# VIII.

## Recensio litterarum a Cl. D. Bernoullio Basilea die 26 Oct. 1735 ad me datarum, una cum annotationibus meis.

Omnes sane Geometrae, sicut nos, ex ea re luctum percepere, quod gravissimi epistolarum commercii, quas per triginta annos Eulerum et Danielem Bernoullium sibi mutuas misisse constat, non nisi pars altera a nobis edi potuit, frustra enixis, ut ipsius Euleri epistolas ad celeberrimum urbis Basileae Mathematicum missas detegeremus. Persuasum vero nobis est, lectores eo laetius commentatiunculam Eulerianam accepturos esse, de re saepius utrinque examinata, i. e. de laminarum elasticarum oscillationibus tractantem, cujus elaborandae epistola Bernoulliana, die 26 Oct. A. 1735 scripta, Eulero occasionem praebuerat. Meditationes, quas commentatio exhibet, etiam responsi Euleriani materiem fuisse, conjicimus. Sed commentatio, quam damus, ut lectores videbunt, non est epistola, sed inscriptionem offert ipsius Euleri manu appositam, qualem citavimus. Epistola Bernoulliana in collectionis nostrae (*Correspondance*) Vol. II pp. 427 ad 430 typis expressa legitur, cujus vero eas partes, quas Recensio Euleriana spectat, hoc loco iterum typis describere idoneum duximus.

„Ich schreite nun zu den Mathematicis. Ew. Observationen *de vibrationibus laminae elasticae* „kommen mit meinen überein. Das Notabelste, so dabei auszurechnen, ist dieses: (Fig. 151) *Data* „*longitudine laminae elasticae* AD *vel* AB, *dato ejus pondere, dataque distantia* DB *appenso ponderi debita,* „*cujus ope elasticitas habetur, invenire numerum absolutum vibrationum pro dato tempore.* Ich erwarte „Ew. mathematischen Brief mit grossem Verlangen. Occasione des Hn. König's problematum, habe „ich die leges motuum a percussione, quando directio impulsus non per centrum gravitatis transit, „generalissime solviret. Mein Vater ist über diesen Punkt nicht meiner Meinung, und hat eine „andere Solution: ich glaube aber, dass er die Sach nur obiter betrachtet, denn ich bin in meiner „Solution gewiss. Ew. sagen mir von den oscillationibus einer Wiege; ich habe solche auch ausgerechnet, nämlich deren Durationen, quando sunt infinite parvae. Meine Solution ist diese: „(Fig. 151) Sit $ACB$ pavimentum horizontale, cui se applicat arcus $DCE$, utcunque gravis et one-„ratus; sit centrum gravitatis totius systematis in $R$, ducatur verticalis $CRF$; sit $F$ centrum oscil-

«lationis pro puncto suspensionis $C$; sit radius osculi in $C = R$, $CR = b$, $CF = \beta$: erit longitu
«penduli isochroni cum vibrationibus arcus $DCE = \frac{\beta b}{R-b}$.

«Neulich hat mich ein fremder Gelehrter gebeten zu untersuchen, wie viel Wasser ungefäh
«in einer Secunde den Rhein hinunterlaufe; da ich gefunden, dass eins ins andere gerechnet, ma
«15000 cubische Schuh rechnen könne.

«Es ist wieder ein tomus von den Pariser Mémoires herausgekommen, aber von mathemati
«physicis und mechanicis wenig darin; wenn Sie belieben, kann ich Ihnen eine kleine Recensio
«davon schicken. Der Hr. Bouguer und der Hr. Maupertius haben einige Sachen darin von courbe
«de poursuite, welche nämlich ein Schiff beschreibt, wenn es allezeit grad los läuft auf ein ande
«Schiff, so in einer geraden Linie geht velocitatibus utrobique constantibus. Man könnte über die
«Materie viel problemata erdenken. — — —

*Editores.*

---

Jam pridem D. Bernoullius mihi proposuit problema de oscillationibus laminae elasticae, alter termino muro infixae determinandis; cujus problematis solutionem quoque nuper in dissertatione de minimis oscillationibus cujusque generis corporum fuse sum persecutus (*). Perscripsi etiam jam ante aliquot menses solutionem meam Cl. D. Bernoullio, qui in his litteris mihi significat meam solutionem cum sua egregie convenire. Proponit mihi autem de eadem materia hanc novam quaestionem ut ipse oscillationum numerus, quas data lamina dato tempore sit editura, definiatur. Pendet vero uti ego etiam in citata dissertatione ostendi, celeritas oscillationum tum a longitudine laminae, tum a quantitate elasticitatis. Quamobrem ad hanc quaestionem resolvendam requiritur, ut certo quodam experimento quantitas elasticitatis determinetur. Ipse igitur D. Bernoulli mecum communicat eandem qua ipse utitur, elasticitates metiendi rationem, quo eo facilius de consensu nostrarum solutionum constet. Eandem laminam (Fig. 151) $Ba$ muro in $B$ infixam, cujus oscillationum numerus desideratur ope ponderis $Q$ ex situ naturali $Ba$ in statum $BA$ deduci jubet, et tum observari distantiam $Aa$. Datis enim pondere $Q$ et distantia $Aa$ una cum longitudine laminae $BA$, quantitas elasticitatis inde determinatur. Assumsi ego vero in dissertatione mea litteram $A$ ad absolutam elasticitatis quantitatem exprimendam, et laminae incurvatae vim elasticam in singulis punctis posui aequalem ipsi $\frac{A}{r}$, denotante $r$ radium osculi in quovis loco. Posita vero longitudine laminae $= a$, inveni in cu loco laminae hujus oscillationes minimas isochronas fore cum oscillationibus penduli simplicis, cujus longitudo sit $= \frac{2a^4}{25A}$. Quocirca quo ista longitudo absolute determinetur, oportet quantitatem $A$ ex supra posito experimento per $Aa$ et pondus $Q$ determinare.

Quia lamina nostra $Ba$ a pondere $Q$ in statum aequilibrii est deducta, curva $BMA$ erit elastica cujus naturam per eadem data investigari oportet. Ducta applicata $PM = y$, sit abscissa $Pa =$ et curva $AM = s$, itemque radius osculi in $M = r$, qui est $= -\frac{ds\,dy}{ddx}$ vel $\frac{ds\,dx}{ddy}$, posito $ds$ constant Erit ergo vis elastica in $M$ meo exprimendi modo, quo in ipso problemate sum usus, $= \frac{A}{r} = \frac{Addy}{dxd}$ quae per generale meum theorema aequalis esse debet $Qx$; unde prodit ista aequatio $\frac{Ady}{ds} = \frac{Qx^2}{2} + C$

(*) Commentarii Acad. Petrop. T. VII. p. 99.

incidente $M$ in $B$, quia lamina ibi est muro infixa, erit ibi $dx = ds$. Ponatur ergo $Ba = h$, erit $C = \frac{Qh^2}{2}$, ipsa vero curva $AMB$ sit $= a$ longitudini laminae oscillantis. Habetur ergo ista aequatio $\frac{2A\,dy}{ds} = Qx^2 - Qh^2$. Sit distantia $Aa$, quae est data $= b$, debebit ista aequatio ita integrari, ut facto $x$ vel $s = 0$, fiat $y = b$. Deinde posito $y = 0$, seu $x = h$, fieri debet $s = a$, unde quantitas $A$ determinabitur, quae formula inventa substituta dabit veram penduli simplicis isochroni longitudinem. Prodibunt autem sequentes aequationes

$$dy = \frac{-dx\,(h^2 - x^2)}{\sqrt{\left(\frac{4A^2}{Q^2} - (h^2 - x^2)^2\right)}} \quad \text{et} \quad ds = \frac{\frac{2A}{Q}\,dx}{\sqrt{\left(\frac{4A^2}{Q^2} - (h^2 - x^2)^2\right)}}.$$

Posito $\frac{h^2 Q}{2A} = C$, si hae aequationes differentiales integrentur praescripto modo et post integrationem ponatur $x = h$, habebuntur per series sequentes aequationes

$$\frac{b}{h} = \frac{2}{1.3}C + \frac{4.6}{3.5.7}C^3 + \frac{6.8.10}{5.7.9.11}C^5 + \text{etc.}$$

$$\text{et} \quad \frac{a}{h} = 1 + \frac{4}{3.5}C^2 + \frac{6.8}{5.7.9}C^4 + \text{etc.}$$

Cum vero $h$ ex observatione aeque pro quantitate cognita haberi possit ac $a$ et $b$, ponamus eam datam, eritque proxime

$$C = \frac{h^2 Q}{2A} = \frac{3b}{2h} - \frac{81b^3}{70h^3} = \frac{105bh^2 - 81b^3}{70h^3}$$

ideoque $A = \frac{35h^5 Q}{105bh^2 - 81b^3}$. Sumsi autem in expressione penduli simplicis isochroni $\frac{2a^4}{25A}$ quantitatem $a$ tam pro pondere laminae oscillantis, quam pro longitudine laminae. Quo igitur pondus $Q$ cum pondere laminae comparari queat, pono pondus laminae $= P$, eritque longitudo penduli simplicis isochroni $= \frac{2a^3 P}{25A}$. Quamobrem quaesita longitudo penduli simplicis isochroni erit

$$= \frac{6a^3 bP(35h^2 - 27b^2)}{875h^5 Q}$$

quamproxime. Cum autem longitudo penduli simplicis singulis minutis secundis oscillantis sit $3166\,^1/_4$ scrupulorum pedis Rhenani, si longitudo laminae $a$ in hujusmodi scrupulis exhibeatur, dabit

$$\frac{667h^2\sqrt{hQ}}{a\sqrt{abP(35h^2 - 27b^2)}}$$

numerum oscillationum, quas ista lamina uno minuto secundo absolvet. Si ergo unico experimento investigetur, quousque laminam datum pondus $Q$ de situ verticali deducere valeat, ope hujus formulae cognoscetur statim numerus oscillationum, quas ista lamina oscillans uno minuto secundo absolvet. Haec quidem expressio, quam dedi, tantum est verae proxima; nihilo tamen minus ista solutio veram oscillationum determinationem continet, cum hinc simul intelligatur, a quibusnam quadraturis vera oscillationum duratio pendeat. Problema ergo isthoc Bernoullianum huc redit, ut experimento quopiam valor litterae $A$, qua elasticitatem absolutam designavi, definiatur, id, quod ipsi per curvaturam laminae a dato pondere genitam explorare placuit. Mihi quidem loco hujusmodi experimenti commodius videtur valorem litterae $A$ per ipsum oscillationum numerum, qui observatione facile innotescere potest, determinare.

In litteris praeterea iisdem, in quibus Cl. Bernoullio solutionem meam problematis de vibrationibus laminae elasticae perscripsi, mentionem simul feci de oscillationibus corporum super plano vacillantium, cujusmodi est motus cunarum, cujus problematis solutionem quoque dedi in ante citata dissertatione mea. Ipse ergo Bernoullius in his litteris quoque suam hujus problematis solutionem exponit, et longitudinem penduli simplicis isochroni determinat ex radio osculi corporis in puncto contactus, quem ponit $= R$, distantia centri gravitatis totius corporis a puncto contactus, quam ponit $= b$, et praeterea ex distantia centri oscillationis corporis, si ex puncto contactus suspensum oscillationes perageret a puncto contactus, quam ponit $= \beta$, ex hisque invenit longitudinem penduli simplicis isochroni $= \frac{b\beta}{R-b}$. Haec expressio egregie congruit cum mea formula, quam § 27 dissertationis meae pro longitudine penduli simplicis isochroni dedi, ubi iisdem quantitatibus ad hanc determinationem sum usus.

Praeter haec mihi quoque Bernoullius nunciat, se rogatu cujusdam viri docti investigasse quantum aquae singulis minutis secundis a Rheno Basileae devehatur, seque invenisse hanc aquae copiam circiter 15000 pedes cubicos adaequare.

Novum etiam scribit prodiisse tomum commentariorum Academiae Parisinae, in quo autem perparum circa mathesin et physicam contineatur. Duarum tantum solutionum a Cll. Bouguero et Maupertuisio datarum mentionem facit ejusdem problematis, in quo via requiritur navis aequabiliter motae et cursum suum perpetuo versus aliam navim, in recta aequabiliter progredientem, dirigentis. Problema quidem hoc est mere geometricum, et facillime ad aequationem differentialem pro curva quaesita pervenitur, quae etiam, nisi in casu, quo celeritates utriusque navis ponuntur aequales, semper integrationem admittit. Equidem memini me in idem hoc problema jam ante complures annos, cum Basileae adhuc degissem, incidere, hoc tantum discrimine, quod loco navium duos viatores consideraverim, et illo tempore solvere.