequatione $x - y = 0$ contentam fore hujus rami tangentem. Altera regulae positio Bb terminos y^3 et xy^4 tantum relinquit, unde aequatio nascitur $2y^3 - 2xy^4 = 0$ seu $1 - xy = 0$, quae aequatio cum sit pro hyperbola, patet hanc hyperbolam pro casu $x = 0$ curvae propositae partem constituere: fit nempe applicata y infinite magna simulque tangens curvae existit. Ex tertio regulae situ oritur aequatio his duobus terminis contenta: $-2xy^4 + 4x^4y^5 = 0$, seu $1 - 2x^3y = 0$, et linea hyperbolica hac aequatione contenta naturam aliorum ramorum hujus curvae pro $x = 0$ repraesentabit. Geminas ergo haec curva habebit asymtotas ad axem in initio abscissarum normales, alteram naturae $1 - xy = 0$, alteram $1 - 2x^3y = 0$. Praeterea vero ramus axem in initio abscissarum sub angulo semirecto intersecabit, cum ejus tangens sit recta hac aequatione $x = y$ expressa.

Exemplum 2. *Proposita curva hac aequatione contenta*

$$x^4 - 3x^3y + x^4y^2(1 + xx) + 2xy^3(1 - x^4) + x^2y^4(1 + xx) - 4y^5(1 - x) - 3x^6y^6 + x^5y^7 = 0$$

invenire tangentes ejus ramorum, qui abscissae $x = 0$ *respondent.*

Terminis hujus aequationis in cellulas parallelogrammi dispositis, regula iterum triplici modo binis terminis ita applicari potest, ut nulli reliquorum supra promineant (Fig. 44). Ac prima quidem positio *
Aa hos tres terminos praebet x^4, x^3y, xy^3, unde haec aequatio oritur $x^4 - 3x^3y + 2xy^3 = 0$ seu $x^3 - 3xxy + 2y^3 = 0$, cujus curva cum proposita pro casu $x = 0$ congruit. Complectitur autem haec aequatio primum lineam rectam $x - y = 0$, quae ergo erit tangens curvae in abscissarum initio; tum vero aequationem $xx - 2xy - 2yy = 0$, seu $x = y(1 \pm \sqrt{3})$, unde denuo duae tangentes ad axem obliquae resultant, ita ut hinc curva proposita tres obtineat ramos in axis initio concurrentes. Altera regulae positio Bb dat terminos xy^3 et y^5, seu hanc aequationem $2xy^3 - 4y^5 = 0$ sive $2yy = x$, unde tangens quoque ad axem perpendicularis oritur, et ramum curvae per axis initium perpendiculariter trajicientem indicat. Tertia regulae positio dat terminos y^5 et x^5y^7, hincque aequationem hanc: $-4y^5 + x^5y^7 = 0$, seu $x^5y^2 = 4$, unde in initio axis fit applicata $y = \pm\infty$, quae ergo simul erit asymtota curvae propositae, ideoque tangens. Pro initio igitur abscissarum quatuor rami curvae se mutuo intersecant, sicque punctum quadruplex constituunt.

27. Ex his ergo exemplis satis apparet, quemadmodum ex regulae, secundum praecepta tradita applicatae, positionibus indoles earum curvae partium, quae abscissae evanescenti $x = 0$ respondent, sit dignoscenda. Hac nimirum ratione quantitas omnium applicatarum, quae abscissae $x = 0$ conveniunt, innotescit: primo enim cum quaelibet applicata vel sit evanescens, vel finitae magnitudinis, vel infinite magna, haec diversitas indicatur per inclinationem linearum Aa, Bb, Cc, quae situs regulae repraesentant, siquidem bina parallelogrammi latera, prouti tabula refert, habeantur pro horizontalibus, reliqua pro verticalibus. Lineae enim Aa, Bb, Cc, quae situs regulae pro casu $x = 0$ exhibent, a sinistra dextrorsum sunt ductae, ac primo ascendunt ut Aa, tum vero descendunt

ut Cc, fieri quoque possunt horizontales, quem autem casum, cum positionem tangentis non indicet, ob rationem ante allegatam removimus.

28. Quo clarius intelligatur, quomodo ex regulae inclinatione judicium sit ferendum, sit (Fig.) EF linea horizontalis et lineae Ea, Ec, Ee referant situs regulae a sinistra dextrorsum ascendentes, AB situm regulae horizontalem, et bF, cF, fF situs regulae descendentes. Jam igitur manifestum est situs regulae ascendentes applicatas semper evanescentes praebere, ita ut quot hinc reperiantur aequationis radices, tot curva habitura sit applicatas evanescentes, quae abscissae $x = 0$ respondent. Situs autem regulae horizontalis AB indicabit applicatas finitae magnitudinis, quae abscissae $x = 0$ respondent; at situs descendentes omnes bF, cF, fF praebebunt applicatas infinite magnas axi initio insistentes, quae ideo totidem ramos curvae in infinitum extensos declarabunt. Hinc ergo omnia curvae puncta, quae ad abscissam evanescentem $x = 0$ pertinent, una quasi operatione inveniuntur, sive ea in axem incidant, sive ab eo intervallo finito sint remota, sive infinito.

29. Quoniam autem hic non tantum ipsa curvae puncta, quae abscissae $x = 0$ respondent, spectamus, sed etiam positionem tangentis, quae curvam in quolibet horum punctorum tangit, requirimus, hoc quoque ex situ regulae colligere licet, nisi is fuerit horizontalis. Nam ante jam animadvertimus, si situs regulae fuerit horizontalis velut AB, ex aequatione, quam termini a regula trajecti constituunt, cum sit hujus formae

$$0 = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4 + \text{etc.},$$

nihil aliud concludi posse, nisi tot curvae extare puncta ab axe intervallo finito distantia, quot haec aequatio habuerit radices reales finitas; radices enim, si quas forte habet, evanescentes ob $\alpha = 0$ simul per reliquos regulae situs indicantur. Cum igitur radices hae finitae per hujusmodi formulas $y = a$, $y = b$, $y = c$ etc., indicentur, praeter distantias horum punctorum curvae ab axe nihil cognoscitur, neque inde positio tangentium definiri potest. Ex quo jam supra praecepimus his casibus positionem axis statuendo $y = a + z$, vel $y = b + z$, etc., immutandam esse, ut haec puncta in novum axem incidant; tum enim nova hac aequatione in parallelogrammum disposita, ista puncta per situs regulae obliquos indicabuntur, unde tangentis positio colligi poterit.

30. Si enim situs regulae fuerit obliquus et quidem ascendens velut Ea, vel Ec, vel Ee, ius non solum puncta curvae in axis initium incidentia indicantur, sed etiam tangentium directio inde colligitur, unde tractus ramorum curvae, qui per axis initium transeunt, innotescit. Ex constitutione enim parallelogrammi, si ejus cellulae fiant quadratae, facile perspicitur, si regulae positio Ec cum linea horizontali EF angulum semirectum FEc comprehendat, tangentes indicari obliquas; namque termini, qui a regula trajiciuntur, aequationem homogeneam hujusmodi

$$Ax^m + Bx^{m-1}y + Cx^{m-2}y^2 + Dx^{m-3}y^3 + \text{etc.} = 0$$

dabunt, cujus factores simplices reales $\alpha x + \beta y = 0$ totidem praebebunt lineas rectas ad axem obliquas, quae erunt curvae tangentes in axis initio. Factores autem imaginarii, qui continentur in factoribus realibus secundi ordinis, veluti $\alpha xx + \beta xy + \gamma yy = 0$, quia iis positis $x = 0$ et $y = 0$ tamen satisfit, indicabunt puncta curvae conjugata, a tractu ramorum separata, in quibus proinde tangentium conceptus non habet locum.

31. Si regula sursum vergens Ea majorem semirecto angulum cum linea horizontali EF constituit, termini, qui ab ea trajiciuntur, erunt hujusmodi I. $Ax^2 + By = 0$, II. $Ax^3 + By = 0$, III. $Ax^3 + By^2 = 0$, IV. $Ax^4 + By = 0$, V. $Ax^4 + Bx^2y + Cy^2 = 0$, VI. $Ax^4 + By^3 = 0$ etc., in quibus numerus dimensionum ab x et y ortarum decrescit secundum progressionem arithmeticam, siquidem plures duobus fuerint termini. His casibus quidem semper punctum curvae in axe ob $x = 0$ et $y = 0$ indicatur, sed tangens tantum exhibetur, cum aequatio non fuerit imaginaria, manifestumque est tangentem, si quae datur, in ipsum axem incidere. Quodsi aequatio ut V pluris duobus constet terminis, in factores erit resolvenda, qui singuli si sint reales, ramos curvae axem in initio tangentes declarabunt; sin autem sint imaginarii, bini praebebunt puncta conjugata, quae autem alius erunt naturae atque ea, quae ex § praecedente sunt orta, siquidem discrimen inter puncta conjugata statuere licet.

32. Si regula sursum vergens Ee cum horizontali EF faciat angulum semirecto minorem, in aequationibus inde ortis dimensiones ipsarum x et y aequabiliter crescent, eruntque hujusmodi:

$$\text{I. } Ax + By^2 = 0,\quad \text{II. } Ax + By^3 = 0,\quad \text{III. } Ax^2 + By^3 = 0,\quad \text{IV. } Ax + By^4 = 0,$$
$$\text{V. } Ax^2 + Bxy^2 + Cy^4 = 0,\quad \text{VI. } Ax^3 + By^4 = 0, \text{ etc.},$$

quae omnes puncta curvae in axe designant, ramorumque eo desinentium tangentes, siquidem fuerint reales, ad axem erunt perpendiculares; sin autem aequatio pluribus constans terminis uti V factores habeat imaginarios, puncta tantum conjugata sine tangentibus indicabuntur. Apparet ergo singulas regulae positiones sursum vergentes Ea, Ec, Ee cuncta curvae puncta in axis principio sita praebere, atque etiam inde tangentes singulorum curvae ramorum ibi concurrentium cognosci; sic regulae positiones Ea praebent eos ramos, qui ab ipso axe tanguntur, positio Ec eos, quorum tangentes in axem sunt obliquae, ac denique positiones Ee eos ramos, qui axi perpendiculariter insistunt.

33. Quemadmodum si regulae positio AB fit horizontalis, ea curvae puncta abscissae $x = 0$ respondentia prodeunt, quae ab axe intervallo finito distant. Ita si regulae directio deorsum vergat veluti bF, cF, fF, puncta curvae ab axe in infinitum distantia, vel pro quibus fit $y = \infty$ existente $x = 0$, exhibentur, atque natura ramorum hic in infinitum excurrentium, quatenus ad abscissas minimas x referuntur, exprimetur hujusmodi aequationibus hyperbolicis: $A + Bxy = 0$, $A + Bx^2y = 0$, $A + Bxy^2 = 0$, ex quibus intelligitur ipsam applicatam in axis principio ductam fore horum curvae ramorum asymtotas. Fieri quoque potest, ut hujusmodi aequatio veluti $a^4 + xxyy = 0$ imaginaria complectatur, cum inde sit $y = \frac{aa}{x}\sqrt{-1}$, sicque nulla tangens indicetur. Interim tamen cum $0 \cdot \sqrt{-1}$ sit $= 0$, erit quoque $\frac{\sqrt{-1}}{0} = \frac{1}{0}$ ideoque infinitum, ita ut nihilominus his casibus applicata y posito $x = 0$ fiat infinita, etiamsi punctum curvae ea notatum tangente destituatur; affirmare itaque liceat in intervallo infinito ab axe extare quoque puncta conjugata.

34. Hoc modo ergo ope parallelogrammi tangentes ramorum curvae, qui abscissae $x = 0$ respondent, inveniuntur, iis tantum exceptis casibus, quibus huic abscissae evanescenti applicatae finitae magnitudinis respondent. Verum etiam his casibus ope differentiationis, qua valor fractionis $\frac{dy}{dx}$ eruitur, positio tangentis definiri poterit, nisi curvae ibi existat punctum duplex vel multiplex,

uti jam supra annotavimus. Sit enim $y = a$ posito $x = 0$, atque in fractione finita $\frac{P}{Q}$, quae pro $\frac{dy}{dx}$ est inventa, ponatur tam in numeratore P quam in denominatore Q et $x = 0$ et $y = a$, valor resultans, si fuerit determinatus, indicabit et punctum curvae ibi extare simplex, ejusque simul tangentem. Quodsi autem hac facta substitutione et numerator P et denominator Q evanescat, indicium hoc erit punctum curvae esse duplex vel adeo multiplex, quo casu aequatio ponendo $y = a + z$ ad alium axem erit reducenda, in quem id curvae punctum incidat, ut deinceps ope parallelogrammi natura ramorum in illo puncto concurrentium investigari possit.

35. Altera pars instituti, quod hoc capite suscepimus, versatur in investigatione ramorum, qui abscissae infinite magnae $x = \infty$ respondent, quod negotium etiam facile ope parallelogrammi expediri

* potest. Postquam enim (Fig. 42) singuli termini aequationis in cellulas parallelogrammi fuerint dispositi, manifestum est in qualibet columna verticali omnes terminos prae infimo evanescere, ita ut ad hanc investigationem sufficiat ex singulis columnis solos terminos infimos retinuisse. Tum vero aeque evidens est atque in casu praecedente, si regula ad hos terminos infimos ita applicetur, ut nulli termini infra eam promineant, prae terminis, per quos regula transit, omnes terminos superiores evanescere casu $x = \infty$, ita ut singulae hujusmodi regulae positiones praebiturae sint terminos aequationis inter se homogeneos, prae quibus reliqui omnes rejici queant.

36. Proposita ergo aequatione quacunque pro curva inter coordinatas x et y, si scire velimus puncta curvae, abscissae x in infinitum abeunti respondentia, tum singuli aequationis termini, ut ante est praeceptum, in cellulas parallelogrammi inscribantur, et quoties fieri potest regula ad terminos binos infimos ita applicetur, ut nulli terminorum reliquorum infra regulam cadant, quo facto unaquaeque hujusmodi regulae positio eos monstrabit aequationis terminos, prae quibus reliqui omnes casu $x = \infty$ rejici queant, indeque natura ramorum curvae in infinitum excurrentium, qui quidem abscissae $x = \infty$ respondeant, colligetur. Hinc scilicet patebit, utrum applicatae y valores, ipsi $x = \infty$ respondentes, evanescant, an sint finitae magnitudinis, et an ipsae fiant infinitae; quod discrimen ex diversis regulae positionibus respectu horizontalium laterum parallelogrammi colligetur.

37. Quemadmodum autem judicium institui oporteat circa naturam hujusmodi ramorum in infinitum extensorum facilius exemplo quodam evolvendo quam praeceptis tradendis doceri potest.

Exemplum. *Invenire naturam ramorum pro abscissa* $x = \infty$ *curvae hac aequatione expressae*

$$\begin{aligned} 0 = {} & 2a^{10}xy - 3a^9x^3 + 2a^8x^2y^2 - 3a^7x^5 - 2a^5x^4y^3 + a^4x^7y - 2a^3x^5y^4 - 4a^2x^8y^2 + 2ax^8y^3 + \ldots \\ & - 3a^9y^3 + 4a^8y^4 \quad - a^7x^4y + 3a^5x^7y^4 - a^4x^6y^2 - 3a^3x^2y^7 \qquad - 4ax^6y^5 \ldots \\ & \qquad\qquad - 2a^5x^2y^5 \qquad\qquad\qquad + 2ax^4y^7 \ldots \\ & \qquad\qquad + a^5xy^6 \end{aligned}$$

* Dispositis terminis hujus aequationis in cellulas parallelogrammi (Fig. 46), rejectis coëfficientibus, regula binis terminis in quaque columna verticali infimis quoties fieri potest ita applicetur, ut infra eam nulli termini appareant, sicque progrediendo a dextra ad sinistram quinque regulae situs prodibunt, qui indicantur in figura lineis Gg, Hh, Ji, Kk et Ll, quarum duae priores deorsum tendunt, duae posteriores vero sursum, at media Ji est horizontalis. Jam singuli hi situs sequenti modo evolvantur.

I. Situs Gg praebet terminos x^4y^7 et x^6y^6, ex quibus formatur haec aequatio:

$$2ax^4y^7 - x^6y^6 = 0 \quad \text{seu} \quad 2ay = xx,$$

pro parabola, unde concluditur curvam habere pro abscissa $x = \infty$ ramos in infinitum extensos parabolicos, qui in infinito cum parabola hac aequatione $2ay = xx$ contenta confundantur, ita ut abscissae $x = \infty$ respondeat applicata $y = \infty$, quae eadem abscissae $x = -\infty$ conveniat. Hi igitur rami asymtotis rectis destituuntur.

II. Situs Hh, qui ad horizontalem angulo semirecto est inclinatus, praebet terminos $x^6 y^6$ et $x^8 y^4$, unde oritur aequatio $x^8 y^4 - x^6 y^6 = 0$ seu $xx - yy = 0$ quae resolvitur in has duas $x + y = 0$ et $x - y = 0$, utramque pro linea recta ad axem angulo semirecto inclinata, altera quidem inclinata, altera reclinata. Utraque igitur ostendit asymtotam rectam, ita ut haec curva duas habeat asymtotas, quae vel in ipsas illas rectas aequationibus $x + y = 0$ et $x - y = 0$ expressas, incidant, vel ipsis erunt parallelae. Quanto autem intervallo ab iis distent, hinc definiri nequit, quoniam ad hoc reliquorum terminorum aequationis ratio est habenda. Inclinatio ergo tangentium ad axem tantum hic indicatur; puncta vero, ubi axem secent, hinc non cognoscuntur. Ceterum hinc apparet tam abscissae $x = +\infty$ quam $x = -\infty$ geminas convenire applicatas $y = +\infty$ et $y = -\infty$, atque has duas asymtotas se invicem ad angulos rectos intersecare, cum utraque ad axem angulo semirecto inclinetur.

III. Situs horizontalis Ji per tres terminos $x^8 y^4$, $x^8 y^3$ et $x^8 y^2$ transit, indeque emergit haec aequatio $x^8 y^4 + 2ax^8 y^3 - 4aax^8 y^2 = 0$ seu $y^2 + 2ay - 4aa = 0$, ex qua resultant duo ipsius y valores constantes: $y = -a + a\sqrt{5}$ et $y = -a - a\sqrt{5}$, qui indicant duas rectas axi parallelas ab eoque his intervallis distantes, quae simul ipsae erunt curvae asymtotae; nam cum abscissae $x = \infty$, vel etiam $x = -\infty$ valores finiti ipsius applicatae y respondeant, manifestum est hos valores lineas rectas formare, quae adeo ipsae futurae sint curvae asymtotae. Hoc ergo casu non solum inclinatio linearum, quae curvam in infinito tangunt, innotescit, sed etiam ipsa harum linearum positio designatur.

IV. Situs regulae Kk transit per terminos $x^8 y^2$ et $x^7 y$, ex quo formabitur aequatio $-4a^2 x^8 y^2 + a^4 x^7 y = 0$ seu $a^2 = 4xy$, unde colligitur posito $x = \pm\infty$ fore $y = 0$. Sumta ergo abscissa x infinite magna, ramus curvae in ipsum axem incidit, eritque ideo ipse axis asymtotos, perinde atque in hyperbola aequatione $aa = 4xy$ contenta.

V. Situs denique regulae Ll terminos dat $x^7 y$ et x^5, unde obtinetur aequatio

$$a^4 x^7 y - 3a^7 x^5 = 0 \quad \text{seu} \quad x^2 y = 3a^3, \quad \text{quae dat} \quad y = \frac{3a^3}{xx}.$$

Fit igitur pariter $y = 0$ posito $x = \pm\infty$, sicque hinc ipse axis denuo erit asymtota lineae curvae propositae. Sed hi curvae rami, qui ad axem convergunt, diversi sunt ab iis, quos situs praecedens regulae suppeditavit, quoniam horum indoles ad hyperbolam cubicam aequatione $xxy = 3a^3$ accedit, cum illorum natura per hyperbolam conicam indicetur.

38. Ex hoc exemplo intelligitur, quomodo in genere ex ratione situs regulae de natura ramorum in infinitum porrectorum sit judicandum. Scilicet si situs regulae a dextra ad sinistram progrediendo examini subjiciamus, primo occurrunt ii, qui deorsum vergunt ut Gg, Hh, tum horizontalis, si quis adest, ut Ji, denique sursum vergentes ut Kk et Ll. Ac primo quidem si regulae situs est horizontalis, qui est quasi medium inter descendentes et ascendentes, ex eo proveniunt valores finiti applicatae y, qui abscissae infinitae x respondeant, hocque casu inveniuntur asymtotae curvae, quae

axi sunt parallelae, ab eoque intervallo finito distantes, atque hujusmodi asymtotae tot prodibunt quot aequatio ex hoc regulae situ nata habuerit radices reales. Ubi notandum si duae pluresve radices fuerint aequales, totidem asymtotas in unam coalescere.

39. Quando autem, ut primo loco assumsimus, regula deorsum vergit ut Gg vel Hh, tum abscissis infinitis applicatae quoque infinitae convenient, et curva ramos habebit ab axe in infinitum divergentes. Praeterea vero hinc dijudicari potest, utrum hi rami sint hyperbolici seu asymtotis praediti, an vero parabolici. Scilicet si angulus, quo situs regulae uti Gg ad horizontem inclinatur, major fuerit semirecto, ramus erit parabolicus axem versus convexus, ejusque natura exprimetur aequatione parabolica $y^m = Ax^n$, in qua exponens ipsius x major est exponente ipsius y. Contra vero, si angulus inclinationis regulae deorsum vergentis ad horizontem minor fuerit semirecto, arcus itidem provenit parabolicus, sed concavitate axem respiciens, et in aequatione parabolica ipsi conveniente $y^m = Ax^n$ erit $m > n$. Priori casu tangens curvae in punctis abscissis infinitis respondentibus axem in distantia infinita normaliter secabit, posteriori vero casu axi ad intervallum infinitum erit parallela.

40. Si regula sinistrorsum et deorsum vergens cum horizontali faciat angulum semirectum ut Hh, ea per omnes terminos homogeneos summae dimensionis transibit, atque aequatio ex hoc regulae situ orta erit hujusmodi

$$Ax^m + Bx^{m-1}y + Cx^{m-2}y^2 + Dx^{m-3}y^3 + \text{etc.} = 0.$$

Hujus igitur radices, sunt investigandae quotquot habuerit reales, quoniam imaginariae nihil nisi forte puncta conjugata in infinitum distantia indicant. Radices vero reales quotquot fuerint inter se inaequales, cum hujus sint formae $\alpha x + \beta y = 0$, inclinationem tangentium in infinito indicabunt, eandemque inclinationem asymtotae habebunt, etsi ipsa asymtotarum positio hinc non definiatur. Radices autem aequales vel plures asymtotas coalescentes, vel etiam inter se parallelas monstrabunt, siquidem in spatium finitum cadunt; sin autem ad axem in intervallo finito non accedant, tum aequalitas plurium radicum ramos parabolicos, quorum axes eandem teneant inclinationem, declarabit, quos proinde peculiari ratione indagari oportet.

41. Quando vero regula sinistrorsum ac sursum est directa, uti Kk vel Ll, aequationes inde suppeditatae semper indicant abscissis infinitis respondere applicatas evanescentes; rami igitur curvae per has aequationes denotatae in spatio infinito cum axe confundentur, eritque propterea ipse axis asymtota horum arcuum. Quin etiam diversa inclinatio regulae simul diversam naturam horum ramorum hyperbolicorum monstrabit, sive cum hyperbola appolloniana conveniant, quod evenit si regula ad angulum semirectum est inclinata, sive ad naturam aliarum hyperbolarum superiorum ordinum sint referendae. Quare hoc casu circa indolem ramorum curvae in infinitum excurrentium nihil praeterea desiderari potest.

42. Quoniam casu, quo tangens curvae in punctis, quae abscissae infinitae respondent, ad axem obliqua est inventa, in dubio relinquitur, utrum ea cum axe alicubi concurrat, nec ne? Dubium hoc resolvetur, si aequatio curvae ad alium axem revocetur tangenti illi parallelum; scilicet si pro tangente inventa fuerit haec aequatio $\alpha x - \beta y = 0$, vel si plures radices sint aequales, haec $(\alpha x - \beta y)^n = 0$. Ducatur ad axem oblique recta aequatione $\alpha x - \beta y = 0$ expressa, haecque pro

axe assumatur, in quo abscissae sint $= t$, et applicatae ad eum normales $= u$; quo facto fiet

$$x = \frac{\beta t - \alpha u}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}} \quad \text{et} \quad y = \frac{\alpha t + \beta u}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}},$$

sicque natura curvae exprimetur aequatione inter has novas coordinatas t et u, cujus termini si in cellulas parallelogrammi disponantur, loco factoris compositi $(\alpha x - \beta y)^n$ nunc prodibit factor simplex $(-u\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)})^n$, qui cum aliis adhuc terminis, quos regula ostendet, comparatus dabit hujusmodi aequationem $\gamma u^n + \delta t^m = 0$, in qua erit $m < n$, ex qua perspicietur utrum tangens curvae, quae novo axi est parallela, ab eo intervallo finito distet, quod eveniet si $m = 0$, eritque id intervallum $u = \sqrt[n]{-\frac{\delta}{\gamma}}$, an vero infinito, quod evenit si $m > 0$. Illo casu recta axi parallela ab eoque intervallo $u = \sqrt[n]{-\frac{\delta}{\gamma}}$ ducta erit curvae asymtota, et ramus curvae hyperbolicus; posteriori vero casu ramus asymtota destituitur, ac parabolicus vocatur. Intelligitur hinc etiam fieri posse, ut asymtota adeo imaginaria evadat, veluti si $m = 0$, haecque aequatio obtineatur: $uu + aa = 0$, quam impossibilitatem ex aequatione ante axis permutationem concludere non licuerat. Ex quo perspicitur, quantum reductio aequationis ad alium axem subsidii afferat ad naturam curvae accuratius cognoscendam.

43. Fieri etiam potest, ut asymtota hoc modo inventa in ipsum novum axem incidat, seu intervallum u evanescat, quod cum ex formula $\gamma u^n + \delta t^m = 0$ exempli gratia assumta minus appareat, notandum est aequationem, quae hoc casu ex situ regulae derivatur, hujusmodi habituram esse formam generalem $\gamma t^k u^n + \delta t^m = 0$, ita ut sit $m < k + n$, unde manifesto tres casus oriuntur. Primus si $k < m$, ideoque $\gamma u^n + \delta t^{m-k} = 0$, ex quo concluditur facto $t = \infty$ fore quoque $u = \infty$, sicque tangentem a novo axe, cui est parallela, infinite distare, ramumque curvae fore propterea parabolicum seu asymtota destitutum; ubi quidem notari convenit, hunc casum locum habere non posse nisi sit $n > 1$, hoc est nisi in priori evolutione secundum § 40 facta, aequatio

$$Ax^m + Bx^{m-1}y + \text{etc.} = 0$$

duas pluresve radices habeat aequales, quia n assumsimus ad numerum aequalium hujus aequationis radicum $\alpha x - \beta y$ denotandum. Quare, ut ibi jam monuimus, nisi plures radices fuerint aequales, ramus curvae parabolicus esse nequit. Secundus casus est si $k = m$, quo formula superior abit in $\gamma u^n + \delta = 0$ et indicat intervallum asymtotae curvae a novo axe, cui est parallela. Tertius casus locum habet si $k > m$, quo fit $\gamma t^{k-m} u^n + \delta = 0$, hocque manifestum est facto $t = \infty$ fieri $u = 0$, ideoque ipsum novum axem fore curvae asymtotam. Neque vero solum hinc concluditur istum ramum curvae in infinitum protensum esse hyperbolicum, sed etiam natura hyperbolae, quacum congruit, cognoscitur ex aequatione $\gamma t^{k-m} u^n + \delta = 0$.

44. Sin autem tangens curvae in infinitum extensae ejusve asymtota non in ipsum axem incidat, sed ei in dato intervallo sit parallela, uti casu secundo § praec. atque etiam § 38 usu venit, quo situs regulae fit horizontalis, tum hac methodo quidem distantia asymtotae ab axe, cui est parallela, invenitur. Sed natura rami curvae ad istam asymtotam convergentis non agnoscitur, seu hyperbola, quacum conveniat, non definitur, uti eo casu, quo asymtota cum ipso axe confunditur. Quanquam

autem ad praesens institutum nostrum sufficiat positionem tangentis determinasse, tamen levi negotio ea quoque hyperbola assignari potest, ad quam natura rami curvae proxime accedat. Ponamus enim vel ex prima aequatione inter x et y, vel ex jam immutata inter t et u prodiisse pro casu $x=\infty$ vel $t=\infty$ hanc aequationem y vel $u=a$, tum haec ipsa recta ab axe intervallo $=a$ distans pro novo axe assumatur, statuendo y vel $u=a+v$, sicque obtinebitur nova aequatio inter abscissam x seu t et applicatam v, quae ad parallelogrammum reducta hunc curvae ramum per situm regulae a dextra ad sinistram sursum vergentis veluti Kk seu Ll exhibebit, ex quo non solum constabit hunc novum axem ipsum esse curvae asymtoton, sed etiam regula aequationem pro hyperbola illa suppeditabit, quae naturam rami curvae in infinitum excurrentis continebit, quemadmodum jam supra § 41 annotavimus. Hocque ergo modo omnes curvae rami ad abscissam infinitam relati non solum invenientur, sed etiam parabolae vel hyperbolae, quae proxime ad eorum naturam accedant, indicari possunt.

45. Cum igitur aequatione quacunque inter coordinatas orthogonales x et y proposita, curvae per eam expressae natura tam iis in locis, quae abscissae $x=0$, quam in iis, quae abscissae infinitae respondent, definiri queat, manifestum est, commutandis his coordinatis, curvae naturam quoque cognosci posse in iis locis, quae applicatis y vel evanescentibus vel in infinitum abeuntibus respondent. Neque ad hoc opus erit, ut novum parallelogrammum construatur, cum idem, in quo termini aequationis modo ante exposito sunt inscripti, etiam judicio ad applicatas accommodando inservire possit. Quemadmodum enim ante, ubi abscissa erat proposita (Fig. 46), latera parallelogrammi PQ et SR erant tanquam horizonti parallela spectata, ita nunc, proposita applicata altera, latera PS et QR situm horizontalem occupare sunt existimanda, atque plagae laterales dextra et sinistra inter se commutandae, quo facto eaedem conclusiones, quae ante ex situ regulae pro abscissa vel evanescente vel infinita sunt derivatae, iisdem verbis retentis pro applicata vel evanescente vel in infinitum abeunte valebunt.

46. Hinc igitur perspicuum est eandem parallelogrammi figuram ad judicia tam pro abscissa x uti hactenus fecimus, quam pro applicata y adhiberi posse. Quare si utrumque judicium conjunctim instituere velimus, regulam continuo ad binos terminos figurae extimos ita applicari oportet, ut nulli termini extra promineant, quemadmodum in figura videre licet, ubi lineae Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, Ff, Gg, Hh, Ji, Kk, Ll et Mm has regulae positiones indicant, in quibus omnes, quae quidem occurrere possunt, continentur. Harum enim sunt quatuor lateribus parallelogrammi parallelae: Cc, Ff, Ji, Mm, reliquae vero his inter jacentes obliquae, inter quas porro hoc discrimen est notandum, quod aliae cum lateribus horizontalibus angulum semirectum constituant, aliae majorem, aliae minorem semirecto; videmus enim ab hoc discrimine naturam curvae plurimum pendere, siquidem cellulae parallelogrammi quadratae efficiantur.

47. Omnino ergo sedecim diversae regulae positiones occurrere possunt, quas figura 47 ratione inclinationis earum ad latera parallelogrammi repraesentat. Incipiendo scilicet ab ea, quae ad sinistram est perpendicularis, ut AB in Fig. 47 et Mm in Fig. 46 atque circuitum sursum dextrorsum absolvendo, hae sedecim positiones ita ordine procedent:

I.	AB perpendicularis ad sinistram	In	Fig.	46	convenit	Mm
II.	EJ plus semirecto ad horizontem inclinata	«	«	—	«	Aa
III.	EF semirecto ad horizontem inclinata	«	«	—	«	—
IV.	EK minus semirecto ad horizontem inclinata	«	«	—	«	Bb
V.	BC horizontalis superior	«	«	—	«	Cc
VI.	JG minus semirecto ad horizontem inclinata	«	«	—	«	Dd
VII.	FG semirecto ad horizontem inclinata	«	«	—	«	Ee
VIII.	KG plus semirecto ad horizontem inclinata	«	«	—	«	—
IX.	CD perpendicularis ad dextram	«	«	—	«	Ff
X.	GL plus semirecto ad horizontem inclinata	«	«	—	«	Gg
XI.	GH semirecto ad horizontem inclinata	«	«	—	«	Hh
XII.	GM minus semirecto ad horizontem inclinata	«	«	—	«	—
XIII.	DA horizontalis inferior	«	«	—	«	Ji
XIV.	LE minus semirecto ad horizontem inclinata	«	«	—	«	—
XV.	HE semirecto ad horizontem inclinata	«	«	—	«	Kk
XVI.	ME plus semirecto ad horizontem inclinata	«	«	—	«	Ll

Nunc quasnam conclusiones singulae hae positiones pro natura curvae suppeditent, exponamus.

48. Primus regulae situs AB praebet pro applicata $y = 0$ omnes valores finitae magnitudinis abscissae x, seu omnes abscissas finitas indicat, quibus respondet applicata evanescens. Indicat quidem etiam abscissas evanescentes, si aequatio fuerit per x ejusve potestatem divisibilis; sed hi casus per sequentes regulae positiones clarius exhibentur. Tangens autem in his curvae locis non indicatur.

Secundus regulae situs EJ ea curvae puncta indicat, pro quibus est tam $x = 0$, quam $y = 0$, simul autem ostendit tangentem in ipsum axem incidere, seu in his punctis curvam ab axe tangi, et natura curvae accedit ad parabolam $x^m = Cy^n$ existente $m > n$.

Tertius regulae situs EF iterum ea puncta curvae exhibet, pro quibus est tam $x = 0$ quam $y = 0$, sed quorum tangentes sunt ad axem obliquae, earumque simul obliquitas indicatur.

Quartus regulae situs EK etiam nunc ea curvae puncta exhibet, pro quibus est tam $x = 0$ quam $y = 0$; hinc vero concluditur tangentes curvae in his punctis esse ad axem perpendiculares, et natura curvae exprimitur parabola $y^m = Cx^n$ existente $m > n$.

49. Quintus regulae situs BC pro abscissa $x = 0$ praebet omnes finitos valores applicatae y, neque vero tangentes curvae in his punctis indicat.

Sextus regulae situs JG indicat posita abscissa $x = 0$, fieri applicatam y infinitam, ita ut recta ad axem in principio abscissarum normalis sit curvae asymtota, ideoque ramus hic curvae hyperbolicus, cujus natura accedat ad hujusmodi hyperbolam $x^m y^n = C$, ubi sit $n > m$.

Septimus regulae situs FG pariter indicat posito $x = 0$ fieri $y = \infty$, sicque ipsam hanc applicatam fore curvae asymtotam, ejusque ramum hyperbolicum ad naturam hyperbolae conicae $xy = C$ accedentem.

Octavus regulae situs KG quoque pro $x=0$ praebet $y=\infty$, at rami curvae, qui ad hanc applicatam tanquam asymtotam convergunt, ad naturam hujusmodi hyperbolae $x^m y^n = C$ referuntur, ubi sit $m > n$.

50. Nonus regulae situs CD eos abscissae x valores finitos exhibet, quibus respondent applicatae y infinite magnae, haeque ergo erunt simul tangentes et asymtotae curvae. Natura autem hyperbolica, ad quam isti curvae rami pertineant, hinc non cognoscitur.

Decimus regulae situs GL declarat abscissis x infinite magnis respondere applicatas quoque infinite magnas, quae simul sint curvae tangentes, sed cum totae sint in infinitum dissitae, rami hi curvae non hyperbolici censentur, sed parabolici, atque ad hujusmodi naturam parabolicam accedunt $x^m = Cy^n$, ubi sit $m > n$.

Undecimus regulae situs GH pro abscissis x infinitis applicatas y pariter infinitas praebet, per hujusmodi aequationes $y = \alpha x$, ex quibus colligitur tangentem curvae ad axem fore obliquam. Verum hinc neque axis punctum, ubi tangens incidat, innotescit, neque natura rami curvae in infinitum extensi, sive sit hyperbolica, sive parabolica; posterius enim evenire potest, si duae pluresve radices fuerint aequales, ut §§ 40 et 43 est notatum.

Duodecimus regulae situs GM pariter ac bini praecedentes pro abscissis x infinitis applicatas y quoque infinitas ostendit per hujusmodi aequationes $y^m = Cx^n$ ubi $m > n$, hincque simul intelligitur tangentem curvae esse axi parallelam, ab eoque intervallo infinito remotam, ita ut rami curvae hinc resultantes sint parabolici.

51. Decimus tertius regulae situs DA pro abscissis x infinitis applicatas y finitae magnitudinis offert, unde colligitur rectas axi parallelas, quae ab eo intervallis $=y$ sint remotae, fore curvae tangentes ejusque asymtotas. Verum natura hyperbolica, ad quam isti curvae rami referantur, hinc non innotescit.

Decimus quartus regulae situs LE ad abscissas x infinitas refert applicatas y evanescentes, dum hujusmodi praebet aequationes $x^n y^m = C$ ubi $m > n$, eritque ergo ipse axis tangens curvae ejusque adeo asymtota, ac simul natura hyperbolica hujusmodi curvae ramorum innotescit.

Decimus quintus regulae situs HE hujusmodi praebet aequationes $xy = C$ pro abscissis x infinitis, quibus idcirco applicatas nihilo aequales respondere manifestum est. Erit ergo ipse axis tangens et asymtota curvae, cujus natura hyperbola conica exprimitur.

Decimus sextus denique regulae situs ME itidem pro abscissis infinitis x ostendit applicatas y evanescentes, per hujusmodi aequationes $x^m y^n = C$ existente $m > n$, ita ut axis quoque sit tangens et asymtota curvae, cujus natura hyperbolica hinc simul erit manifesta.

52. Quo hae conclusiones, quas singuli isti sedecim regulae situs suppeditant, clarius perspiciantur, in tabula subnexa pro unoquoque tam valores coordinatarum quam positionem tangentium et curvae naturam sive parabolicam, sive hyperbolicam, siquidem ex situ regulae innotescit, exhibeamus:

Situs regulae	*Coordinatae*		*Tangentis inclinatio*	*Natura rami parabolica seu hyperbolica.*
I. AB	$x =$ fin.	$y = 0$	— —	— —
II. EJ	$x = 0$	$y = 0$	in axem incidit	$x^m = Cy^n$ ubi $m > n$
III. EF	$x = 0$	$y = 0$	ad axem obliqua	— —
IV. EK	$x = 0$	$y = 0$	ad axem perpend.	$y^m = Cx^n$ ubi $m > n$
V. BC	$x = 0$	$y =$ fin.	— —	— —
VI. JG	$x = 0$	$y = \infty$	ad axem perpend.	$x^m y^n = C$ ubi $m < n$
VII. FG	$x = 0$	$y = \infty$	ad axem perpend.	$xy = C$
VIII. KG	$x = 0$	$y = \infty$	ad axem perpend.	$x^m y^n = C$ ubi $m > n$
IX. CD	$x =$ fin.	$y = \infty$	ad axem perpend.	— —
X. GL	$x = \infty$	$y = \infty$	ad axem perpend.	$x^m = Cy^n$ ubi $m > n$
XI. GH	$x = \infty$	$y = \infty$	ad axem obliqua	— —
XII. GM	$x = \infty$	$y = \infty$	axi parallela	$y^m = Cx^n$ ubi $m > n$
XIII. DA	$x = \infty$	$y =$ fin.	axi parallela	— —
XIV. LE	$x = \infty$	$y = 0$	in axem incidit	$x^m y^n = C$ ubi $m < n$
XV. HE	$x = \infty$	$y = 0$	in axem incidit	$xy = C$
XVI. ME	$x = \infty$	$y = 0$	in axem incidit	$x^m y^n = C$ ubi $m > n$

53. Hi igitur regulae situs omnia curvae puncta indicant, pro quibus alterutra coordinatarum vel evanescit vel in infinitum abit; quare si cum axe principali, in quo abscissae capiuntur, conjungatur alter axis, ad quem applicatae referuntur, quoniam hos duos axes inter se commutare licet, regulae situs omnia ea curvae puncta ostendunt, quae vel in alterutrum axem cadunt, vel intervallo infinito sunt remota. Atque haec investigatio aeque locum habet, sive ambo hi axes sint inter se normales, uti assumsimus, sive obliqui, quo posteriori casu eae tangentes, quae axi principali perpendiculares sunt inventae, alteri axi parallelae sunt dicendae. Ex quo perspicuum est, cum axes isti pro lubitu immutari queant, hac ratione per applicationem regulae ad parallelogrammum omnia curvae puncta assignari posse.

54. Neque vero, uti jam observavimus, ad omnia curvae puncta, quae hoc modo reperiuntur, simul tangentes ducere licet; excipiuntur namque ea, quae primus et quintus regulae situs exhibet: tum vero etiam pro iis, quae situs undecimus praebet, inclinatio quidem tangentis ad axem colligitur. Sed vera ejus positio, seu ejus concursus cum axibus hinc definiri nequit. Denique natura curvae circa haec puncta, quae hoc modo reperiuntur, seu aequatio vel parabolica vel hyperbolica ejus indolem proxime exprimens, non ex omnibus regulae sitibus colligi potest, excipiuntur enim situs I, III, V, IX, XI et XIII. Sed quomodo hi defectus per relationem curvae ad alios axes suppleri possint, jam clare exposuimus. Diligentius vero etiam hanc indagationem evolvere conabimur in sequentibus capitibus, ubi accuratius in naturam linearum curvarum, calculo differentiali in subsidium vocato, inquiremus.