V.

De motu corporum in tubo rectilineo mobili circa axem fixum, per ipsum tubum transeuntem.*)

1. Corpora, quae hic in tubis moveri pono, infinite parva assumo, ita ut alium motum praeter progressivum simplicem accipere nequeant: tubi ergo hujusmodi corpuscula continentes erunt quoque infinite angusti, perque eos corpuscula sine ulla frictione moveri statuo. Erunt igitur hi tubi revera lineae, in quibus corpuscula illa ita motu suo feruntur, ut ab illis recedere nequeant. Haec est consideratio geometrica, quae autem non impedit, quominus corpuscula illa finitae magnitudinis statui queant, dummodo in tubis et sine frictione et sine motu rotatorio moveantur. Quo minus autem casus actu existens ab hypothesi differet, eo propius eventus cum calculo conspirabit.

2. (Fig. 137.) Sit OF tubus rectus mobilis circa punctum fixum O, circa quod in eodem plano libere gyrari queat. Quod si ergo hic tubus moveatur, ejus motus cognoscetur, si data fuerit celeritas cujusvis ejus puncti F rotatoria circa O. Sit enim celeritas, qua punctum F circa O arculum Ff percurrit, debita altitudini u, ex ea cognoscetur celeritas cujusvis alius tubi puncti P. Cum enim tubus OF puncto temporis in situm Of perveniat, punctum P in p perveniet, unde ejus celeritas erit ad celeritatem puncti F ut Pp ad Ff, hoc est ut OP ad OF. Quare cum celeritas puncti F sit $=\sqrt{u}$, erit celeritas puncti $P=\frac{OP}{OF}\sqrt{u}$, ideoque altitudo huic celeritati debita $=\frac{OP^2}{OF^2}u$.

3. Deinde etiam si tubus, dum per angulum infinite parvum FOf rotatur, sollicitetur a viribus quibuscunque, acceleratio seu retardatio motus rotatorii definiri poterit. Colligantur enim singularum virium sollicitantium momenta respectu axis O sumta, quarum summa sit $=Pf$, quae tendat ad motum tubi accelerandum: retardatio enim per signum negativum indicabitur. Tum quaeratur momentum inertiae tubi respectu ejusdem axis O, quod oritur, si singulae tubi particulae per quadrata distantiarum suarum ab axe multiplicentur, atque omnia hae producta in unam summam colligantur.

*) Haec commentatio, manu cel. Auctoris inscripta: Caput I, majoris cujusdam operis pars fuisse videtur.

sit autem hoc momentum inertiae $= Mkk$, quo invento erit acceleratio puncti $F = \frac{Pf}{Mkk} \cdot OF$, atque acceleratio puncti $P = \frac{Pf}{Mkk} \cdot OP$. Hinc ergo fiet $du = \frac{Pf}{Mkk} \cdot OF \, . \, Ff$.

4. Ob hanc accelerationem tubus superiori temporis elemento ultra angulum FOf insuper describet angulum $fO\varphi$, ideoque in situm $O\varphi$ perveniet. Angulus autem $fO\varphi$ seu spatiolum $f\varphi$ tantum erit, quantum ab acceleratione $\frac{Pf}{Mkk} \, . \, OF$ generari potest, interea dum spatiolum Ff celeritate altitudini u debita conficitur. Dum autem generatim spatiolum ds percurritur celeritate altitudini c debita, eodem tempusculo corpus quiescens ab acceleratione g protrahetur per spatiolum $= g \cdot \frac{ds^2}{4c}$. Hinc ergo erit $f\varphi = \frac{Pf}{Mkk} \, . \, OF \, . \, \frac{Ff^2}{4u}$, et angulus $fO\varphi = \frac{f\varphi}{OF} = \frac{Pf}{Mkk} \cdot \frac{Ff^2}{4u}$. Vicissim igitur si spatiolum $f\varphi$ datum fuerit, per quod tubus per accelerationem promoveatur, ex eo innotescet ipsa acceleratio $\frac{Pf}{Mkk} \, . \, OF = \frac{4u \, . \, f\varphi}{Ff^2}$, ideoque momentum virium accelerantium $Pf = \frac{4Mkku \, . \, f\varphi}{OF \, . \, Ff^2}$.

5. Quiescat nunc tubus OF, in eo autem versetur corpus P motum in directione PF celeritate quacunque debita altitudini v, atque manifestum est hoc corpus ista celeritate per tubum uniformiter esse progressurum, neque tubum ad motum esse sollicitaturum. Neque etiam tubus ullam vim sentiet, si corpus secundum directionem PF a vi quacunque sive acceleretur, sive retardetur. Sollicitetur corpus a vi P secundum directionem PF, atque dum spatium $PQ = dx$ percurrit, ejus motus accelerabitur, fietque $dv = \frac{Pdx}{A}$ denotante A massam corporis P. Hinc ultra Q in q progredietur, ut sit

$$Qq = \frac{P}{A} \cdot \frac{dx^2}{4v} = \frac{Pdx^2}{4Av},$$

prouti modo ostendimus.

6. Moveatur nunc tubus motu rotatorio circa O, atque corpusculum P, nisi sit in O, quiescere non potest. Duplici autem modo motus corporis in tubo inclusi spectari potest, primo scilicet, quatenus in ipso tubo progreditur, tum vero motum cum tubo habebit communem. Quare si cognoscatur motus corporis in tubo, una cum tubi motu rotatorio, simul verus corporis motus innotescet. Habeat (Fig. 138) corpus A in tubo OF celeritatem altitudini p debitam, qua secundum tubi longitudinem ab O recedat, simul vero ipse tubus rotetur ita, ut puncti F celeritas per Ff sit debita altitudini u. Verus ergo corporis A motus erit compositus ex motu, quem habet in tubo cum celeritate $\sqrt{p}$, et ex motu tubi rotatorio in A, cujus celeritas erit $= \frac{OA \sqrt{u}}{OF}$, et directio secundum $A\alpha$ normalem ad OA. Hinc corpus A primo instanti revera movebitur in directione Ap, ita ut sit

$$AP : Pp = \sqrt{p} : \frac{OA \sqrt{u}}{OF}$$

ejusque celeritas vera seu absoluta erit $= \frac{Ap \sqrt{p}}{AP}$, unde altitudo huic celeritati debita fit

$$= \frac{Ap^2}{AP^2} \cdot p = p + \frac{Pp^2}{AP^2} \cdot p = p + \frac{OA^2 \, . \, u}{OF^2}.$$

7. Ponamus celeritatem corporis A, qua secundum tubi longitudinem progrediatur, esse nullam; ita ut tantum habeat motum cum tubo communem secundum directionem $A\alpha$, celeritate

*

$=\frac{OA\sqrt{u}}{OF}$. Hac igitur celeritate, dum tubus puncto temporis in situm Of procedit, conficiet spatiolum $A\alpha$; punctum tubi A vero, in quo corpus haeserat, perveniet in a, descripto arculo circuli Aa, cujus tangens erit recta $A\alpha$. Cum igitur nunc corpus non amplius sit in a sed in α, in tubo interea spatiolum $a\alpha$ confecisse censendum est. At est

$$a\alpha = O\alpha - OA = \sqrt{(OA^2 + A\alpha^2)} - OA = \frac{A\alpha^2}{2OA}$$

ob $A\alpha$ prae OA infinite parvo. Dum igitur spatium Ff celeritate altitudini u debita absolvitur, corpus in tubo progreditur per spatiolum

$$a\alpha = \frac{A\alpha^2}{2OA} = \frac{Ff \cdot A\alpha}{2OF} = \frac{OA \cdot Ff^2}{2OF^2},$$

ob $OA : A\alpha = OF : Ff$. Ad hoc autem spatium conficiendum requiritur vis movens g, ita ut sit

$$\frac{OA \cdot Ff^2}{2OF^2} = \frac{g \cdot Ff^2}{4Au}, \text{ unde fit } \frac{g}{A} = \frac{2OA \cdot u}{OF^2}.$$

Corpus ergo A in tubo perinde movebitur, ac si sollicitaretur a vi movente $g = \frac{2A \cdot OA \cdot u}{OF^2}$ secundum tubi directionem AP.

8. Ponamus autem corpus in A jam in tubo moveri celeritate debita altitudini p, qua puncto temporis, si tubus quiesceret, conficeret spatiolum $AP = dx$, posita distantia $OA = x$. Moveatur autem tubus interea motu rotatorio, ita ut ejus punctum F conficiat arculum $Ff = ds$, celeritate debita altitudini u, eritque primo $\frac{dx}{\sqrt{p}} = \frac{ds}{\sqrt{u}}$. Tum vero corpus A praeter motum in tubo habebit motum in directione $A\alpha$ normali ad OA, cum celeritate $= \frac{x\sqrt{u}}{OF} = \frac{x\sqrt{u}}{f}$ posita $OF = f$. Duplici hoc motu corpus, si sibi esset relictum, describeret diagonalem Ap parallelogrammi $A\alpha pP$ rectanguli celeritate debita altitudini $p + \frac{xxu}{ff}$, perveniretque in p, existente

$$AP = dx \text{ et } Pp = Aa = \frac{x\,ds}{f} = \frac{x\,dx\sqrt{u}}{f\sqrt{p}}.$$

Tubus autem interea perveniet in situm Of, existente $Ff = ds$.

9. Nisi ergo corpus tubo esset inclusum elapso tempusculi elemento, corpus teneret situm p et tubus situm Of; ideoque extra tubum versaretur. Cum igitur tubus perpetuo corpus in se retineat, vim quandam revera exeret, qua corpus in se conservet, haecque vis nil aliud erit, nisi pressio, qua corpus et tubus ad se invicem apprimuntur, cujus pressionis directio erit normalis ad tubi directionem. Sit ista pressio $= P$, qua corpus in A secundum directionem $A\alpha$ normalem ad tubum, ipse vero tubus secundum directionem contrariam urgeatur. Haec itaque pressio P efficiet, ut corpus non in p, sed in π perveniat, existente spatiolo

$$p\pi = \frac{P}{A} \cdot \frac{Ff^2}{4u} = \frac{Pds^2}{4Au}.$$

Eadem autem pressio P porro, tubum ex situ Of repellet in situm $O\varphi$, ad quem inveniendum sit momentum inertiae tubi respectu puncti $O = Mkk$, et cum momentum vis sollicitantis sit $= Px$, erit acceleratio puncti $f = \frac{Px}{Mkk} f$; unde fit spatiolum

$$f\varphi = \frac{Pfx}{Mkk} \cdot \frac{ds^2}{4u}.$$

10. Producatur recta Pp per π in q, quae cum ad Of sit normalis, erit $q\pi : f\varphi = OP : OF$, seu

$$q\pi = \frac{(x+dx)f\varphi}{f} = \frac{Pxxds^2}{4Mkku}.$$

Jam vero pressio P tanta esse debet, ut corpus ex p et tubus ex situ Of ad se invicem in situm $O\pi\varphi$ adducantur; quamobrem esse debebit

$$pq = \frac{Pds^2}{4Au} + \frac{Pxxds^2}{4Mkku} = \frac{(Axx + Mkk)Pds^2}{4AMkku}.$$

Verum ob triangula $OA\alpha$, αpq similia erit $OA : A\alpha = f : ds = dx : pq$, ideoque

$$pq = \frac{dxds}{f} = \frac{ds^2\sqrt{p}}{f\sqrt{u}}.$$

Hincque fit $P = \frac{4AMkk\sqrt{pu}}{f(Axx + Mkk)}$, quae est pressio, qua corpus in A ad tubum apprimitur, cui sustinendae firmitas tubi sufficiens esse debet. Hac ergo vi primum motus tubi rotatorius retardatur, fietque

$$\frac{du}{ds} = -\frac{Pfx}{Mkk} = -\frac{4Ax\sqrt{pu}}{Axx + Mkk}.$$

11. Si tubus motu rotatorio careret, corpus in punctum P perveniret, nunc autem pervenit in punctum π magis remotum ab O intervallo

$$O\pi - OP = \frac{P\pi^2}{2OP} = \frac{A\alpha^2}{2OA} = \frac{xds^2}{2ff}.$$

Ejus ergo celeritas $\sqrt{p}$, qua in tubo progreditur, increvisse censenda est, perinde ac si interea corpus secundum tubi directionem sollicitatum fuisset vi quadam g, ita ut sit $\frac{xds^2}{2ff} = \frac{g}{A} \cdot \frac{ds^2}{4u}$, unde fit acceleratio $\frac{g}{A} = \frac{2xu}{ff}$. Ex qua dum corpus spatiolum $AP = dx$ in tubo percurrit, fiet $dp = \frac{2uxdx}{ff}$; deinde vero est $du = -\frac{4Axds\sqrt{pu}}{Axx + Mkk}$, ex quibus aequationibus cum $\frac{dx}{\sqrt{p}} = \frac{ds}{\sqrt{u}}$ conjunctis totus motus tam tubi, quam corporis in tubo definiri debet.

12. Hinc vero etiam acceleratio corporis A vera colligi potest: cum enim corpus A actu progrediatur motu insito per diagonalem

$$Ap = \sqrt{\left(dx^2 + \frac{xxds^2}{ff}\right)},$$

celeritate debita altitudini $= p + \frac{xxu}{ff}$, quae altitudo ponatur $= v$, erit $\frac{Ap}{\sqrt{v}} = \frac{ds}{\sqrt{u}}$. Quia autem interea corpus A sollicitatur vi P in directione $A\alpha$, accelerabitur a vi

$$\frac{P \cdot A\alpha}{Ap} = \frac{Pxds}{f \cdot Ap}, \text{ erit ergo } \frac{dv}{Ap} = \frac{Pxds}{Af \cdot Ap},$$

seu

$$dv = \frac{Pxds}{Af} = \frac{4Mkkxds\sqrt{pu}}{ff(Axx + Mkk)} = \frac{4Mkkuxdx}{ff(Axx + Mkk)},$$

quae eadem aequatio ex praecedentibus invenitur; cum enim sit

$$du = -\frac{4Axds\sqrt{pu}}{Axx + Mkk} = -\frac{4Auxdx}{Axx + Mkk} \quad \text{et} \quad dp = \frac{2uxdx}{ff} \quad \text{ob} \quad v = p + \frac{xxu}{ff}, \quad \text{erit}$$

$$dv = dp + \frac{xxdu}{ff} + \frac{2uxdx}{ff} = \frac{4uxdx}{ff} - \frac{4Aux^3dx}{ff(Axx + Mkk)} = \frac{4Mkkuxdx}{ff(Axx + Mkk)}, \text{ ut ante.}$$

13. Ex his aequationibus pro du et dv inventis duplex valor pro $\frac{4uxdx}{Axx+Mkk}$ reperitur, nem[pe] $\frac{ffdv}{Mkk}$ et $-\frac{du}{A}$; unde fit $\frac{ffdv}{Mkk}+\frac{du}{A}=0$, atque integrando $Av+\frac{Mkku}{ff}=\text{Const.}$ At est Av vis vi[va] corporis A, et $\frac{Mkku}{ff}$ vis viva tubi gyrantis, unde intelligitur, summam virium vivarum tubi et cor[-] poris perpetuo conservari eandem. Cum vero sit $v=p+\frac{xxu}{ff}$, erit quoque

$$Ap+\frac{(Axx+Mkk)u}{ff}=\text{Const.}$$

14. Praeterea ex aequatione $du=-\frac{4Auxdx}{Axx+Mkk}$ deducitur haec integrabilis

$$\frac{du}{u}+\frac{4Axdx}{Axx+Mkk}=0,$$

quae praebet $u(Axx+Mkk)^2=\text{Const.}=GG$, unde fit $u=\frac{GG}{(Axx+Mkk)^2}$; qui valor in praecedent[i] substitutus dat

$$Ap+\frac{GG}{ff(Axx+Mkk)}=H \quad \text{et} \quad p=\frac{H}{A}-\frac{GG}{Aff(Axx+Mkk)}.$$

Inventis p et u, cum sit $\frac{dx}{\sqrt{p}}=\frac{ds}{\sqrt{u}}$, fiet

$$ds=\frac{Gdx}{Axx+Mkk}:\sqrt{\left(\frac{H}{A}-\frac{GG}{Aff(Axx+Mkk)}\right)}, \quad \text{seu}$$

$$ds=\frac{Gfdx\sqrt{A}}{\sqrt{(Axx+Mkk)(Hff(Axx+Mkk)-GG)}},$$

ex qua aequatione pro quovis corporis in tubi situ ipsa tubi positio determinatur.

15. (Fig. 139.) Quo motus corporis in tubo hoc circa O mobili clarius perspiciatur, ponamus initio tubum fuisse in situ OF, motumque rotatorium habuisse tantum, ut in distantia $OF=$[f] punctum F celeritatem habuerit debitam altitudini c. Corpus autem initio versatum sit in [A] existente $OA=a$, habueritque celeritatem in tubo secundum AF debitam altitudini $=b$; sitque, u[t] ante assumsimus, massa corporis $=A$, et momentum inertiae tubi $=Mkk$. Post aliquod tempus pervenerit tubus in situm OS, confecto arcu $FS=s$, in quo situ puncti S celeritas rotatoria p[er] elementum $Ss=ds$ debita sit altitudini u, corpus autem nunc versetur in P, existente $OP=x$, cujus celeritas, qua in tubo progreditur, debita sit altitudini p.

16. His positis, cum inventa sit $u=\frac{GG}{(Axx+Mkk)^2}$, facto $x=OA=a$, fieri debet $u=c$, und[e] determinatur constans $GG=c(Aaa+Mkk)^2$, fietque $u=\frac{c(Aaa+Mkk)^2}{(Axx+Mkk)^2}$. Deinde erit

$$p=\frac{H}{A}-\frac{c(Aaa+Mkk)^2}{Aff(Axx+Mkk)},$$

facto autem $x=a$, quia fit $p=b$, erit

$$b=\frac{H}{A}-\frac{c(Aaa+Mkk)}{Aff},$$

unde definitur constans $\frac{H}{A}=b+\frac{c(Aaa+Mkk)}{Aff}$, ita ut sit

$$p=b+\frac{c(Aaa+Mkk)(xx-aa)}{ff(Axx+Mkk)}.$$

valores ipsarum u et p, in aequatione $ds = \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{p}}$ substituti, dabunt aequationem

$$ds = \frac{(Aaa+Mkk)\,dx\sqrt{c}}{Axx+Mkk} : \sqrt{\left(b + \frac{c\,(Aaa+Mkk)\,(xx-aa)}{ff(Axx+Mkk)}\right)},$$

a natura curvae AP, quam corpus revera describit, determinatur.

17. Ponamus corpus initio in A nullam habuisse celeritatem in tubo progressivam, seu esse $= 0$, erit $ds = \frac{f\,dx\sqrt{(Aaa+Mkk)}}{\sqrt{(xx-aa)\,(Axx+Mkk)}}$. Hinc centro O ducto arculo Pl, erit

$$Pl = \frac{xds}{f} = \frac{xdx\sqrt{(Aaa+Mkk)}}{\sqrt{(xx-aa)\,(Axx+Mkk)}}$$

$pl = dx$, unde fit elementum curvae

$$Pp = dx\sqrt{\left(1 + \frac{xx(Aaa+Mkk)}{(xx-aa)\,(Axx+Mkk)}\right)} = dx\sqrt{\frac{Ax^4+Mkk(2xx-aa)}{(xx-aa)\,(Axx+Mkk)}}, \quad \text{ergo}$$

$$Pp : Pl = \sqrt{(Ax^4+(2xx-aa)\,Mkk)} : x\sqrt{(Aaa+Mkk)}.$$

o ergo initio in A, erat $Pp = Pl$, ideoque tangens curvae AP in A erat normalis ad tubum OF.

P autem est $\cos APO = \frac{pl}{Pp} = \sqrt{\frac{(xx-aa)\,(Axx+Mkk)}{Ax^4+(2xx-aa)Mkk}}$, unde fit

$$\cos 2APO = \frac{Ax^4 - 2Aaaxx - Mkkaa}{Ax^4+(2xx-aa)Mkk} = 1 - \frac{2Mkkxx - 2Aaaxx}{Ax^4+(2xx-aa)Mkk}.$$

18. Ponamus tubum omni inertia destitutum, ita ut sit $Mkk = 0$, eritque

$$u = \frac{a^4c}{x^4}, \text{ seu } \sqrt{u} = \frac{aa}{xx}\sqrt{c},$$

le celeritas tubi in F erit ad celeritatem tubi in S ut QP^2 ad OA^2. Deinde autem fiet

$$p = b + \frac{aac(xx-aa)}{ffxx}, \quad \text{unde erit} \quad ds = \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{p}} = \frac{aafdx\sqrt{c}}{x\sqrt{(bffxx+aacxx-a^4c)}},$$

e aequatio integrata dat

$$\frac{s}{f} = \text{arc.}\cos\frac{aa\sqrt{c}}{x\sqrt{(aac+bff)}} - \text{arc.}\cos\frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{(aac+bff)}} = \text{ang. } FOS.$$

est

$$\text{arc.}\cos\frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{(aac+bff)}} = \text{arc. tang}\frac{f\sqrt{b}}{a\sqrt{c}} = 90° - FAP, \quad \text{unde}$$

$$\text{arc.}\cos\frac{aa\sqrt{c}}{x\sqrt{(aac+bff)}} = 90° - FAP + FOS \quad \text{et}$$

$$\frac{aa\sqrt{c}}{x\sqrt{(aac+bff)}} = \cos(90° - FAP + FOS) = \sin(FAP - FOS) = \frac{a}{x}\sin FAP,$$

$$\text{ob } \frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{(aac+bff)}} = \cos(90° - FAP) = \sin FAP.$$

c erit $x : a = OP : OA = \sin FAP : \sin(FAP - FOS)$, quo constat viam a corpore descriptam esse lineam rectam; tum enim erit

$$FAP - FOS = APO \quad \text{et} \quad OP : OA = \sin FAP : \sin APO.$$

ipsa autem status natura perspicuum est, corpus perinde motum iri, ac si tubus penitus abesset, inertia carens motum corporis alterare nequit.

19. Evanescat jam massa corporis A prae inertia tubi, atque manifestum est a corpore motu tubi perturbari non posse, ex quo tubus motu uniformi rotabitur, fiet autem utique ex aequatione $u = c$. Tum vero pro motu corporis in tubo erit $p = b + \frac{c(xx - aa)}{ff}$, unde fit

$$ds = \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{p}} = \frac{fdx\sqrt{c}}{\sqrt{(bff - aac + cxx)}},$$

quae aequatio integrata dat

$$\frac{s}{f} = \text{ang.} FOS = \int \frac{dx\sqrt{c}}{\sqrt{(bff - aac + cxx)}} = l\frac{x\sqrt{c} + \sqrt{(bff - aac + cxx)}}{a\sqrt{c} + f\sqrt{b}}.$$

Quare sumto e numero cujus logarithmus $= 1$, erit

$$e^{FOS} = \frac{x\sqrt{c} + \sqrt{(bff - aac + cxx)}}{a\sqrt{c} + f\sqrt{b}}, \text{ hincque } x = \frac{a\sqrt{c} + f\sqrt{b}}{2\sqrt{c}} e^{\frac{s}{f}} + \frac{a\sqrt{c} - f\sqrt{b}}{2\sqrt{c}} e^{\frac{-s}{f}}.$$

Ad quodvis ergo tempus, primum facile situs tubi OS, quippe cujus motus est uniformis, definitur, tum vero ex angulo $\frac{s}{f}$ locus P in tubo, quem corpus occupat, ex hac aequatione invenitur.

20. (Fig. 140.) Hactenus motum corporis in tubo recto circa alterum terminum O in eodem plano mobili determinavimus, si neque tubus neque corpus ab ulla vi externa sollicitentur; nunc igitur effectum virium tam corpus in tubo quam ipsum tubum sollicitantium investigemus. Pervenerit autem tubus in situm OF, ubi puncti F celeritas rotatoria debita sit altitudini u, qua puncto temporis dt describere valet arculum $= ds$. Corpus autem versetur in A, existente $OA = x$, ubi ejus celeritas, qua in tubo progreditur, debita sit altitudini p, qua eodem tempusculo dt spatiolum $= dx$ absolvere queat. Urgeatur autem primo tubus a momento virium $= Sf$, secundum plagam Ff; quo fiet ut tempusculo dt spatium absolvat

$$Ff = ds + \frac{Sff}{Mkk} \cdot \frac{ds^2}{4u},$$

si quidem a corpore incluso esset liberatus, ideoque perventurus esset in situm Of.

21. Corpus autem A sollicitetur a duabus viribus, altera $= T$ secundum directionem tubi AP, altera $= V$ secundum directionem $A\alpha$ ad tubum normalem. Quodsi ergo corpus extra tubum esset liberum, primum motu secundum AP, cujus celeritas est $= \sqrt{p}$, a vi T sollicitatum conficeret spatiolum $AP = dx + \frac{T}{A} \cdot \frac{ds^2}{4u}$; deinde autem motu in directione $A\alpha$, cujus celeritas est $= \frac{x\sqrt{u}}{f}$, a vi V sollicitatum, conficeret spatiolum $A\alpha = \frac{xds}{f} + \frac{V}{A} \cdot \frac{ds^2}{4u}$. Completo ergo parallelogrammo rectangulo Al, corpus, si liberum esset, perventurum esset in punctum l; tubus vero, si corpore careret, eodem momento situm teneret Of; ideoque corpus extra tubum foret situm, ab eoque distaret intervallo lp. Erit autem ad hanc distantiam inveniendam,

$$OF : Ff = OP : Pp, \quad \text{unde} \quad Pp = \frac{Ff \cdot OP}{OF}, \quad \text{et}$$

$$pl = \frac{Ff \cdot OP}{OF} - \frac{OA \cdot ds}{OF} - \frac{V}{A} \cdot \frac{ds^2}{4u} = \frac{AP \cdot ds}{f} - \frac{V}{A} \cdot \frac{Ff^2}{4u} = \frac{dxds}{f} - \frac{V}{A} \cdot \frac{ds^2}{4u} + \frac{Sfx}{Mkk} \cdot \frac{ds^2}{4u}.$$

22. Si hoc intervallum pl esset $= 0$, corpus sponte in tubo maneret, neque igitur ulla existeret pressio corporis in tubum; nunc ergo cum corpus extra tubum egressurum esset, pressio aderit qua corpus in tubo retinebitur. Sit ista pressio $= P$, quae corpus in directione ad tubum normali

$A\alpha$, ipsum vero tubum in directione contraria sollicitet. Hujus vis P momentum ad tubum versus corpus l reducendum erit $= Px$, hinc tubus removebitur per spatiolum $f\varphi = \frac{Pfx}{Mkk} \cdot \frac{ds^2}{4u}$, ex quo prodit spatiolum $p\pi = \frac{Pxx}{Mkk} \cdot \frac{ds^2}{4u}$. Deinde eadem pressio P corpus, quod est in l, perducere debet in π, eritque $l\pi = \frac{P}{A} \cdot \frac{ds^2}{4u}$. Ex his resultat

$$\frac{P(Axx + Mkk)ds^2}{4AMkku} = lp = \frac{dxds}{f} - \frac{V}{A} \cdot \frac{ds^2}{4u} = \frac{ds^2 \sqrt{p}}{f\sqrt{u}} - \frac{V}{A} \cdot \frac{ds^2}{4u} + \frac{Sfx}{Mkk} \cdot \frac{ds^2}{4u},$$

eritque ergo pressio quaesita

$$P = \frac{AMkk}{Axx + Mkk}\left(\frac{4\sqrt{pu}}{f} - \frac{V}{A} + \frac{Sfx}{Mkk}\right).$$

23. Tubus ergo nunc sollicitabitur a virium momento $Sf - Px$, ex quo oritur acceleratio motus rotatorii

$$\frac{du}{ds} = \frac{Sff}{Mkk} - \frac{Pfx}{Mkk} = \frac{Sff}{Mkk} - \frac{Afx}{Axx + Mkk}\left(\frac{4\sqrt{pu}}{f} - \frac{V}{A} + \frac{Sfx}{Mkk}\right), \quad \text{seu}$$

$$du = \frac{Sffds}{Axx + Mkk} - \frac{4Auxdx}{Axx + Mkk} + \frac{Vfxds}{Axx + Mkk}.$$

Corpus autem, quod in tubo descripturum fuisset motu insito spatiolum dx, nunc ex A in punctum tubi π pervenit, descripsit ergo spatium

$$= AP + (O\pi - OP) = AP + \frac{P\pi^2}{2OP} = AP + \frac{A\alpha^2}{2OA} = dx + \frac{T}{A} \cdot \frac{ds^2}{4u} + \frac{xds^2}{2ff},$$

hinc accelerationem accepit $= \frac{T}{A} + \frac{2xu}{ff} = \frac{dp}{dx}$, ex quo erit $dp = \frac{Tdx}{A} + \frac{2uxdx}{ff}$. Quod si celeritas corporis vera ponatur debita altitudini v, ob $v = p + \frac{xxu}{ff}$, erit

$$dv = dp + \frac{xxdu}{ff} + \frac{2uxdx}{ff} = \frac{Tdx}{A} + \frac{Sxxds}{Axx + Mkk} + \frac{Vx^3 ds}{f(Axx + Mkk)} + \frac{4Mkkuxdx}{ff(Axx + Mkk)}.$$

24. Ex priori aequatione oritur

$$du + \frac{4Auxdx}{Axx + Mkk} = \frac{Sffds}{Axx + Mkk} + \frac{Vfxds}{Axx + Mkk},$$

cujus prius membrum fit integrabile si multiplicetur per $(Axx + Mkk)^2$; erit enim ejus integrale $(Axx + Mkk)^2 u$, quod ponatur $= Q$. Hinc erit

$$dQ = Sffds\,(Axx + Mkk) + Vfxds\,(Axx + Mkk);$$

dividatur haec aequatio per $2\sqrt{Q}$ erit

$$\frac{dQ}{2\sqrt{Q}} = \frac{Sffds}{2\sqrt{u}} + \frac{Vfxds}{2\sqrt{u}}, \quad \text{unde} \quad (Axx + Mkk)\sqrt{u} = \int \frac{Sffds}{2\sqrt{u}} + \int \frac{Vfxds}{2\sqrt{u}}.$$

Quare si vires sollicitantes S et V evanescant, erit $(Axx + Mkk)\sqrt{u}$ quantitas constans.

25. Ex prima et ultima aequatione si eliminentur termini, in quibus nulla vis sollicitans occurrit, prodibit $Adv + \frac{Mkkdu}{ff} = Tdx + Sds + \frac{Vxds}{f}$. Hinc ergo integrando obtinebitur

$$Av + \frac{Mkku}{ff} = \int Tdx + \int \frac{Vxds}{f} + \int Sds = Ap + \frac{(Axx + Mkk)u}{ff}.$$

Si ergo vires sollicitantes T, V, et S evanescant, erit

$$Ap + \frac{(Axx + Mkk)u}{ff} = Av + \frac{Mkku}{ff}$$

quantitas constans; exprimit autem Av vim vivam corporis A et $\frac{Mkku}{ff}$ vim vivam tubi rotantis. Un vis viva totalis nullum accipit incrementum vel decrementum, nisi a viribus sollicitantibus, absq quibus vis viva perpetuo eadem conservaretur.

26. Praeter vim vivam autem, si nullae vires sollicitantes adsint, quoque conservatur val hujus expressionis $(Axx + Mkk)\sqrt{u}$ perpetuo idem; qui valor quomodo verbis commode expri queat, videamus. Est autem $\sqrt{u}$ celeritas rotatoria puncti tubi F, unde fit corporis A celerit rotatoria $= \frac{x\sqrt{u}}{f}$, ejusque adeo motus rotatorius $= \frac{Ax\sqrt{u}}{f}$, qui si denuo in distantiam a centro ro tationis O, quae est $= x$, multiplicetur, productum $\frac{Axx\sqrt{u}}{f}$ convenit appellari momentum rotatoriu corporis A. Simili modo si tubi quaecunque molecula, ab O intervallo z distans, ponatur $= d\omega$, eri ejus momentum rotatorium $= \frac{zzd\omega\sqrt{u}}{f}$, unde totius tubi momentum rotatorium erit

$$= \frac{\sqrt{u}}{f}\int zzd\omega = \frac{Mkk\sqrt{u}}{f},$$

quia Mkk exponit summam omnium $zzd\omega$. Erit ergo $\frac{(Axx + Mkk)\sqrt{u}}{f}$ momentum rotatorium tota tubi et corporis conjunctim, quod propterea perinde ac vis viva conservatur; nisi quatenus a virib sollicitantibus vel augetur vel diminuitur.

27. (Fig. 141.) Ponamus tubum cum corpore a gravitate naturali ad motum animari, tubumq jam pervenisse ex situ horizontali OF in situm OS, ubi celeritas puncti S rotatoria sit $= \sqrt{u}$, eoq puncto temporis percurrat spatiolum $Ss = ds$. Sit pondus tubi $= M$, ejusque centri gravitatis Q distantia $= g$, erit momentum gravitatis tubi $= Mg . \cos FOS = Mg \cos \frac{s}{f}$; denotat enim angulum FOS ob arcum $FS = s$ et radium $OF = f$. Momentum ergo supra positum Sf eri $= Mg \cos \frac{s}{f}$. Sit praeterea nunc corpus in P existente $OP = x$, ubi ejus celeritas in tubo debi sit altitudini p, ut sit $\frac{ds}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{\sqrt{p}}$. Ob gravitatem ergo corpus A in P sollicitabitur in directione ver ticali PG vi $= A$, unde oritur vis $T = A \sin \frac{s}{f}$ et $V = A \cos \frac{s}{f}$.

28. His virium determinationibus in calculum introductis erit primo

$$(Axx + Mkk)\sqrt{u} = \int \frac{Mgfds + Afxds}{2\sqrt{u}} \cos \frac{s}{f} = \frac{f}{2}\int (Mg + Ax)\frac{dx}{\sqrt{p}} \cos \frac{s}{f}; \quad \text{et}$$

$$Ap + \frac{(Axx + Mkk)u}{ff} = A\int dx \sin \frac{s}{f} + A\int \frac{xds}{f} \cos \frac{s}{f} + Mg\int \frac{ds}{f} \cos \frac{s}{f} = Ax \sin \frac{s}{f} + Mg \sin \frac{s}{f} + \text{Const.},$$

quae ex statu initiali debet definiri. Ponamus tubum initio in OF quievisse, et corpus in A pari quievisse, ita ut fuerit $OA = a$, ergo posito $s = 0$, fieri debet $x = a$, $p = 0$ et $u = 0$, und constantis additione non est opus. Erit ergo pro hoc casu

$$Ap + \frac{(Axx + Mkk)u}{ff} = (Ax + Mg) \sin \frac{s}{f},$$

quae conjuncta cum aequationibus

$$(Axx + Mkk)\sqrt{u} = \frac{1}{2}f\int (Ax + Mg)\frac{dx}{\sqrt{p}} \cos \frac{s}{f} \quad \text{et} \quad \frac{dx}{\sqrt{p}} = \frac{ds}{\sqrt{u}},$$

determinabit motum quaesitum.

29. Resumantur aequationes differentiales quae sunt

$$\text{I.}\quad Adp + \frac{2Auxdx}{ff} + \frac{(Axx + Mkk)du}{ff} = Adx \sin\frac{s}{f} + \frac{ds}{f}(Ax + Mg)\cos\frac{s}{f},$$

$$\text{II.}\quad \frac{(Axx + Mkk)du}{ff} + \frac{4Auxdx}{ff} = (Ax + Mg)\frac{ds}{f}\cos\frac{s}{f},$$

$$\text{III.}\quad \frac{dx}{\sqrt{p}} = \frac{ds}{\sqrt{u}}.$$

Ponatur angulus $\frac{s}{f} = \varphi$ et $u = \frac{Arff}{Axx + Mkk}$, et habebuntur hae aequationes

$$\text{I.}\quad Adp + Adr = Adx \sin\varphi + (Ax + Mg)d\varphi \cos\varphi,$$

$$\text{II.}\quad Adr + \frac{2AArxdx}{Axx + Mkk} = (Ax + Mg)d\varphi\cos\varphi,$$

$$\text{III.}\quad \frac{dx}{\sqrt{p}} = \frac{d\varphi\sqrt{(Axx + Mkk)}}{\sqrt{Ar}},$$

quarum trium aequationum ope relatio inter quatuor variabiles p, r, x et φ debet definiri.

30. Resolutio harum aequationum multo videtur difficilior quam fortasse est, si enim casum contemplemur, quo tubus omni inertia carere ponitur, manifestum est corpus perinde moveri debere, ac si penitus esset liberum, ideoque vel in recta verticali descendet, vel parabolam describet. Verumtamen hic ipse motus ex aequationibus inventis nonnisi summa molestia erui potest. Facto enim $M = 0$ aequationes tres inventae abibunt facto $u = \frac{ffr}{xx}$ in has:

$$dp + dr = dx\sin\varphi + xd\varphi\cos\varphi,$$

$$dr + \frac{2rdx}{x} = xd\varphi\cos\varphi \quad \text{et} \quad \frac{dx}{x} = \frac{d\varphi\sqrt{p}}{\sqrt{r}},$$

ex quibus quomodo verus corporis motus cognosci queat, investigemus; quae quidem investigatio ita erit comparata ut, nisi motus jam ante esset cognitus, vix suscipi potuisset.

31. Ob variabilium multitudinem ante omnia unam eliminari oportet, conveniet autem eliminari x una cum dx. Tertia autem aequatio dat $dx = \frac{xd\varphi\sqrt{p}}{\sqrt{r}}$, qui valor in reliquis substitutus dat

$$dp + dr = \frac{xd\varphi\sin\varphi\,.\sqrt{p} + xd\varphi\cos\varphi\sqrt{r}}{\sqrt{r}} \quad \text{et} \quad dr + 2d\varphi\sqrt{pr} = xd\varphi\cos\varphi,$$

ex posteriori fit $xd\varphi = \frac{dr}{\cos\varphi} + \frac{2d\varphi\sqrt{pr}}{\cos\varphi}$, qui in priori substitutus producet hanc aequationem

$$dp\sqrt{r} + dr\sqrt{r} = \frac{dr\sin\varphi\,.\sqrt{p}}{\cos\varphi} + dr\sqrt{r} + \frac{2pd\varphi\sin\varphi\,.\sqrt{r}}{\cos\varphi} + 2rd\varphi\sqrt{p},$$

seu per $\frac{\cos\varphi}{2\sqrt{pr}}$ multiplicando hanc

$$\frac{dp\cos\varphi}{2\sqrt{p}} - \frac{dr\sin\varphi}{2\sqrt{r}} - d\varphi\sin\varphi\sqrt{p} - d\varphi\cos\varphi\sqrt{r} = 0,$$

quam evenit esse integrabilem, integrata enim dat: $\cos\varphi\sqrt{p} - \sin\varphi\sqrt{r} = \sqrt{c}$.

32. Deinde aequatio prima, quae sponte est integrabilis, dat $p + r = x\sin\varphi + b$; ab hac subtrahatur quadratum prioris $p\cos^2\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi\,.\sqrt{pr} + r\sin^2\varphi = c$, atque remanebit

$$(\sin\varphi\sqrt{p} + \cos\varphi\sqrt{r})^2 = x\sin\varphi + b - c.$$

At ex prius integrata est $\sqrt{p} = \frac{\sqrt{c} + \sin\varphi\sqrt{r}}{\cos\varphi}$, unde illa aequatio abibit in hanc

$$\frac{(\sin\varphi \, . \sqrt{c} + \sqrt{r})^2}{\cos^2\varphi} = x\sin\varphi + b - c, \quad \text{ergo} \quad x = \frac{c-b}{\sin\varphi} + \frac{(\sin\varphi \, . \sqrt{c} + \sqrt{r})^2}{\sin\varphi\cos^2\varphi}.$$

Hi valores pro $\sqrt{p}$ et x inventi surrogentur in aequatione $dr + 2d\varphi\sqrt{pr} = xd\varphi\cos\varphi$, atque orietur

$$dr + \frac{2d\varphi\sqrt{cr}}{\cos\varphi} + \frac{2rd\varphi\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{(c-b)d\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi} + \frac{d\varphi(\sin\varphi \, . \sqrt{c} + \sqrt{r})^2}{\sin\varphi\cos\varphi},$$

quae reducta praebet hanc:

$$dr + \frac{rd\varphi\,(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)}{\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{cd\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} - \frac{bd\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

33. Sic itaque pervenimus ad aequationem duas tantum variabiles r et φ continentem, quae divisa per $\sin\varphi \, . \cos\varphi$ fit integrabilis; erit enim

$$\frac{r}{\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{c\sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{c\cos\varphi}{\sin\varphi} + \frac{b\cos\varphi}{\sin\varphi} + a, \quad \text{ideoque}$$

$$r = c\sin^2\varphi + (b-c)\cos^2\varphi + a\sin\varphi\cos\varphi.$$

Ponatur $b - c = h$, atque per angulum φ omnes quantitates ita determinabuntur, ut sit

$$\sqrt{r} = \cos\varphi\sqrt{(c\,\text{tang}^2\varphi + a\,\text{tang}\,\varphi + h)},$$

$$\sqrt{p} = \frac{\sqrt{c}}{\cos\varphi} + \sin\varphi\sqrt{(c\,\text{tang}^2\varphi + a\,\text{tang}\,\varphi + h)} \quad \text{et}$$

$$x = \frac{2c\,\text{tang}\,\varphi + a + 2\sqrt{(cc\,\text{tang}^2\varphi + ac\,\text{tang}\,\varphi + ch)}}{\cos\varphi}.$$

Ex his colligetur, (Fig. 142.) curvam a corpore descriptam esse parabolam DAP, cujus vertex sit in D, ex quo si ad horizontem OF perpendiculum DC demittatur, erit $OC = a$, $DC = h$, et distantia foci a vertice $DE = c$. Irrationalitas evanescit, si fuerit $ch = \frac{1}{4}aa$, quo casu parabola per ipsum punctum O transibit.