

B. Duæ litteræ ad Fredericum II, Regem Borussorum, datæ annis 1749 et 1763.

Sire,

Ayant fait l'examen de la loterie italienne dont V. M. a bien voulu me charger si gracieusement, j'ai premièrement déterminé combien chaque joueur devrait payer pour que l'avantage fût égal tant pour le banquier que pour le joueur, d'où l'on connaît d'abord, combien le banquier doit gagner probablement, si le joueur est obligé de payer plus que l'égalité du jeu ne demande.

Suivant le projet, on fait 90 billets marqués des nombres 1, 2, 3, 4 etc. jusqu'à 90, dont on ne tire que 5 au hasard, lorsqu'on juge qu'un assez grand nombre de joueurs s'est engagé. Or on peut prendre part à ce jeu de plusieurs manières différentes, selon que chaque joueur le trouve convenable.

La 1^{ère} est: le joueur choisit à volonté un numéro des 90 proposés, et il détermine lui-même le gain qu'il veut avoir en cas que son nombre se trouve parmi les 5 billets qu'on tirera à la loterie; et en proportion du gain qu'il attend, il est obligé de payer une certaine somme d'argent. Supposant que le joueur fasse prétention à un gain de 100 écus; pour que le parti soit égal, il devrait payer la 18^{ème} partie de 100 écus, c'est à dire 5 Rthlr. 13 gr. 4 pf. Or selon le projet, il doit payer 8 Rthlr. Donc la banque doit s'attendre à un profit de 44 p. cent. Il en sera de même de tous les autres prix que les joueurs demandent par cette manière de jouer. Comme si quelqu'un vouloit gagner 1000 écus, en cas que son nombre se trouvât parmi les 5 qui se tirent, il serait obligé de payer d'avance, pour obtenir cette condition, 80 écus, et ainsi des autres prix, plus hauts ou plus bas, que les joueurs pourroient choisir.

La 2^{de} manière de jouer se fait pas les ambes, ensorte que le joueur choisit deux nombres à la fois, et détermine lui même le prix qu'il veut gagner, en cas que tous les deux nombres se trouvent parmi les cinq numéros qu'on tirera au jour de la loterie. La probabilité que deux nombres, choisis à plaisir, se rencontrent dans les 5 qu'on tire au hasard des 90, n'étant que $\frac{5 \cdot 4}{90 \cdot 89}$ ou $\frac{2}{801}$, pour que le parti fût égal, il ne devrait payer que $\frac{2}{801}$ parties du prix auquel il prétend, c'est à dire, s'il demande un prix de 100 écus, il ne paieroit que 5 gr. 11 $\frac{81}{89}$ pf. ou 6 gr. à peu près. Or, selon le projet, la mise, pour avoir ce gain, est 14 gr., donc la banque gagneroit 133 $\frac{5}{8}$ p. cent. Or comme ce profit seroit trop considérable, pour mieux encourager les joueurs, on leur accorde 20 p. cent sur chaque prix qu'ils gagneront par une ambe, c'est à dire, au lieu de 100 écus, on leur promet de payer 120 écus en cas que leur ambe vienne à gagner, et partant la banque profitera probablement 94 $\frac{11}{16}$ p. cent.

La 3^{ème} manière de participer à cette loterie, est pas ternes, où le joueur se choisit 3 nombres à la fois.

) Responsio ad sequens rescriptum regium: «Sa Majesté le Roi de Prusse, notre très gracieux Souverain, fait envoyer ci-joint au Professeur Euler le projet d'une loterie, établie dans la plupart des villes considérables d'Italie, et qui a été présenté à Sa Majesté par un certain Roccolini, pour examiner avec exactitude les calculs algébriques qui entrent dans toutes les pièces de ce projet; mais surtout de bien approfondir par l'algèbre tous les hasards que l'entrepreneur d'une pareille loterie peut courir, et de même les profits qu'il pourroit faire par là, et d'en faire, aussitôt que faire se pourra, son très humble rapport à Sa Majesté. A Potsdam le 15 septembre 1749.

Signatum: Federic.

P. S. En cas que le dit Professeur Euler ait encore besoin de quelques lumières touchant ce projet, il pourra s'adresser pour cet effet au Lieutenant-général Comte de Mottembourg.»

sous condition de gagner le prix en cas que tous ces trois nombres se trouvent dans les 5 extraits, de sorte qu'il perde, soit qu'aucun de ses nombres ne s'y trouve, soit qu'il s'y en trouve un seulement, ou deux. Dans ce cas, la probabilité de gagner pour le joueur est $= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{90 \cdot 89 \cdot 88}$ ou $\frac{1}{11748}$; de sorte que, pour gagner un prix quelconque, il n'auroit qu'à en payer la 11748^{ème} partie, pour que l'avantage fût égal de part et d'autre. Ainsi, pour gagner par une terne un prix de 100 écus, le joueur ne devoit payer que $2\frac{1}{2}$ pf. Or, selon le projet, le paiement pour ces 100 écus est marqué de 15 pf.; donc la banque gagneroit 511 $\frac{7}{8}$ p. cent. Mais pour un plus grand encouragement, la banque s'engage de bonifier 80 p. cent sur chaque prix qui se gagne par ternes, et partant le profit de la banque seroit 240 p. cent.

Ce sont les trois principales manières de jouer; mais dans les papiers qui m'ont été communiqués, il est fait mention encore d'autres manières mêlées de celles-ci. Comme p. exemple, un joueur choisit 3 nombres avec ces conditions que, si tous les trois se trouvent parmi les nombres qui seront tirés, il prétend à un prix de 50 écus, par exemple; mais s'il ne s'y rencontre que deux de ses nombres, ou une ambe, il prétend à 5 écus. Pour cette condition on trouve, par la règle des combinaisons, que, pour que le parti soit égal de part et d'autre, il faut payer pour la terne $\frac{1}{11748}$ du prix, et pour l'ambe $\frac{85}{11748}$ du prix: Donc celui-là étant supposé de 50 écus, et celui-ci de 5 écus, le joueur sera obligé de payer, en tout, un peu moins qu'un gros. Je ne trouve pas, combien il faut payer dans ce cas selon le projet; mais il est à présent très facile de le déterminer ensorte, que la banque gagne autant qu'on veut. Comme, si la banque vouloit gagner 100 p. cent, le joueur devrait payer 2 gros, au lieu d'un.

Il sera également aisé de déterminer, tant pour ces manières de jouer que pour toutes les autres qu'on peut imaginer, combien le joueur doit payer pour les conditions qu'il exige, afin que la banque en tire un tel profit, ou autant p. cent qu'on souhaitera. Le profit auquel la banque se pourroit attendre probablement, selon le projet de l'Italien, sera donc assez considérable, puisque sur les simples extraits, elle gagneroit 44 p. cent, sur les ambes 9 $\frac{1}{4}$ et sur les ternes 240 p. cent.

On n'est pas même attaché ni au nombre de 90 billets, ni à celui de 5 qu'on en tire au jour que la loterie se joue. On y peut varier, comme on jugera à propos. Pour le mieux faire voir, j'ajouterai ici un autre projet où le nombre des billets est 100, marqués des nombres 1, 2, 3, 4 jusqu'à 100, desquels on tire au hasard 10, et les conditions du jeu pour les joueurs seront les suivantes, pour que l'avantage soit égal de part et d'autre.

- I. Le joueur ne prenant qu'un nombre, pour qu'il gagne 1000 écus, en cas que son nombre se trouve parmi les dix extraits, il doit payer à la banque. 100 écus,
- II. Si le joueur se choisit deux nombres, on pourra faire deux cas:
 - 1) pour qu'il gagne 1000 écus, en cas que tous les deux nombres se trouvent parmi les dix extraits, il doit payer. $9\frac{1}{11}$ écus
 - 2) pour qu'il gagne 1000 écus, en cas qu'un seul de ses nombres se trouve parmi les extraits, il doit payer $181\frac{9}{11}$ écus
- III. Si le joueur se choisit trois nombres, on pourra considérer trois cas:
 - 1) pour qu'il gagne 1000 écus, lorsque tous ses trois nombres se rencontrent dans les dix extraits, il doit payer. 18 gros
 - 2) pour qu'il gagne 1000 écus, lorsqu'il ne se trouve que deux de ses nombres dans les extraits, il doit payer 25 Rthlr. 1

- (3) s'il veut gagner 1000 écus, pourvu qu'un de ses nombres se trouve parmi les dix extraits, il doit payer 247 Rthlr. 16 gr.
- IV. Si le joueur choisit 4 nombres, on pourra considérer quatre cas :
- 1) pour qu'il gagne 1000 écus, lorsque tous ses quatre nombres se rencontrent dans les dix extraits, il doit payer 1 gr. 4 pf.
 - 2) pour avoir le même gain, lorsque trois de ses nombres se rencontrent parmi les dix extraits, il doit payer 2 Rthlr. 21 gr.
 - 3) pour avoir le même gain, s'il ne se trouve que deux de ses nombres tirés, il payera 47 Rthlr. 10 gr.
 - 4) enfin le même gain lui revient si, parmi les numéros tirés il ne se trouve qu'un seul de ses nombres; mais dans ce cas il faudra qu'il ait payé 312 Rthlr. 17 gr.

J'ai supposé ici partout le gain de 1000 écus, mais il est évident qu'on peut appliquer ces résultats à tous les gains possibles que les joueurs pourroient prescrire; car si le joueur prétend à un gain ou plus grand ou plus petit que 1000 écus, il paiera en proportion ou d'autant plus, ou d'autant moins.

Selon les arrangemens marqués, l'avantage seroit parfaitement égal du côté de la banque et des joueurs, mais il est facile d'augmenter les mises des joueurs afin que la banque gagne tant qu'on veut. Comme, si la banque vouloit un profit de 50 p. cent, on n'auroit qu'à augmenter les mises marquées de leur moitié chacune. Si la banque vouloit un profit de 100 p. cent, les joueurs devroient payer le double, et ainsi de suite.

Il seroit convenable de se contenter d'un profit médiocre, comme de 20 p. cent, sur les cas où le joueur est obligé de payer une partie considérable du prix qu'il prétend, comme la 10^{ème} partie et au delà. Mais où la mise est fort petite par rapport au gain qu'on prescrit, on pourra considérablement augmenter le profit, sans que les joueurs en soient découragés. Ainsi, lorsque le joueur ne devoit payer que 18 gr. pour gagner 1000 écus, il ne balanceroit pas beaucoup de payer 2 écus, au lieu de 18 gr., et par ce moyen la banque gagneroit 166 p. cent.

De cette manière le hasard, auquel la banque est exposée, deviendra plus petit; car la banque risque d'autant moins, plus la somme que les joueurs doivent payer, sera considérable.

Pour le risque de la banque il est à remarquer qu'on ne peut pas compter sûrement sur le profit que le calcul montre. Cependant, en général, on peut assurer que plus le nombre des joueurs est grand, plus sera aussi certain le profit marqué par le calcul. Mais si le nombre des joueurs est fort petit, ou que quelqu'un fasse prétention à un gain immense par une mise modique, il pourroit réussir, quelque petite que soit la probabilité, et par ce moyen la banque courroit risque de faillir.

Cette loterie est donc de telle nature qu'il ne seroit pas à propos de s'en mêler, à moins qu'on ne fût assuré qu'un très grand nombre de joueurs y voudraient prendre part, et encore, dans ce cas, la banque devoit être en droit de ne s'engager point à de trop grandes sommes. On ne doit pas non plus accorder, qu'un très grand nombre de personnes choisissent les mêmes nombres pour gagner, puisque en cas qu'ils gagnassent toutes, la banque souffriroit une perte trop considérable.

Dans la persuasion que ces calculs avec les remarques y jointes seront conformes à la haute intention de V. M. je suis avec le plus profond respect etc.

Euler.

2°).

Sire,

Après avoir examiné, par ordre de Votre Majesté, le plan de loterie de M. de Griethausen, je trouve que les avantages que l'État en peut espérer pourraient être encore plus considérables que l'auteur n'assure, et même monter à 8 millions de florins, comme je crois l'avoir prouvé dans les réflexions ci-jointes. Tout revient à savoir, si l'on peut bien s'attendre à ce que cette loterie fut remplie: la somme de 100 fl. pour chaque billet, et de 1000 fl. que la continuation pendant dix ans exige, sera toujours un objet très considérable pour bien du monde, de sorte que la distribution de 50000 billets sembleroit presque impossible, si l'on ne savoit par expérience que de telles loteries réussissent assez bien en Hollande où le crédit affermit la confiance du public. Personne n'apprendra jamais rien de moi sur ce projet. J'ose profiter de cette occasion pour présenter à V. M. mes très humbles et très respectueux remerciements des assurances gracieuses que V. M. a bien voulu donner à mon fils; j'en suis le plus vivement pénétré, et je meurs avec le plus profond respect, Sire, de V. M. etc. Août 1763.

Euler.

Plan d'une loterie de cinq classes, chacune de 50000 billets qui toutes doivent être tirées dans un an, et répétées pendant dix ans consécutifs.

Classes.	Mise d'un lot.	Recette.	Nombre des lots.	Somme des prix.	Reste en dépôt.
I.	10 fl.	500.000 fl.	8000	292.880	207.120 fl.
II.	15	750.000	8000	508.967	241.033
III.	20	1.000.000	8000	771.480	228.520
IV.	25	1.250.000	8000	1.047.208	202.792
V.	30	1.500.000	8000	1.524.465	— 24.465
		5.000.000	40.000	4.145.000	855.000

Après le tirage de ces cinq classes, le dépôt de 855000 fl. est employé à faire, pour une sixième classe, des prix de $28\frac{1}{2}$ fl. chacun pour 30000 billets, s'il y en a autant qui n'ont rien gagné dans les cinq classes. Il y a ici une incertitude sur laquelle je fais les réflexions suivantes:

*) Responsio ad sequens rescriptum regium: «Le nommé Griethausen en Hollande venant de M'envoyer un plan de loterie qu'il pense d'établir dans le pays de Clèves, pour aider cette province à se débarrasser des dettes qu'elle s'est vue obligée de contracter pendant les troubles de la dernière guerre. J'ai bien voulu vous communiquer ci-joint ce plan, afin que vous l'examiniez dans tout son détail et me marquiez ensuite votre sentiment, si vous le trouvez solide et équitable pour être agréable au public, et pour que la susdite province en trouve le soulagement que l'auteur en fait espérer. J'attends le rapport que vous M'en ferez, auquel vous voudrez bien Me faire le plaisir de joindre le plan susdit avec vos remarques. Je voudrais d'ailleurs que vous n'en fissiez point d'éclat encore, ni qu'il en transpirât quelque chose hors de saison dans le public, tant sur ce qui regarde ce plan, que sur son auteur. Sur ce Je prie Dieu qu'il vous ait en sa Sainte garde. A Potsdam ce 17 d'août 1763.»

Signatum: «Federic.»

1° Si tous les prix dans les cinq classes toboient sur des billets différents, de sorte qu'aucun n'en gagnât deux, il n'y auroit que 10000 qui entreroient dans la 6^{ème} classe dont chacun retireroit $28\frac{1}{2}$ fl. ce qui faisant 28500 fl., laisseroit un profit de 570000 fl. pour les entrepreneurs ou pour la caisse.

2° Si tous les prix dans chaque classe toboient sur les mêmes 8000 billets, il y auroit 42000 sans gain, dont 30000 profiteroient du bénéfice de la 6^{ème} classe, et 12000 n'auroient absolument rien. Aussi le profit de l'entrepreneur s'évanouiroit.

3° Or ni l'un ni l'autre de ces deux cas n'existera probablement jamais, et l'on peut supposer à peu près qu'il y aura ordinairement le milieu, c'est à dire 26000 billets sans gains; de sorte que la 6^{ème} classe ne contiendra qu'autant de billets, au lieu de 30000, et par conséquent le profit de l'entrepreneur peut être censé de 114000 fl.

4° Ce profit deviendra encore plus considérable par le § 19 N. B, où la dixième partie de chaque grand lot de 1000 fl. et au dessus doit être partagée parmi les 9 compagnons de la même parcelle, et qui, par conséquent, seront exclus de la 6^{ème} classe. Comme il y a dans les cinq classes 328 tels lots ou primes, il pourroit y avoir 9 fois autant, c'est à dire 2957 qui ne concourroient point dans la 6^{ème} classe. Mais comme plusieurs en seront exclus d'eux mêmes, en comptant la moitié, 1500, le nombre des participants à la 6^{ème} classe en sera diminué, et partant le profit de la caisse devra être estimé à 156.750 fl.

5° Les années suivantes ce profit deviendra plus considérable, parce que ceux qui ont gagné 1000 fl. et au-delà, dans les années précédentes, seront à l'avenir pour toujours exclus de la 6^{ème} classe, quoique leurs lots ne gagnent plus rien.

6° L'auteur met ce profit de la caisse par an à 250000 fl., laquelle somme pourroit bien être trop grande; mais comme c'est le hasard dont dépend cette somme qui pourroit également devenir tant beaucoup plus grande que plus petite, on n'y sauroit compter pour sûr. Cependant on le doit regarder toujours comme un objet très considérable.

7° Cet argent mis dans la caisse peut être employé pendant les dix ans et fournir des intérêts à 5 p. cent comme l'auteur suppose; mais au bout de ce temps, il ne dit pas ce que doit devenir ce capital lui-même qui doit monter pourtant à 2.500000 fl. Cette somme, qui semble devoir être un profit réel pour la caisse, n'est pas comprise dans les 7 millions qu'il suppose rester au profit de l'Etat.

8° Il y a encore un autre bénéfice résultant de l'association proposée, où ceux qui en veulent profiter paient pour leurs lots 10 p. cent au delà de la mise ordinaire, ce qui fait 10 fl. par an sur chaque lot, et ce surplus doit être partagé au bout de 10 ans parmi ceux des associés qui auront perdu, *pro rata* de leur perte. Pendant ce temps, cette somme peut être placée à intérêts qui tomberont au profit de la caisse.

9° Outre cela, on déduit de chaque gain 10 p. cent, ce qui fait 500000 fl. par an, laquelle somme, avec celles des articles précédents, sera mise à intérêt à 5 p. cent, et l'auteur suppose que tout cela pourroit bien monter à 1 million par an dont il rassemble les intérêts qui en écheoient tous les ans. Or, il ne dit pas à quoi ces intérêts sont employés tous les ans: si c'est d'abord au profit du pays pour payer les dettes, ou s'ils doivent rester dans la caisse, auquel cas ils pourroient bien être employés à produire de nouveaux intérêts.