X.

Détermination de l'effet d'une machine hydraulique inventée par Mr. Segner, Prof. à Gottingue.

Cette machine est composée d'un tuyau cylindrique vertical, tellement posé qu'il puisse librement tourner autour de son axe. (Fig. 162.) Ce cylindre n'est pas exprimé dans la figure qui n'en représente qu'une section horizontale $ABCDEF$ faite près de sa base inférieure. Dans cet endroit le tuyau est percé de plusieurs trous A, B, C, D, E, F dont chacun porte un tuyau horizontal, qui communique par ce trou avec le cylindre vertical. La figure représente six de ces tuyaux horizontaux Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, Ff attachés en bas au cylindre vertical. Ces tuyaux sont fermés à leur autre bout a, b, c, d, e, f, mais ils ont tous une ouverture à côté en α, β, γ, δ, ε, ζ.

La machine étant construite en sorte, si l'on remplit d'eau le tuyau vertical, elle sortira par les ouvertures α, β, γ, δ, ε, ζ des tuyaux horizontaux, et chacun d'eux sera poussé en arrière par la réaction de l'eau. Donc, puisque la machine est librement mobile autour de son axe, toutes ces forces de réaction feront tourner la machine dans le sens a, b, c, d, e, f. Et si l'on fait en sorte que le cylindre vertical demeure toujours plein d'eau, ce mouvement de rotation de la machine continuera non seulement, mais il deviendra aussi de plus en plus rapide, jusqu'à un certain degré de vitesse, qui dépend tant de la masse de toute la machine, que des obstacles qu'elle peut avoir à surmonter.

On comprend aisément que cette machine peut être employée à mettre en mouvement quantité d'autres machines, pourvu qu'on ait un réservoir ou une source d'eau, qui en fournit assez pour entretenir le tuyau vertical toujours plein d'eau. Or si la quantité d'eau, dont on peut profiter est donnée, on n'a qu'à déterminer la grandeur des ouvertures, α, β, γ etc. en sorte que la dépense lui soit proportionnée.

Or, pour déterminer l'effet d'une telle machine, il s'agit de trouver la force dont les jets d'eau qui sortent des ouvertures α, β, γ, δ etc., font tourner la machine, pour en juger combien d'obstacles elle sera capable de surmonter. Cette recherche sera non seulement fort curieuse, et peut-être fort utile pour la pratique; mais elle est aussi d'une telle nature, que les principes connus de l'hydraulique n'y apportent aucun secours. La théorie du mouvement de l'eau par des tuyaux de conduite, qu'on a cultivée depuis quelque temps avec beaucoup de soin, n'est pas non plus suffisante pour nous éclairer sur cette matière, puisque les tuyaux par lesquels l'eau se meut, ne sont pas en repos, mais qu'ils ont un mouvement causé par la force de l'eau même. Voilà donc un sujet presque tout à fait nouveau, c'est de déterminer le mouvement de l'eau par des tuyaux mobiles, et d'assigner la pression que les tuyaux en souffrent en chaque endroit. Cette circonstance demande des recherches beaucoup plus profondes, que les autres problèmes de l'hydraulique qu'on a traités jusqu'ici; mais c'est par là aussi, que cette science sera portée à un plus haut degré de perfection, et qu'elle sera rendue propre à développer quantité d'autres cas, qui sont de la dernière importance en plusieurs autres machines. Les problèmes suivants contiendront la méthode dont je me suis servi, pour déterminer l'action de la machine proposée.

Problème 1.

1. Si l'eau coule par un tuyau horizontal immobile, dont la courbure et l'amplitude soit donnée en chaque endroit, et que la vitesse de l'eau au commencement du tuyau soit connue pour chaque instant, trouver les forces, dont chaque particule d'eau sera sollicitée.

Solution. (Fig. 163.) Soit AME le tuyau courbe proposé, couché sur un plan horizontal que je suppose partout d'une amplitude extrêmement petite, de sorte que l'eau ne puisse avoir un autre mouvement, que selon la tangente de la courbe en chaque endroit. Cela non obstant, l'amplitude du tuyau pourra être considérée comme variable; ainsi supposant l'amplitude du tuyau au commencement $AB = ff$; soit en M, posant l'arc $AM = s$, l'amplitude $MN = zz$; de sorte que zz sera une certaine fonction de l'arc s; d'où prenant $Mm = ds$, l'amplitude en mn sera $= zz + zzdz$. Maintenant pour l'instant présent, soit $\sqrt{v}$ la vitesse, avec laquelle l'eau coule par la section AB; et après l'élément de temps dt, que cette vitesse en AB devienne $\sqrt{(v+dv)} = \sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}}$; de sorte que v sera une fonction du temps t. Considérons dans le tuyau l'élément d'eau MN comme une section infiniment mince, et à l'instant présent la vitesse de cette section sera $= \frac{ff}{zz}\sqrt{v}$, dont la direction sera suivant la tangente du tuyau en M. Avec cette vitesse cet élément MN parcourra donc dans le tuyau l'espace $Mm = \frac{ffdt}{zz}\sqrt{v}$ dans le temps dt, et sa vitesse en mn sera

$$= \frac{ff}{zz}\sqrt{v} + d\,\frac{ff}{zz}\sqrt{v} = \frac{ff}{zz}\sqrt{v} - \frac{2ffdz}{z^3}\sqrt{v} + \frac{ffdv}{2zz\sqrt{v}}.$$

Qu'on rapporte le lieu de l'élément MN à un axe fixe AD par les coordonnées $AP = x$ et $PM = y$; et qu'on décompose le mouvement de cet élément MN suivant les mêmes directions. Pour cet effet, posant l'élément de la courbe $Mm = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, la vitesse de MN, suivant la direction AP, sera $= \frac{ffdx}{zzds}\sqrt{v}$, et suivant la direction PM, $= \frac{ffdy}{zzds}\sqrt{v}$. Or, posant l'élément $Mm = ds$, que la section MN parcourt dans le temps dt, la vitesse suivant AP sera $= \frac{dx}{dt}$, et suivant $PM = \frac{dy}{dt}$; de sorte que $\frac{ffdt}{zz}\sqrt{v} = ds$ et $dt = \frac{zzds}{ff\sqrt{v}}$.

Soit maintenant la section d'eau MN sollicitée par deux forces accélératrices, l'une P selon la direction AP, et l'autre Q, selon la direction PM; et par les principes de la mécanique on aura, en prenant dt pour constant:

$$2\,ddx = P\,dt^2 \quad \text{et} \quad 2\,ddy = Q\,dt^2,$$

$$\text{ou bien} \quad P = \frac{2\,ddx}{dt^2} \quad \text{et} \quad Q = \frac{2\,ddy}{dt^2},$$

où il faut substituer les valeurs de ddx et ddy, qui leur conviennent en vertu de l'équation $dt = \frac{zz\,ds}{ff\sqrt{v}}$, en supposant dt constant. De là on aura:

$$zzv\,dds + 2zv\,dz\,ds - \tfrac{1}{2}zz\,ds\,dv = 0$$

et l'on sait qu'il y a

$$dx\,ddx + dy\,ddy = ds\,dds.$$

Or, ayant trouvé ces deux forces accélératrices P et Q, on les réduira aisément à deux autres, dont l'une agit suivant la direction du tuyau Mm, et l'autre selon la direction perpendiculaire MN au tuyau. La première sera $= \frac{P\,dx + Q\,dy}{ds}$, et l'autre $= \frac{Q\,dx - P\,dy}{ds}$. D'où remettant pour P et Q les valeurs trouvées, on aura:

$$\text{la force accélératrice selon } Mm = \frac{2\,dx\,ddx + 2\,dy\,ddy}{ds\,dt^2} = \frac{2\,dds}{dt^2}$$

$$\text{et la force accélératrice selon } MN = \frac{2\,dx\,ddy - 2\,dy\,ddx}{ds\,dt^2}.$$

Le rayon de la développée étant posé $= r$, on sait que $r = \frac{ds^3}{dy\,ddx - dx\,ddy}$, supposant la courbe concave vers l'axe.

Donc puisque $dds = -\frac{2\,dz\,ds}{z} + \frac{ds\,dv}{2v}$, les formes cherchées seront:

$$\text{la force suivant } Mm = -\frac{4\,dz\,ds}{z\,dt^2} + \frac{ds\,dv}{v\,dt^2},$$

$$\text{la force suivant } MN = -\frac{2\,ds^2}{r\,dt^2} = -\frac{2f^4v}{rz^4}.$$

Ce sont les forces accélératrices, dont la section d'eau infiniment mince MN est sollicitée dans l'instant présent, où la vitesse de l'eau dans la section AB du tuyau est supposée $= \sqrt{v}$.

2. **Coroll. 1.** La force accélératrice $-\frac{2f^4v}{rz^4}$, qui vient d'être trouvée pour la direction MN, étant négative, marque que l'élément d'eau en est poussé suivant la direction NM, c'est à dire vers le centre du cercle osculateur de la courbe AM au point M. En effet, on voit que cette formule $\frac{2f^4v}{rz^4}$ exprime la force centrifuge qui convient à l'eau, en tant qu'elle est obligée de suivre dans son mouvement la courbure du tuyau. Car posant la vitesse véritable de l'élément d'eau $MN = \sqrt{V}$, de sorte que V marque la hauteur due à cette vitesse, on aura $\sqrt{V} = \frac{ds}{dt} = \frac{ff\sqrt{v}}{zz}$, et partant $\frac{f^4v}{z^4} = V$, d'où la force NM sera $= \frac{2V}{r}$ qui est, comme on sait, l'expression de la force centrifuge d'un corps qui se meut dans un cercle dont le rayon $= r$ avec la vitesse $= \sqrt{V}$.

3. **Coroll. 2.** Donc pendant que l'élément d'eau MN passe par l'espace infiniment petit Mm du tuyau, et qu'il est obligé de changer la direction de son mouvement en suivant la courbure du tuyau, il fera des efforts égaux à la force $\frac{2f^4v}{rz^4}$ contre les parois du tuyau, dont la partie Nn, convexe par dehors, éprouvera la force. Par conséquent, le tuyau sera pressé en chaque point N en dehors suivant la direction Nv qui y est perdendiculaire, avec une force, qui convient à la force accélératrice $=\frac{2f^4v}{rz^4}$.

4. **Coroll. 3.** Pour connaître la véritable force que le tuyau soutient de ce côté, on n'a qu'à chercher la force motrice qui est le produit de la force accélératrice par la masse qui en est douée. Considérons, pour cet effet, la quantité d'eau, qui remplit dans l'instant présent l'espace infiniment petit du tuyau $MNmn$, qui est $=zz\,ds$, à cause de l'amplitude du tuyau en $MN=zz$ et $Mm=ds$: et la force actuelle, dont le tuyau sera poussé en Nn selon la direction $N\nu$, sera $=\frac{2f^4v\,ds}{rzz}$. Et à moins que le tuyau ne soit bien attaché sur le plan horizontal, il sera emporté par cette force.

5. **Coroll. 4.** Pour l'autre force accélératrice $-\frac{4dz\,ds}{z\,dt^2}+\frac{ds\,dv}{v\,dt^2}$, qui agit selon la direction Mm qui est celle du mouvement de la section MN, elle est uniquement employée à accélérer le mouvement, pendant que la section MN parvient en mn. Car posant la véritable vitesse de l'eau en $MN=\sqrt{V}$, à cause de $V=\frac{f^4v}{z^4}$, on aura $\frac{dV}{V}=\frac{dv}{v}-\frac{4dz}{z}$, d'où cette force accélératrice sera $=\frac{ds\,dV}{V\,dt^2}$. Or à cause de $\sqrt{V}=\frac{ds}{dt}$, il sera $Vdt^2=ds^2$, de sorte que cette force sera $=\frac{dV}{ds}$ qui est l'expression connue pour l'accélération d'un corps dont la hauteur due à la vitesse reçoit l'accroissement dV, pendant que le corps parcourt l'espace ds.

6. **Coroll. 5.** Or dans la recherche dont il s'agit ici, il vaut mieux considérer la vitesse de l'eau dans une section fixe du tuyau AB, au lieu de la vitesse que l'eau a dans un endroit quelconque du tuyau. Ainsi, cette force accélératrice suivant la direction Mm est $=\frac{ds\,dv}{v\,dt^2}-\frac{4dz\,ds}{z\,dt^2}$; et est, par conséquent, composée de deux membres, dont le premier renferme l'accélération de l'eau en AB pendant le temps dt, et l'autre, l'élargissement du tuyau de MN en mn où la section MN parvient dans le temps dt.

7. **Coroll. 6.** Pour mieux comprendre la force de cette expression, il faut considérer qu'elle contient deux sortes de quantités variables. Les unes dépendent du temps t, dont v est une fonction, et les autres, du lieu M dans le tuyau ou de l'arc $AM=s$ dont zz est une fonction. Ainsi tant $\frac{dv}{dt}$ que $\frac{dz}{ds}$ seront des quantités finies déterminées dont la première dépend du mouvement variable de l'eau en AB, et l'autre de la figure du tuyau même. Donc ayant

$$dt=\frac{zz\,ds}{ff\sqrt{v}} \quad \text{ou} \quad \frac{ds}{dt}=\frac{ff\sqrt{v}}{zz},$$

il conviendra de représenter la force accélératrice suivant Mm en sorte

$$\frac{ff}{zz\sqrt{v}}\cdot\frac{dv}{dt}-\frac{4f^4v}{z^5}\cdot\frac{dz}{ds}.$$

8. **Coroll. 7.** Il faut donc que la section d'eau MN soit actuellement sollicitée par cette force accélératrice; or, puisqu'elle n'a point de force en elle-même, il s'en suit que cette force lui est imprimée par l'eau voisine, ou celle qui la suit dans le tuyau. Cette force vient donc de la pression dont les parties d'eau agissent les unes sur les autres. Ainsi, si nous posons que la compression de l'eau en MN soit exprimée par sa hauteur p, ou qu'elle soit égale à la pression qui se trouve dans une eau dormante à la profondeur $= p$, la pression en mn sera $= p + dp$ dans le même instant, et p sera une fonction de s tant que nous conservons l'état présent de l'eau dans le tuyau. Donc l'élément d'eau $MNmn$ est poussé en avant par le poids d'une colonne d'eau de la hauteur $= p$, et il sera poussé en arrière par une colonne de la hauteur $= p + dp$, donc la pression en avant répondra à la colonne dp qui, agissant sur toute la base $MN = zz$, donnera la force motrice $= -zz\,dp$ qui poussant la masse d'eau $= zz\,ds$, produira la force accélératrice en avant $= -\frac{dp}{ds}$, qui doit être égale à celle qui vient d'être trouvée, de sorte que nous ayons

$$-\frac{dp}{ds} = \frac{ff}{zz\sqrt{v}} \cdot \frac{dv}{dt} - \frac{4f^4 v}{z^5} \cdot \frac{dz}{ds}.$$

9. **Coroll. 8.** Nous aurons donc pour trouver l'état de pression de l'eau dans le tuyau:

$$dp = -\frac{ff\,ds}{zz\sqrt{v}} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{4f^4 v\,dz}{z^5}.$$

De là, si nous voulons trouver pour l'instant présent la pression de l'eau en chaque endroit du tuyau, il faut considérer tant la quantité v, que $\frac{dv}{dt}$ comme constante, et alors en intégrant cette formule, nous obtiendrons

$$p = \text{Const.} - \frac{ff\,dv}{dt\sqrt{v}} \int \frac{ds}{zz} - \frac{f^4 v}{z^4}$$

où l'intégrale $\int \frac{ds}{zz}$ dépend uniquement de la figure du tuyau qu'il faut prendre en sorte, qu'il s'évanouisse au commencement A, ou lorsque $z = 0$.

10. **Scholie.** Quoique la machine, à l'examen de laquelle je me suis proposé de borner mes recherches, ne contienne pas de tuyaux courbes, il faut néanmoins étendre le calcul à des tuyaux courbes, puisque l'eau, en sortant du côté des tuyaux horizontaux de la machine, change subitement de direction dans son mouvement. Or, pour appliquer le calcul à un si subit changement, la plus sûre méthode est de considérer en général un tuyau courbé d'une manière quelconque; car alors on n'a qu'à rassembler toute la courbure dans un seul endroit, pour connaître l'effet, lorsque l'eau sort à côté du tuyau; ce cas revenant au même, que si le tuyau était courbé subitement à angles droits dans l'endroit, où est l'ouverture. C'est pour cette raison que j'ai commencé mes recherches par celle du mouvement de l'eau par un tuyau courbe quelconque, posé dans une situation horizontale, et afin qu'on ne rencontre pas d'abord à la fois trop de difficultés, j'ai supposé ce tuyau en repos. En effet, la solution de ce problème me facilitera très considérablement celle du cas où le tuyau sera supposé mobile, car quoique la solution, que je viens de tirer des premiers principes de la mécanique, soit assez longue, on verra par les corollaires, qu'on l'aurait pu rendre beaucoup plus simple, si l'on y introduisait d'abord la vraie vitesse $\sqrt{V}$ de l'eau, qui se trouve dans la section MN,

car cette vitesse devant être en $mn = \sqrt{(V + dV)}$, on voit d'abord que pour produire cette accélération, il faut une force accélératrice $= \frac{dV}{ds}$ suivant la direction Mm; et outre cela, il est clair que la courbure du tuyau, dont le rayon en M est $= r$, demande une force accélératrice $= \frac{2V}{r}$. Ensuite, ayant trouvé ces formules, on n'a qu'à introduire dans le calcul la valeur de $V = \frac{f^4 v}{z^4}$, qui lui convient en vertu de la vitesse donnée dans la section AB et de son changement dans le temps dt. Je me servirai donc de ces avantages dans la solution du problème suivant.

Problème 2.

11. (Fig. 164.) Le tuyau horizontal $ABEF$ étant tourné autour d'un axe vertical O avec un mouvement quelconque, si l'eau coule par ce tuyau en y entrant à AB avec une vitesse quelconque, trouver les forces dont chaque particule d'eau sera sollicitée.

Solution. Soit, comme auparavant, l'ouverture du tuyau en AB où l'eau y entre $= ff$ et l'amplitude dans un autre endroit quelconque $MN = zz$, posant l'arc $AM = s$; et que le rayon de courbure en M soit $= r$, puisque nous en aurons besoin. Soit, à l'instant présent, le tuyau dans la situation $ABEF$, et que son mouvement de rotation autour de l'axe O soit tel, que la vitesse du point A soit $= \sqrt{u}$ dans le sens $ABA'B'$; posant donc le rayon $OA = a$, la vitesse rotatoire sera $= \frac{\sqrt{u}}{a}$, et si l'on nomme la distance d'un point quelconque M du tuyau à l'axe $O = y$, la vitesse de rotation de ce point sera $= \frac{y\sqrt{u}}{a}$. Que t marque le temps que le tuyau a mis à parvenir depuis le commencement du mouvement dans la situation présente $ABEF$, et u sera une certaine fonction de t, d'où l'on connaîtra le mouvement de rotation du tuyau à chaque temps proposé. Or, pour représenter le mouvement de l'eau, il faut considérer, que premièrement, le mouvement du tuyau lui est commun, de sorte que si l'eau n'avait point de mouvement dans le tuyau même, elle aurait pourtant celui du tuyau, et la vitesse de la section MN serait $= \frac{y\sqrt{u}}{a}$ selon la direction MM' perpendiculaire à la droite MO. Ce serait le cas, si l'eau demeurait immobile dans le tuyau et que la particule MN ne quittât jamais cet endroit, ce qui arriverait, si le tuyau était bouché en EF de sorte que l'eau n'en saurait sortir.

Mais que l'eau ait aussi un mouvement dans le tuyau même, outre celui, qui lui est commun avec le tuyau, et que la vitesse, avec laquelle l'eau entre dans le tuyau AB soit $= \sqrt{v}$, la quantité v marquant une fonction quelconque du temps t: et la vitesse de l'eau dans la section MN sera $= \frac{ff\sqrt{v}}{zz}$, dont la direction est celle du tuyau dans cet endroit, suivant Mm. Par là, on connaîtra le mouvement de l'eau dans le tuyau, indépendamment du mouvement de rotation. Ainsi le vrai mouvement de l'élément d'eau, qui se trouve dans la section MN, sera composé de deux mouvements, dont l'un sera dirigé selon Mm avec une vitesse $= \frac{ff\sqrt{v}}{zz}$, et l'autre selon MM' avec une vitesse $= \frac{y\sqrt{u}}{a}$. De là on connaîtra, à chaque temps proposé, le mouvement de chaque particule d'eau dans le tuyau avec le mouvement du tuyau même. Il s'agit donc de déterminer les forces requises, pour que chaque particule d'eau puisse poursuivre ce mouvement.

Supposons qu'après un temps infiniment petit dt, le tuyau parvienne dans la situation $A'B'E'$ et l'arc AA' sera $= dt\sqrt{u}$ et l'angle $AOA' = \frac{dt\sqrt{u}}{a}$. Pendant ce temps, la particule d'eau M parviendra dans le tuyau en mn, de sorte que $Mm = \frac{ff\,dt\sqrt{v}}{zz}$. Or le point du tuyau m étant transporté en m', par le mouvement de rotation, la particule MN parviendra en effet en $m'n'$. Il faudrait maintenant rapporter ces lieux à un axe fixe OD par les coordonnées OP, PM, et décomposer le mouvement suivant ces mêmes directions, pour en déduire les forces selon les principes de mécanique; mais de peur que la figure n'en devienne trop embrouillée, à cause de l'épaisseur du tuyau, qui n'entre pourtant en considération qu'en tant que la vitesse $\frac{ff\sqrt{v}}{zz}$ en est affectée, je m'en vais poursuivre cette recherche sur une figure, où l'amplitude du tuyau n'est pas exprimée.

(Fig. 165.) Que AME représente donc la position actuelle du tuyau, après un temps écoulé $= t$ depuis le commencement du mouvement, et qu'au commencement le point A ait été en C. Posons l'angle $COA = \vartheta$ que le tuyau a déjà décrit depuis le commencement, ou dans le temps $= t$, et l'arc de cercle CA sera $= a\vartheta$ et sa différentielle $AA' = a\,d\vartheta = dt\sqrt{u}$, de sorte que $d\vartheta = \frac{dt\sqrt{u}}{a}$. Pour considérer dans l'instant présent le mouvement de la particule d'eau qui se trouve en M, posant l'arc $AM = s$, tirons la droite $OM = y$, et soit l'arc $AX = x$. Puis, prenant $Mm = ds$, et tirant Om, soit $M'Mk$ perpendiculaire sur Om, et nous aurons

$$Xx = dx, \quad Mk = \frac{y\,dx}{a} \quad \text{et} \quad mk = dy, \quad \text{donc} \quad ds^2 = dy^2 + \frac{yy\,dx^2}{aa}.$$

Maintenant, qu'on décompose le mouvement selon Mm, dont la vitesse est $= \frac{ff\sqrt{v}}{zz}$, selon les directions $M\mu$ et Mk dont celle-là éloigne l'eau de l'axe O, et la vitesse selon $M\mu$ sera $= \frac{ff\,dy\sqrt{v}}{zz\,ds}$, et la vitesse selon $Mk = \frac{ff\,y\,dx\sqrt{v}}{a\,zz\,ds}$. Or celle-ci étant contraire à l'autre mouvement, qui est commun à l'eau avec le tuyau, et dont la vitesse selon MM' est $= \frac{y\sqrt{u}}{a}$, le vrai mouvement de la particule d'eau en M sera réduit à ces deux directions $M\mu$ et MM' dont les vitesses sont:

$$\text{selon } M\mu = \frac{ff\,dy\sqrt{v}}{zz\,ds}, \text{ et selon } MM' = \frac{y}{a}\left(\sqrt{u} - \frac{ff\,dx\sqrt{v}}{zz\,ds}\right).$$

Posons maintenant, pour poursuivre plus commodément le calcul,

$$\text{la vitesse selon } M\mu \text{ ou } \frac{ff\,dy\sqrt{v}}{zz\,ds} = V,$$

$$\text{la vitesse selon } MM' \text{ ou } \frac{y}{a}\left(\sqrt{u} - \frac{ff\,dx\sqrt{v}}{zz\,ds}\right) = U$$

et soit la droite OCD l'axe fixe, auquel nous rapporterons ce mouvement et, ayant tiré la perpendiculaire MP, soit $OP = X$ et $PM = Y$. Donc à cause de $OM = y$ et l'angle $COX = \vartheta - \frac{x}{a}$ nous aurons

$$X = y\cos\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right) \quad \text{et} \quad Y = y\sin\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right).$$

Ensuite, décomposant le mouvement suivant ces directions fixes OP et PM, nous trouverons:

$$\text{la vitesse selon } OP = \frac{XV}{y} - \frac{XU}{y} = \frac{dX}{dt},$$

$$\text{la vitesse selon } PM = \frac{YV}{y} + \frac{XU}{y} = \frac{dY}{dt}.$$

Soient à présent les forces, dont l'eau en M est sollicitée, l'une qui agit selon la direction $OP = P$, et l'autre qui agit selon la direction $PM = Q$; et par les principes du mouvement, on aura en supposant l'élément du temps dt constant:

$$P = \frac{2ddX}{dt^2} \quad \text{et} \quad Q = \frac{2ddY}{dt^2}.$$

Or comme
$$\frac{dX}{dt} = V\cos\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right) - U\sin\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right)$$

et
$$\frac{dY}{dt} = V\sin\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right) + U\cos\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right),$$

la différentiation donnera:

$$P = \frac{2}{dt}\left(dV\cos\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right) - V\left(d\vartheta - \frac{dx}{a}\right)\sin\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right) - dU\sin\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right) - U\left(d\vartheta - \frac{dx}{a}\right)\cos\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right)\right),$$

$$Q = \frac{2}{dt}\left(dV\sin\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right) + V\left(d\vartheta - \frac{dx}{a}\right)\cos\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right) + dU\cos\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right) - U\left(d\vartheta - \frac{dx}{a}\right)\sin\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right)\right).$$

Réduisons ces deux forces à deux autres dont l'une agisse selon $M\mu$ et l'autre selon MM', et la force selon $M\mu$ sera

$$= P\cos\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right) + Q\sin\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right)$$

et la force selon MM'
$$= Q\cos\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right) - P\sin\left(\vartheta - \frac{x}{a}\right).$$

De là nous aurons:

$$\text{la force selon } M\mu = \frac{2}{dt}\left(dV - Ud\vartheta + \frac{Udx}{a}\right),$$

$$\text{la force selon } MM' = \frac{2}{dt}\left(Vd\vartheta - \frac{Vdx}{a} + dU\right).$$

Réduisons enfin ces deux forces à deux autres, dont l'une agisse selon la direction du tuyau Mm, et l'autre selon la direction du rayon de courbure MR; et l'on aura:

$$\text{la force selon } Mm = \quad \text{force } M\mu \cdot \frac{dy}{ds} - \text{force } MM' \cdot \frac{ydx}{ads},$$

$$\text{la force selon } MR = -\text{force } M\mu \cdot \frac{ydx}{ads} - \text{force } MM' \cdot \frac{dy}{ds}.$$

Donc ces deux forces seront:

$$\text{la force } Mm = \frac{2}{ds\,dt}\left(dy\,dV - Ud\vartheta\,dy + \frac{U\,dx\,dy}{a} - \frac{Vy\,d\vartheta\,dx}{a} + \frac{Vy\,dx^2}{aa} - \frac{y\,dx\,dU}{a}\right),$$

$$\text{la force } MR = \frac{2}{ds\,dt}\left(-\frac{y\,dx\,dV}{a} + \frac{Uy\,d\vartheta\,dx}{a} - \frac{Uy\,dx^2}{aa} - Vd\vartheta\,dy + \frac{Vdx\,dy}{a} - dy\,dU\right).$$

Soit maintenant la vitesse de l'eau dans le tuyau $= \sqrt{S}$, de sorte que $\sqrt{S} = \frac{ff\sqrt{v}}{zz}$, et nous aurons

$$V = \frac{dy}{ds}\sqrt{S} \quad \text{et} \quad U = \frac{y\sqrt{u}}{a} - \frac{y\,dx}{a\,ds}\sqrt{S}.$$

Or introduisant le rayon de courbure r, pour éviter les différentio-différentielles, à cause de:

$$d.\frac{dy}{ds} = -\frac{y\,dx}{ar} + \frac{y\,dx^2}{aa\,ds} \quad \text{et} \quad d.\frac{y\,dx}{a\,ds} = \frac{dy}{r} - \frac{dx\,dy}{a\,ds},$$

nous aurons

$$dV = \frac{dy\,dS}{2ds\sqrt{S}} - \frac{y\,dx}{ar}\sqrt{S} + \frac{y\,dx^2}{aa\,ds}\sqrt{S},$$

$$dU = \frac{dy\sqrt{u}}{a} + \frac{y\,du}{2a\sqrt{u}} - \frac{y\,dx\,dS}{2a\,ds\sqrt{S}} - \frac{dy\sqrt{S}}{r} + \frac{dx\,dy}{a\,ds}\sqrt{S}.$$

Ces valeurs étant substituées, on trouvera, la réduction faite à cause de $ds^2 = dy^2 + \frac{yy\,dx^2}{aa}$:

$$\text{la force } Mm = \frac{2}{ds\,dt}\left(\frac{ds\,dS}{2\sqrt{S}} - \frac{y\,d\vartheta\,dy}{a}\sqrt{u} - \frac{yy\,dx\,du}{2aa\sqrt{u}}\right),$$

$$\text{la force } MR = \frac{2}{ds\,dt}\left(\frac{ds^2}{r}\sqrt{S} - d\vartheta\,ds\sqrt{S} - \frac{ds^2}{a}\sqrt{u} + \frac{yy\,d\vartheta\,dx}{aa}\sqrt{u} - \frac{y\,dy\,du}{2a\sqrt{u}}\right).$$

Or si $Mm = ds$ est l'espace que la particule d'eau en M parcourt dans le tuyau pendant l'élément du temps dt, il y aura $\frac{ds}{\sqrt{S}} = dt$ et $d\vartheta = \frac{dt\sqrt{u}}{a}$. Donc faisant usage de ces formules, on obtiendra:

$$\text{la force } Mm = \frac{dS}{ds} - \frac{2uy\,dy}{aa\,ds} - \frac{yy\,dx\,du}{aa\,ds\,dt\sqrt{u}},$$

$$\text{la force } MR = \frac{2S}{r} - \frac{4\sqrt{uS}}{a} + \frac{2uyy\,dx}{a^3\,ds} - \frac{y\,dy\,du}{a\,ds\,dt\sqrt{u}}.$$

Enfin puisque

$$S = \frac{f^4 v}{z^4} \quad \text{et} \quad dS = \frac{f^4\,dv}{z^4} - \frac{4f^4 v\,dz}{z^5},$$

on aura:

$$\text{la force } Mm = \frac{f^4\,dv}{z^4\,ds} - \frac{4f^4 v\,dz}{z^5\,ds} - \frac{2uy\,dy}{aa\,ds} - \frac{yy\,dx\,du}{aa\,ds\,dt\sqrt{u}},$$

$$\text{la force } MR = \frac{2f^4 v}{rz^4} - \frac{4ff}{azz}\sqrt{uv} + \frac{2uyy\,dx}{a^3\,ds} - \frac{y\,dy\,du}{a\,ds\,dt\sqrt{u}}.$$

Et ce sont les forces accélératrices, qui doivent agir sur l'élément d'eau en M, afin qu'il poursuive le mouvement qui vient d'être supposé par les deux vitesses $\sqrt{v}$ et $\sqrt{u}$, dont celle-là détermine le mouvement de l'eau dans le tuyau, et celle-ci le mouvement du tuyau même.

12. **Coroll. 1.** Si le tuyau est supposé en repos, comme dans le cas du problème précédent, on aura $u = 0$ et les forces accélératrices se trouveront comme auparavant

$$\text{la force } Mm = \frac{dS}{ds} = \frac{f^4\,dv}{z^4\,ds} - \frac{4f^4 v\,dz}{z^5\,ds},$$

$$\text{la force } MR = \frac{2S}{r} = \frac{2f^4 v}{rz^4},$$

où S marque la hauteur, due à la vitesse avec laquelle l'eau se meut dans le tuyau et qui est dans ce cas sa véritable vitesse.

13. **Coroll. 2.** Puisque v est une fonction du temps t, la formule $\frac{dv}{dt}$ en sera aussi une, de même que u et $\frac{du}{dt}$. Donc dans le premier terme des formules trouvées, qui est $\frac{f^4 dv}{z^4 ds}$, il faudra pour ds mettre sa valeur qui lui convient par cette équation $ds = dt\sqrt{S} = \frac{ffdt}{zz}\sqrt{v}$. Et partant les forces cherchées seront:

$$\text{la force } Mm = \frac{ffdv}{zz\,dt\sqrt{v}} - \frac{4f^4 v\,dz}{z^5\,ds} - \frac{2uy\,dy}{aa\,ds} - \frac{yy\,dx\,du}{aa\,ds\,dt\sqrt{u}},$$

$$\text{la force } MR = \frac{2f^4 v}{rz^4} - \frac{4ff\sqrt{uv}}{azz} + \frac{2uyy\,dx}{a^3\,ds} - \frac{ydy\,du}{a\,ds\,dt\sqrt{u}}.$$

14. **Coroll. 3.** Si l'un et l'autre mouvement était uniforme, ou que les quantités u et v fussent constantes, ces forces seraient:

$$\text{la force } Mm = -\frac{f^4 v\,dz}{z^5\,ds} - \frac{2uy\,dy}{aa\,ds},$$

$$\text{la force } MR = \frac{2f^4 v}{rz^4} - \frac{4ff}{azz}\sqrt{uv} + \frac{2uyy\,dx}{a^3\,ds}.$$

Ce cas est en particulier remarquable, puisqu'on peut supposer que la machine proposée se réduit enfin à un tel mouvement uniforme.

Problème 3.

15. (Fig. 166.) Si le tuyau horizontal $ABEF$ tourne autour de l'axe vertical en O, avec un mouvement quelconque, et que l'eau y soit continuellement poussée par l'ouverture AB avec une force quelconque, d'où elle sorte par l'ouverture EF: déterminer tant le mouvement de l'eau par ce tuyau, que la pression que le tuyau en soutient dans tous ses points.

Solution. Posons, comme auparavant, le rayon du cercle CA dans lequel le point A tourne, $OA = a$ et la vitesse du point $A = u$, qui sera une fonction du temps t. Ensuite, soit q la force par laquelle l'eau est forcée d'entrer dans le tuyau par l'ouverture AB, ou que q marque la hauteur d'une colonne d'eau, à laquelle est égale la pression de l'eau en AB qui dépendra aussi du temps t, à moins qu'elle ne soit pas constante. De plus, soit l'ouverture en $AB = ff$ et la vitesse, avec laquelle l'eau y entre dans le tuyau $= \sqrt{v}$ de laquelle dépend la vitesse de l'eau dans chaque endroit pour l'instant présent, de sorte qu'il s'agit de trouver cette quantité v, qui dépendra aussi du temps t. Cela posé, considérons un élément quelconque $MNmn$ dans le tuyau, et ayant tiré la droite OM, soit $AX = x$, $OM = y$ et l'élément de la courbe

$$M = ds = \sqrt{\left(dy^2 + \frac{yy\,dx^2}{aa}\right)},$$

et puisque la courbe AME, ou la figure du tuyau est donnée, on aura une équation entre x et y: soit de plus le rayon de courbure en M savoir $MR = r$, et il y aura

$$\frac{dy}{r} = \frac{dx\,dy}{ads} + d.\frac{ydx}{ads} = \frac{yddx + 2dy\,dx}{ads},$$

*

prenant l'élément ds pour constant; or l'amplitude du tuyau en m soit $= zz$, dont la valeur dépendra aussi des variables x et y. Comme ce sont les mêmes dénominations, que celles du problème précédent, l'élément d'eau en $MNmn$ doit être sollicité par deux forces accélératrices, dont l'une agit selon la direction Mm ou sélon la tangente du tuyau, et l'autre selon la direction du rayon de courbure MR; et ces forces seront

$$\text{la force } Mm = \frac{ff\,dv}{zz\,dt\sqrt{v}} - \frac{4f^4 v\,dz}{z^5\,ds} - \frac{2uy\,dy}{aa\,ds} - \frac{yy\,dx\,du}{aa\,ds\,dt\sqrt{u}},$$

$$\text{la force } MR = \frac{2f^4 v}{rz^4} - \frac{4ff}{azz}\sqrt{uv} + \frac{2uyy\,dx}{a^3\,ds} - \frac{y\,dy\,du}{a\,ds\,dt\sqrt{u}}.$$

Soit maintenant l'état de compression de l'eau en $MN = p$ et en $mn = p + dp$, d'où résulte une force accélératrice en avant dans le tuyau $= \frac{-dp}{ds}$, comme nous avons vu dans le problème précédent.

Donc nous aurons:

$$dp = \frac{-ff\,dv}{dt\sqrt{v}} \cdot \frac{ds}{zz} + 4f^4 v \frac{dz}{z^5} + \frac{2uy\,dy}{aa} + \frac{du}{aa\,dt\sqrt{u}} yy\,dx,$$

et prenant les intégrales par la longueur du tuyau, en supposant u et v de même que $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$ constantes, on aura:

$$p = C - \frac{ff\,dv}{dt\sqrt{v}} \int \frac{ds}{zz} - \frac{f^4 v}{z^4} + \frac{uyy}{aa} + \frac{du}{aa\,dt\sqrt{u}} \int yy\,dx.$$

Pour déterminer cette constante, il faut considérer, qu'à la sortie en EF l'état de compression de l'eau doit s'évanouir; soit donc l'ouverture en $EF = hh$; la distance $OE = b$; et prenant les intégrales par toute la longueur du tuyau soit:

$$\int \frac{ds}{zz} = E \quad \text{et} \quad \int \frac{yy\,dx}{a} = F;$$

et l'on aura pour la dernière section EF

$$0 = C - \frac{ffE\,dv}{dt\sqrt{v}} - \frac{f^4 v}{h^4} + \frac{bbu}{aa} + \frac{F\,du}{a\,dt\sqrt{u}},$$

et partant, en général, pour une section quelconque MN:

$$p = \left(\frac{f^4}{h^4} - \frac{f^4}{z^4}\right) v + \frac{ff\,dv}{dt\sqrt{v}} \left(E - \int \frac{ds}{zz}\right) - \left(\frac{bb}{aa} - \frac{yy}{aa}\right) u - \frac{du}{a\,dt\sqrt{u}} \left(F - \int \frac{yy\,dx}{a}\right).$$

Donc à la première section AB où $y = a$, $zz = ff$, $\int \frac{ds}{zz} = 0$ et $\int yy\,dx = 0$, la pression, que nous avons supposée $= q$, sera:

$$q = \left(\frac{f^4}{h^4} - 1\right) v + \frac{ffE\,dv}{dt\sqrt{v}} - \left(\frac{bb}{aa} - 1\right) u - \frac{F\,du}{a\,dt\sqrt{u}}$$

d'où l'on doit déterminer la quantité v.

Pour l'autre force selon MR, c'est le tuyau même qui la doit exercer sur l'eau, et partant le tuyau en sera repoussé suivant la direction NS par une force égale, qui étant accélératrice, il faut la multiplier par la masse de l'élément $MmNn = zz\,ds$, pour avoir la force motrice dont l'élément d'eau $MmNn$ pousse suivant la direction NS perpendiculaire à la tangente du tuyau.

Donc cette force motrice selon NS qui résulte de l'élément d'eau $MmNn$ sera:

$$2f^4 v \frac{ds}{rzz} - \frac{4ff\,ds}{a} \sqrt{uv} + \frac{2u}{a^3} yy\,zz\,dx - \frac{du}{a\,dt\sqrt{u}} y\,zz\,dy.$$

Cette force tend à tourner le tuyau autour de l'axe O dans le sens AG, et partant à accélérer le mouvement de rotation du tuyau qui se fait dans le même sens. Le moment de cette force, pour produire cet effet se trouvera donc, si l'on multiplie la force tant par la distance $OM = y$ que par le sinus de l'angle OMR qui est $= \frac{dy}{ds}$; ou en tout par $\frac{y\,dy}{ds}$. Par conséquent, le moment de la force élémentaire NS sera:

$$2f^4 v \frac{y\,dy}{rzz} - \frac{4ff\,y\,dy}{a} \sqrt{uv} + \frac{2u}{a^3} - \frac{y^3\,zz\,dx\,dy}{ds} - \frac{du}{a\,dt\sqrt{u}} \cdot \frac{yy\,zz\,dy^2}{ds}.$$

Et partant le moment total de toutes les forces de l'eau pour faire tourner le tuyau autour de l'axe dans le sens AG sera:

$$2f^4 v \int \frac{y\,dy}{rzz} - \frac{2ff\,yy}{a} \sqrt{uv} + \frac{2u}{a^3} \cdot \int \frac{y^3\,zz\,dx\,dy}{ds} - \frac{du}{a\,dt\sqrt{u}} \int \frac{yy\,zz\,dy^2}{ds} + 2aff\sqrt{uv},$$

en prenant les intégrales en sorte qu'elles s'évanouissent au point A, et en les étendant jusqu'au dernier bout du tuyau EF.

C'est l'effet entier des forces de l'eau sur le mouvement du tuyau; car la pression de l'eau p dans le tuyau, agissant sur tous les côtés également, se détruit elle-même, de sorte qu'il n'y résulte aucun moment pour déranger le mouvement du tuyau.

16. **Coroll. 1.** Puisqu'il y a $\frac{dy}{r} = \frac{y\,ddx + 2dy\,dx}{a\,ds}$, supposant l'élément ds constant, nous aurons

$$\frac{y\,dy}{r} = \frac{yy\,ddx + 2y\,dy\,dx}{a\,ds} = d\,\frac{yy\,dx}{a\,ds}.$$

Donc si l'amplitude du tuyau est partout la même ou bien $zz = ff$, la valeur de la formule intégrale

$$\int \frac{y\,dy}{rzz} \quad \text{sera} = \frac{yy}{aff} \cdot \frac{dx}{ds},$$

supposé qu'en A il y ait $\frac{dx}{ds} = 0$, ou que le rayon OA y touche le tuyau. Or $\frac{y\,dx}{a\,ds}$ marque le sinus de l'angle AMO, que le tuyau fait avec le rayon OM en M. Donc si cet angle devient droit en E ou $OE = b$, on aura pour le tuyau tout entier $\int \frac{y\,dy}{rzz} = \frac{b}{ff}$, et partant le premier terme de l'expression trouvée pour le moment des forces d'eau sera

$$2f^4 v \int \frac{y\,dy}{rzz} = 2bffv.$$

17. **Coroll. 2.** Si le tuyau n'a pas partout la même amplitude, on cherchera la valeur $2f^4 v \int \frac{y\,dy}{zz}$ par parties, en la calculant pour chaque partie du tuyau, dont l'amplitude est la même. Ainsi si la partie ME est de la même largeur zz, la valeur de

$$\int \frac{y\,dy}{rzz} \text{ sera } = \frac{1}{zz}(OE \sin OEA - OM \sin OMA),$$

et partant on aura pour cette partie du tuyau

$$2f^4 v \int \frac{y\,dy}{rzz} = \frac{2f^4 v}{zz}(OE \sin OEA - OM \sin OMA).$$

18. **Coroll. 3.** Par là on voit que si une partie du tuyau est ou droite ou courbée selon un arc de cercle dont le centre est en O, la valeur de $\int \frac{y\,dy}{rzz}$ pour cette partie sera nulle, quelque variable qu'y soit l'amplitude de zz. Ainsi, au lieu que le tuyau soit terminé en EF, supposé que l'angle OEM soit droit, on y peut encore ajouter une partie, ou droite ou circulaire, dont le centre soit en O, sans que la valeur totale du terme $\int \frac{y\,dy}{rzz}$ en souffre quelque changement, et il n'importe même, quelque variable qu'en soit l'amplitude, de sorte qu'on pourra par ce moyen donner à volonté une grandeur quelconque à l'ouverture par où l'eau sort.

19. **Coroll. 4.** La seconde partie de l'expression que j'ai trouvée pour le moment des forces de l'eau, est

$$= -\frac{2ff\sqrt{uv}}{a}(yy - aa) = -\frac{2ff\sqrt{uv}}{a}(OE^2 - OA^2):$$

elle dépend donc uniquement des distances OA et OE auxquelles les deux bouts du tuyau se trouvent du centre O. Cette expression étant négative, elle diminue la valeur du moment.

20. **Coroll. 5.** La troisième partie $\frac{2u}{a^3}\int \frac{y^3\,zz\,dx\,dy}{ds}$ est encore affirmative et augmente le moment. Elle se réduit à cette forme:

$$\frac{2u}{aa}\int yy\,zz\,ds \cdot \frac{dy}{ds} \cdot \frac{y\,dx}{a\,ds} = \frac{2u}{aa}\int yy\,zz\,ds \sin AMO \cos AMO, \quad \text{ou bien à } \frac{u}{aa}\int yy\,zz\,ds \sin 2AMO.$$

D'où l'on voit que si l'angle AMO est ou nul ou droit, la valeur de cette partie s'évanouit également dans l'un et l'autre cas. Or elle sera la plus grande, quand l'angle AMO contiendra 45°, à moins que la variabilité de la distance y n'y cause quelque changement.

21. **Coroll. 6.** La quatrième partie

$$-\frac{du}{a\,dt\sqrt{u}}\int \frac{yy\,zz\,dy^2}{ds} = -\frac{du}{a\,dt\sqrt{u}}\int yy\,zz\,ds \cos^2 AMO$$

diminue le moment des forces de l'eau, tant que le mouvement de rotation du tuyau va en augmentant. Cette partie sera donc la plus grande, lorsque l'angle AMO sera évanouissant; et elle deviendra $= 0$ quand cet angle sera droit.

22. **Coroll. 7.** Donc si nous posons pour toute la longueur du tuyau

$$\int \frac{y dy}{rzz} = L; \quad \int yy\, zz\, ds \sin 2AMO = M; \quad \int yy\, zz\, ds \cos^2 AMO = H;$$

le moment total des forces de l'eau dans le sens AG sera:

$$= 2f^4 Lv - \frac{2ff\sqrt{uv}}{a}(OE^2 - OA^2) + \frac{Mu}{aa} - \frac{Hdu}{a\,dt\sqrt{u}}.$$

Problème 4.

23. La machine hydraulique de M. Segner étant proposée, déterminer l'effet qu'elle est capable de produire par le moyen d'une dépense d'eau donnée.

Solution. (Fig. 167). Soit $\alpha\alpha\,\delta\delta$ le grand tuyau cylindrique vertical, mobile autour de son axe OO: soit cet axe élargi en haut, pour mieux recevoir l'eau qui y coule constamment par le canal V: car supposons que ce vaisseau demeure toujours rempli d'eau jusqu'en $\gamma\gamma$, et soit la hauteur de l'eau au-dessus de l'endroit, où les tuyaux horizontaux y sont attachés, $\varepsilon\varepsilon = e$; soit, ensuite, le demi-diamètre de ce cylindre en bas comme ci-dessus $= a$: et AB une ouverture qui reçoit un tuyau horizontal dont l'amplitude en AB soit $= ff$, et soit n le nombre des tuyaux horizontaux dont le cylindre est garni en bas, et qui tous soient égaux et semblables entr'eux et également attachés. Que le mouvement de la machine se trouve déjà dans l'état d'uniformité, et soit la vitesse dont le point A tourne autour de l'axe $OO = \sqrt{u}$, ou bien la vitesse rotatoire de toute la machine $= \frac{\sqrt{u}}{a}$: soit, enfin, $\sqrt{v}$ la vitesse avec laquelle l'eau entre en AB dans le tuyaux horizontaux, et que la hauteur q exprime l'état de compression de l'eau dans l'embouchure AB.

Soit de plus $ABMNEF$ un des tuyaux horizontaux, que je supposerai d'une figure quelconque donnée: de sorte que, posant l'arc $AM = s$, la distance $OM = y$, le rayon de courbure en $M = r$ et l'amplitude $MN = zz$, la relation de ces quantités soit donnée; d'où l'on trouvera pour le tuyau tout entier $ABEF$ la valeur des formules intégrales suivantes:

$$\int \frac{y dy}{rzz} = L \quad \text{et} \quad \int yy\, zz\, ds \sin 2AMO = M,$$

et soit enfin l'amplitude de l'embouchure EF, par laquelle l'eau sort $= hh$ et la distance $OE = b$.

Cela posé, si l'eau dans le grand vaisseau $\alpha\alpha\gamma\gamma$ était en repos, on sait que la compression de l'eau en AB serait $= e - v$: or puisque l'eau dans ce vaisseau suivra bientôt le mouvement de rotation du vaisseau, la force centrifuge augmentera ses efforts d'échapper par les ouvertures AB, d'où la compression dans ces endroits deviendra plus grande. Et en examinant la chose, on trouvera que la compression de l'eau en AB sera exprimée par la hauteur $e + u - v$: de sorte que $q = e + u - v$. Ayant donc trouvé dans le Problème précédent la valeur de q par la considération du mouvement de l'eau dans les tuyaux horizontaux, en supposant tant $du = 0$ que $dv = 0$, à cause de l'uniformité du mouvement, nous aurons cette équation:

$$e + u - v = \left(\frac{f^4}{h^4} - 1\right)v - \left(\frac{bb}{aa} - 1\right)u,$$

ou bien $e = \frac{f^4}{h^4} v - \frac{bb}{aa} u$, d'où nous tirerons

$$f^4 v = eh^4 + \frac{bbh^4}{aa} u, \quad \text{ou} \quad v = \frac{eh^4}{f^4} + \frac{bbh^4 u}{aaf^4}.$$

Que cette machine ait maintenant à vaincre un certain obstacle, dont le moment pour arrêter le mouvement de la machine soit $= Ga$, ou que la machine doive monter un poids G qui lui est attaché par une corde qui s'enveloppe autour du cylindre $\alpha\alpha$, de sorte que la vitesse dont ce poids est monté, soit $= \sqrt{u}$. Or le mouvement des forces de l'eau pour accélérer le mouvement de la machine, étant dans un tuyau horizontal

$$= 2f^4 Lv - \frac{2ff\sqrt{uv}}{a}(bb - aa) + \frac{Mu}{aa},$$

puisque le nombre des tuyaux horizontaux est $= n$, le moment total qui en résulte sera

$$2nf^4 Lv - \frac{2nff\sqrt{uv}}{a}(bb - aa) + \frac{nMu}{aa}$$

qui doit être égal au moment de l'obstacle Ga, de sorte que:

$$Ga = 2nf^4 Lv - \frac{2nff\sqrt{uv}}{a}(bb - aa) + \frac{nMu}{aa}.$$

Ayant donc déjà trouvé $f^4 v = \frac{h^4}{aa}(aae + bbu)$, nous aurons:

$$Ga = 2nLh^4 e + \frac{2nLbbh^4 u}{aa} - \frac{2nhh(bb - aa)}{a}\sqrt{u(aae + bbu)} + \frac{nMu}{aa}.$$

Si nous posons à présent pour abréger:

$$\frac{2nLaah^4 e - Ga^3}{2nhh(bb - aa)} = A \quad \text{et} \quad \frac{2Lbbh^4 + M}{2hh(bb - aa)} = B,$$

nous trouverons:

$$u = \frac{\frac{1}{2}aae - AB \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^4 ee - ABa^2 e + AAbb\right)}}{BB - bb},$$

d'où l'on connaîtra la vitesse avec laquelle la machine tournera autour de son axe, et qui est aussi celle, avec laquelle le poids G sera élevé.

Or l'effet de la machine doit être estimé par le produit du fardeau G et de sa vitesse $\sqrt{u}$, ou par $G\sqrt{u}$; il est par conséquent déterminé. Or pour produire cet effet, il faut employer une certaine quantité d'eau, qui maintienne le vaisseau toujours plein. Cette quantité d'eau se connaît tant par l'ouverture ff des tuyaux horizontaux, que par la vitesse $\sqrt{v}$ avec laquelle l'eau passe par ces ouvertures; d'où la dépense d'eau sera exprimée par

$$nff\sqrt{v} = \frac{nhh}{a}\sqrt{(aae + bbu)}.$$

Supposons que l'eau entre continuellement dans le grand vaisseau, par une ouverture $= gg$, avec une vitesse $= \sqrt{k}$, et nous aurons:

$nff\sqrt{v} = gg\sqrt{k}$ ou $ff\sqrt{v} = \frac{1}{n}gg\sqrt{k}$ et $agg\sqrt{k} = nhh\sqrt{(aae + bbu)}$,

d'où nous tirons $aag^4k = nnaah^4e + nnbbh^4u$, ou bien

$$\frac{u}{aa} = \frac{g^4k - nnh^4e}{nnbbh^4}.$$

Par conséquent nous aurons:

$$Ga = \frac{2}{n}Lg^4k - \frac{2(bb-aa)}{nbhh}gg\sqrt{k}\,(g^4k - nnh^4e) + \frac{M(g^4k - nnh^4e)}{nbbh^4},$$

et l'effet de la machine sera:

$$G\sqrt{u} = \frac{2Lg^4k\sqrt{(g^4k - nnh^4e)}}{nnbhh} - \frac{2(bb-aa)gg(g^4k - nnh^4e)\sqrt{k}}{nnbbh^4} + \frac{M(g^4k - nnh^4e)\sqrt{(g^4k - nnh^4e)}}{nnb^3h^6}$$

qui dépend, à ce qu'on voit, de toutes ces quantités a, b, h, e, n, gg, $\sqrt{k}$ et des lettres L et M qui sont déterminées par la figure des tuyaux horizontaux.

24. **Coroll. 1.** Si nous posons la vitesse avec laquelle l'eau sort des tuyaux horizontaux en $EF = \sqrt{\varpi}$, qui marque la vitesse relative de l'eau à l'égard des tuyaux, et non pas la vitesse véritable, nous aurons $hh\sqrt{\varpi} = ff\sqrt{v} = \frac{1}{n}gg\sqrt{k}$, et partant cette vitesse $\sqrt{\varpi}$ sera $= \frac{gg\sqrt{k}}{nhh}$, lorsque la machine sera parvenue dans l'état d'uniformité, et alors il résultera pour la vitesse de rotation $\frac{u}{aa} = \frac{w-e}{bb}$. Donc la machine ne sera capable de produire quelqu'effet, qu'en tant que $\varpi > e$, ou que la vitesse $\sqrt{\varpi}$ sera plus grande que celle qu'un corps acquiert en tombant de la hauteur e.

25. **Coroll. 2.** Or si la direction dans laquelle l'eau sort des tuyaux horizontaux, est perpendiculaire au rayon OE, la véritable vitesse de l'eau qui en sort, sera

$$= \sqrt{\varpi} - \frac{b\sqrt{u}}{a} = \sqrt{\varpi} - \sqrt{(\varpi - e)}$$

qui est toujours plus petite que $\sqrt{e}$, ou la vitesse d'un corps qui est tombé de la hauteur e. Ainsi il ne faut pas être surpris, que la vitesse relative $\sqrt{\varpi}$ doive être plus grande que $\sqrt{e}$.

26. **Coroll. 3.** En introduisant cette vitesse relative $\sqrt{\varpi}$ avec laquelle l'eau sort des tuyaux horizontaux, dans les formules trouvées pour le poids G et l'effet de la machine $G\sqrt{u}$, nous aurons:

$$Ga = 2nLh^4\varpi - \frac{2n(bb-aa)hh}{b}\sqrt{\varpi}\,(\varpi - e) + \frac{nM(w-e)}{bb},$$

$$G\sqrt{u} = \frac{2nLh^4w}{b}\sqrt{(\varpi - e)} - \frac{2n(bb-aa)hh(w-e)\sqrt{w}}{bb} + \frac{nM(w-e)\sqrt{(w-e)}}{b^3}.$$

27. **Coroll. 4.** Si $\varpi = e$, la machine sera capable de soutenir le poids G sans se mouvoir, ou les forces de l'eau seront en équilibre avec le moment de ce poids $Ga = 2nLh^4\varpi = 2nLh^4e$. Dans ce cas, le mouvement de rotation u s'évanouit, et la dépense d'eau sera$=nhh\sqrt{e}$. Donc pour élever ce même poids, il faut que ϖ soit plus grand que e, et partant la dépense d'eau plus grande que dans le cas d'équilibre.

28. **Exemple 1.** (Fig. 168.) Soient les tuyaux horizontaux droits et partout de la largeur ff; qu'ils soient dirigés vers l'axe du mouvement O en AB où ils sont attachés au vaisseau; or qu'à l'autre extrémité ils aient un petit bout DEF joint à angles droits, par où sorte en EF, selon une direction perpendiculaire à OD. Soit, de plus, l'ouverture en $EF =$ rayon entier $OD = b$, le rayon de la base du vaisseau $OA = a$, et que l'eau y soit entre constamment à la hauteur $= e$. Cela posé, la valeur de $\int \frac{y\,dy}{rzz} = L$ et celle de $M = \int yyzz\,ds$ s'évanouira, puisque l'angle AMO est ou nul ou droit.

Donc posant la dépense d'eau $= nhh\sqrt{\varpi}$, ou que $\sqrt{\varpi}$ exprime la vitesse avec laquelle l'eau sort des tuyaux en EF, le nombre des tuyaux étant $= n$; le mouvement de rotation sera déterminé par cette égalité $\frac{u}{aa} = \frac{w-e}{bb}$. Ou si l'on imprime d'abord à la machine, par une force étrangère, ce mouvement de rotation, et qu'on verse constamment dans le vaisseau la quantité d'eau marquée pour l'entretenir plein, la machine sera en état de lever le poids G avec la masse $\sqrt{u} = \frac{a}{b}\sqrt{(\varpi - e)}$, de sorte que

$$Ga = \frac{2nbh^4 w}{ff} - \frac{2n(bb-aa)hh}{b}\sqrt{\varpi}(\varpi - e),$$

ou bien l'effet de la machine sera:

$$G\sqrt{u} = \frac{2nh^4 w}{ff}\sqrt{(\varpi - e)} - \frac{2n(bb-aa)hh(w-e)\sqrt{w}}{bb}.$$

Donc s'il ne s'agit que de soutenir un poids, on aura $\varpi = e$, et ce poids que la machine sera capable de soutenir, sera:

$$G = \frac{2nbh^4 e}{aff},$$

s'il est attaché à la distance a de l'axe.

Mais s'il faut élever un poids avec un certain degré de vitesse $\sqrt{u}$, cela demandera une plus grande dépense d'eau qui, à cause de $\varpi = e + \frac{bbu}{aa}$, sera $= nhh\sqrt{(e + \frac{bbu}{aa})}$, et le poids G que la machine sera capable d'élever, sera:

$$G = \frac{2nbh^4 w}{aff} - \frac{2n(bb-aa)hh}{ab}\sqrt{\varpi}(\varpi - e).$$

Or si la quantité d'eau qu'on verse dans le grand vaisseau pour le maintenir, est donnée $= ff\sqrt{k}$, de même que la vitesse $\sqrt{u}$, avec laquelle le poids doit monter, et qui est supposée celle du point A de la machine, nous aurons $nhh\sqrt{\varpi} = ff\sqrt{k}$ et $\varpi = e + \frac{bbu}{aa}$, d'où nous tirons $h^4 = \frac{aaf^4k}{nn(aae+bbu)}$; alors le poids que la machine est capable d'élever avec ce degré marqué de vitesse et avec la dépense d'eau $= ff\sqrt{k}$, sera:

$$G = \frac{2bffk}{na} - \frac{2(bb-aa)}{aa} ff\sqrt{ku}.$$

Ou bien, si l'on pose la dépense d'eau $= D$, sans qu'elle dépende de la largeur des tuyaux, de sorte que $\sqrt{k} = \frac{D}{ff}$, et $hh = \frac{aD}{n\sqrt{(aae+bbu)}}$; le poids, élevé par la machine sera:

$$G = \frac{2bDD}{naff} - \frac{2(bb-aa)}{aa} D\sqrt{u},$$

où je fais les remarques suivantes:

1) Puisque nff marque la somme des ouvertures, par lesquelles l'eau passe dans les tuyaux horizontaux, on voit que, plus on diminue ces ouvertures, plus le poids G deviendra grand. Mais on comprend aussi qu'on ne les saurait diminuer considérablement au-delà des ouvertures hh, par lesquelles l'eau sort: de peur que l'eau ne perde sa continuité dans les tuyaux. Donc si l'on met $ff = hh$, de sorte que $ff = \frac{aD}{n\sqrt{(aae+bbu)}}$, le poids, élevé par la machine, sera

$$G = \frac{2bD\sqrt{(aae+bbu)}}{aa} - \frac{2(bb-aa)D\sqrt{u}}{aa},$$

et partant ce poids G sera à la dépense d'eau dans un rapport donné:

$$\frac{G}{D} = \frac{2}{aa}(b\sqrt{(aae+bbu)} - (bb-aa)\sqrt{u}).$$

2) On voit aussi que plus la hauteur de l'eau e dans le grand vaisseau sera grande, plus aussi le poids G, que la machine sera capable d'élever à l'aide de la dépense D et avec la vitesse donnée $\sqrt{u}$, deviendra grand.

3) La valeur de G dépend aussi principalement du rapport de b à a, et il est clair que, plus ce rapport devient grand, plus aussi le deviendra le poids G; mais non pas dans la même raison, car posant $\frac{b}{a} = m$, on aura:

$$\frac{G}{D} = 2m\sqrt{(e+mmu)} - 2(mm-1)\sqrt{u};$$

et si les tuyaux horizontaux sont les plus courts possibles, ce qui arrive si $b = a$ ou $m = 1$, alors on aura:

$$\frac{G}{D} = 2\sqrt{(e+u)} \quad \text{ou} \quad G = 2D\sqrt{(e+u)}.$$

Mais si les tuyaux horizontaux étaient infiniment longs ou $b = \infty$, et partant aussi $m = \infty$, on trouverait:

$$\frac{G}{D} = \frac{e+2u}{\sqrt{u}}, \quad \text{ou} \quad G = \frac{D(e+2u)}{\sqrt{u}} = 2D\sqrt{(e+u+\frac{ee}{4u})}$$

et ce poids est le plus grand qu'on puisse élever à l'aide d'une telle machine avec la vitesse $= \sqrt{u}$, moyennant la dépense d'eau $= D$.

4) Or il faut aussi avoir égard à l'état de compression de l'eau dans les tuyaux, qui a été indiquée par la lettre p; car si la valeur de p devenait négative et plus grande que 32 pieds, ce qui est le poids de l'atmosphère, l'eau se séparerait des parois des tuyaux, et partant ne produirait plus l'effet qui vient d'être assigné. Or pour le cas du mouvement uniforme, que je considère ici dans un endroit du tuyau MN, où l'amplitude $= zz$ et la distance au centre $OM = y$, la compression de l'eau y est

$$p = \left(\frac{f^4}{h^4} - \frac{f^4}{z^4}\right) v - \left(\frac{bb}{aa} - \frac{yy}{aa}\right) u.$$

Donc pour notre cas, où $z = f = h$, la compression en M deviendra actuellement négati[ve]

$$p = -\frac{(bb - yy)}{aa} u;$$

et en A, où elle est la plus grande, il y aura

$$p = -\frac{(bb - aa)}{aa} u.$$

Par conséquent, on ne saurait prendre la quantité b si grande que

$$\frac{(bb - aa) u}{aa} \quad \text{ou} \quad (mm - 1) u$$

montât à 32 pieds: il faudrait même qu'elle fût toujours considérablement au-dessous de ce[...] Voilà donc un limite pour la valeur $\frac{b}{a} = m$, qu'il ne faut pas surpasser.

29. **Coroll. 1.** Soit la hauteur de l'eau dans le vaisseau $e = 3$ pieds; la vitesse du p[oids à] élever $\sqrt{u} = \sqrt{{}^1/_4} = {}^1/_2$, ou égale à celle, qu'un corps acquiert en tombant de la hauteur d'un [quart] de pied. Soit, de plus, le rayon $OA = a = {}^1/_2$ pied; la longueur des tuyaux horizontaux $AD = 2\,{}^1/_2$ [pieds] ou $b = 3$ pieds, et leur nombre $n = 4$. Pour la dépense d'eau, qu'elle soit égale à celle [qu'une] ouverture d'un pied carré fournit, par laquelle l'eau passe avec une vitesse due à la hau[teur] d' ${}^1/_4$ de pied: de sorte que $D = 1 . \sqrt{{}^1/_4} = {}^1/_2$. Cela posé, si les tuyaux horizontaux sont part[out de] la même amplitude ff, cette amplitude doit être $ff = \frac{{}^1/_2 . {}^1/_2}{4\sqrt{({}^1/_4 . 3 + 9 . {}^1/_4)}} = \frac{1}{16\sqrt{3}}$ pied carré, ou [bien] $ff = 3\sqrt{3}$ pouces carrés. La machine, étant construite suivant ces mesures, élèvera un [poids] $Q = 6\sqrt{12} - 17\,{}^1/_2 = 3{,}2846$ pieds cubiques d'eau, ou bien de 230 livres à peu près.

30. **Coroll. 2.** Dans ce cas, la compression de l'eau à l'embouchure des tuyaux horizo[ntaux] est $= -\,{}^{35}/_4$ pieds, et partant il n'y a point de danger que l'eau ne demeure continue dans [les] tuyaux. De là on voit qu'on pourrait, sans rien risquer de ce côté, poser $b = 5$ pieds, de so[rte] que $m = 10$, et conservant les autres mesures, $e = 3$, $u = {}^1/_4$, $a = {}^1/_2$, $n = 4$ et $D = {}^1/_2$, la pressio[n] en A sera $p = {}^{99}/_4$ pieds et $ff = \frac{1}{16\sqrt{28}}$ pied carré $= \frac{9}{\sqrt{28}} = 1\,{}^7/_{10}$ pouces carrés. Et cette [ma]chine élèvera, avec la vitesse marquée, un poids $Q = 10\sqrt{28} - 49\,{}^1/_2 = 3{,}414$ pieds cubiques d'[eau] ou bien $Q = 240$ livres environ.

Il s'en suit qu'on ne gagne pas considérablement en augmentant de deux pieds la lo[ngueur] des tuyaux horizontaux, puisque le poids Q n'en est devenu que de 10 livres plus grand. [Il n'est] donc pas avantageux de faire les tuyaux horizontaux trop longs, et il vaut mieux leur donne[r une] longueur médiocre.

31. **Coroll. 3.** Si l'on posait la dépense D plus grande ou plus petite, les autres qua[ntités] e, a, b, u et n demeurant les mêmes, on devrait augmenter ou diminuer dans la même [raison] l'amplitude des tuyaux horizontaux, à laquelle les ouvertures EF sont supposées égales. Et alo[rs le] poids Q, que la machine est capable d'élever avec la vitesse donnée $\sqrt{u}$, sera aussi augme[nté ou] diminué dans la même raison.

32. **Exemple 2.** Soient, comme auparavant, les tuyaux droits et dirigés vers l'axe O, leur nombre $= n$, le petit rayon $OA = a$, le grand $OD = b$, la hauteur de l'eau dans le vaisseau vertical $= e$. De plus, soit ff l'amplitude des tuyaux horizontaux, et hh leur ouverture en EF, ce tour DEF leur étant joint à angles droits, de sorte que la direction de l'eau qui en sort, soit perpendiculaire au rayon OE, et que la dépense d'eau, pour entretenir plein le vaisseau, soit $= D$; puis, que le poids Q que la machine élève n'y soit plus attaché à la base du vaisseau $\alpha\alpha$, mais qu'il y ait un autre tambour du diamètre $\zeta\zeta$, qui reçoit la corde par laquelle le poids est tiré; et que ce tambour tourne avec le vaisseau. Soit le rayon de ce tambour $\varepsilon\zeta = c$, et la vitesse de rotation au point $\zeta = \sqrt{i}$ qui est celle avec laquelle le poids Q doit être élevé. Maintenant, les dimensions e, a, b, n, c et i étant données, il faut déterminer les autres ff et hh, avec le poids Q que la machine sera capable d'élever avec la vitesse $\sqrt{i}$.

Pour cet effet soit $\sqrt{\varpi}$ la vitesse avec laquelle l'eau sort par les ouvertures $DE = hh$, et $\sqrt{v}$ celle avec laquelle l'eau passe par les tuyaux horizontaux: et l'on aura

$$nhh\sqrt{\varpi} = nff\sqrt{v} = D, \quad \text{ou} \quad \sqrt{\varpi} = \frac{D}{nhh}; \quad \sqrt{v} = \frac{D}{nff}.$$

De plus, soit la vitesse de rotation en $A = \sqrt{u}$, et nous aurons

$$\frac{\sqrt{u}}{a} = \frac{\sqrt{i}}{c} \quad \text{ou} \quad \sqrt{u} = \frac{a\sqrt{i}}{c}.$$

Donc cette équation $v = \frac{h^4}{f^4}\left(e + \frac{bbu}{aa}\right)$ se changera en celle-ci

$$DD = nnh^4\left(e + \frac{bbi}{cc}\right), \quad \text{ou} \quad D = nhh\sqrt{\left(e + \frac{bbi}{cc}\right)},$$

Et partant on aura

$$hh = \frac{cD}{n\sqrt{(cce + bbi)}}.$$

Ensuite le moment du poids G, pour arrêter le mouvement de la machine, étant $= Gc$, il faut le mettre à la place de Ga, dans la formule trouvée dans le problème, pour avoir:

$$Gc = \frac{2}{n}LDD - \frac{2(bb-aa)}{nbhh}D\sqrt{(DD - nnh^4e)} + \frac{M(DD - nnh^4e)}{nbbh^4};$$

qui, à cause de $nhh = \frac{cD}{\sqrt{(cce + bbi)}}$, se change en

$$Gc = \frac{2}{n}LDD - \frac{2(bb-aa)}{c}D\sqrt{i} + \frac{nMi}{cc}.$$

Or pour le cas présent on a $L = \frac{b}{ff}$ et $M = 0$, et partant

$$G = \frac{2bDD}{ncff} - \frac{2(bb-aa)D\sqrt{i}}{cc},$$

d'où l'on voit, que plus on donne de la largeur aux tuyaux horizontaux, plus le poids G deviendra petit; et nous avons déjà vu, qu'on ne saurait diminuer ff au de là de hh, de peur que l'eau ne perde sa continuité dans les tuyaux. Pour cet effet, considérons l'état de compression de près des embouchures de ces tuyaux en AB, où elle est trouvée répondre à la hauteur

$$p = \left(\frac{f^4}{h^4} - 1\right) v - \left(\frac{bb}{aa} - 1\right) u,$$

c'est à dire

$$p = e + \frac{bbi}{cc} - \frac{DD}{nnf^4} - \frac{(bb-aa)\,i}{c} = e + \frac{aai}{cc} - \frac{DD}{nnf^4}$$

dont la valeur négative, savoir $\frac{DD}{nnf^4} - e - \frac{aai}{cc}$, ne doit pas surpasser la hauteur de 30 pieds. Posons donc:

$$\frac{DD}{nnf^4} - e - \frac{aai}{cc} = d$$

où d marque une hauteur moindre que 30 pieds, et nous aurons:

$$ff = \frac{cD}{n\sqrt{(ccd + cce + aai)}} \quad \text{et partant}$$

$$G = \frac{2bD}{cc}\sqrt{(ccd + cce + aai)} - \frac{2\,(bb-aa)\,D\sqrt{i}}{cc}$$

ou bien

$$G = \frac{2D}{cc}\left(b\sqrt{(ccd + cce + aai)} - (bb - aa)\sqrt{i}\right).$$

33. **Coroll. 1.** De la dernière formule on voit, qu'on peut prendre pour b une telle valeur que le poids G devienne le plus grand. Il sera donc à propos de donner à b cette valeur la plus avantageuse qui se trouve $b = \frac{\sqrt{(ccd + cce + aai)}}{2\sqrt{i}}$, et alors le poids élevé par la machine sera

$$G = \frac{(ccd + cce + 5aai)\,D}{2cc\sqrt{i}} = \frac{D}{2\sqrt{i}}\left(d + e + \frac{5aai}{cc}\right).$$

34. **Coroll. 2.** Connaissant la valeur la plus avantageuse de b, pour que la machine produise le plus grand effet, il faut remarquer que plus on augmente b au-delà de cette valeur, plus le poids G en devient petit, et que ce poids paraît même s'évanouir, ce qui arrive en effet, si

$$b = \frac{\sqrt{(ccd + cce + aai)}}{2\sqrt{i}} + \frac{\sqrt{(ccd + cce + 5aai)}}{2\sqrt{i}}$$

et si l'on mettait la valeur de b plus grande, l'expression trouvée pour le poids G deviendrait même négative. Or, de l'autre côté, si l'on donne à b une valeur plus petite que la plus avantageuse, le poids G demeure néanmoins affirmatif, car faisant $b = a$, ce qui est la valeur la plus petite possible, le poids sera:

$$G = \frac{2Da}{cc}\sqrt{(ccd + cce + aai)}.$$

35. **Coroll. 3.** On voit aussi que, pourqu'on puisse, avec la même dépense d'eau D, élever le plus grand poids G avec la vitesse donnée $\sqrt{i}$, on n'a qu'à diminuer autant qu'il est possible le rayon c du tambour, autour duquel la corde qui tient le poids s'enveloppe: et par ce moyen il paraît, que le poids G pourrait devenir extrêmement grand.

36. **Remarque 1.** Il suivrait donc de là, qu'une force aussi petite qu'on voudra serait capable d'élever les plus grands fardeaux; ce qui est sans doute contraire aux premiers principes de la mécanique. Or, puisque ma solution est tirée de ces mêmes principes, il est impossible qu'elle puisse conduire à une contradiction si ouverte, qui surpasserait bien loin le mouvement perpétuel: car on n'aurait qu'à arranger la machine en sorte, qu'elle élevât continuellement autant d'eau que la dépense demande, et l'on aurait un vrai mouvement perpétuel. Mais je remarque ici, qu'il ne suffit pas de fournir dans le vaisseau en haut autant d'eau qu'il s'en échappe par en bas, pour produire l'effet déterminé par le calcul, mais il faut que l'eau, qui y est continuellement ajoutée, ait déjà le mouvement de rotation dont l'eau, contenue dans le vaisseau, est agitée; car, sans cela, une partie des forces, qui se trouvent dans la machine, devrait être employée à imprimer à l'eau nouvellement venue ce mouvement de rotation qui subsiste dans le vaisseau, et ainsi l'effet ne serait pas si grand qu'il vient d'être déterminé par le calcul. Et en effet, quand j'ai dit ci-dessus que le vaisseau demeure toujours plein, j'ai supposé que l'eau, qui entre continuellement dans le vaisseau, ait déjà reçu par quelque force étrangère que ce soit, le mouvement qui se trouve dans le vaisseau. Or, si nous réfléchissons sur cette circonstance, nous reconnaîtrons bientôt que la grandeur du poids qui vient d'être trouvée, ne renferme rien d'absurde. Car si l'on prend le rayon c du tambour très petit, ce qui est le cas où le poids G devient fort grand, la vitesse de rotation du vaisseau $\sqrt{u} = \frac{a}{c}\sqrt{i}$ en deviendra aussi fort grande, et partant, pour entretenir le vaisseau toujours plein, il faudra employer une grande force qui imprime à l'eau qu'on y verse le mouvement de rotation qui lui convient. Donc puisque la dépense d'eau même exige déjà une si grande force, il n'est pas surprenant, qu'elle soit capable de produire un si grand effet, et l'on voit aussi, que l'effet de la machine, qui a été assigné, ne devient aussi surprenant, que lorsque le mouvement de rotation de la machine est extrêmement rapide.

37. **Remarque 2.** Je dois encore remarquer, qu'ayant supposé ci-dessus que la compression de l'eau dans les tuyaux horizontaux, qui a été indiquée par la hauteur p, ne contribue rien au mouvement de la machine, cette supposition n'est vraie à la rigueur, que lorsque les tuyaux sont partout de la même largeur, quoique cette largeur soit infiniment petite; car pour s'assurer de cela, on n'a qu'à considérer l'état de repos de l'eau dans un vaisseau $ABCD$ (Fig. 169), dont les deux ouvertures GH et EF sont inégales. Soit $EFGH$ la masse d'eau renfermée dans ce vaisseau, et qui y soit comprimée par deux forces PM et QN qui agissent perpendiculairement sur les fonds EF et GH que je suppose exactement remplir la cavité du vaisseau, afin que l'eau n'en puisse échapper. Cela posé, on sait par les lois de l'hydrostatique, que pour que cette masse d'eau demeure en repos, il faut que les forces PM et QN soient entr'elles comme les fonds EF et GH sur lesquels elles agissent. Donc quoique la force PM soit plus grande que la force QN, la masse d'eau en est pourtant maintenue en équilibre: or cela se doit entendre, en tant que les forces n'agissent que sur l'eau; ce qui est le cas, quand le vaisseau $ABCD$ est immobile. Mais si ce vaisseau est mobile, quoique l'eau soit en équilibre, étant sollicitée par ces deux forces, le vaisseau même ne le sera point, mais il sera emporté avec l'eau par la plus grande force, tout de même que si le vaisseau

constituait avec l'eau un seul corps solide. Ainsi l'eau demeurera bien en équilibre dans le v
et les forces PM et QN ne la remueront pas de sa place dans le vaisseau, mais elles agiront s
corps tout entier du vaisseau comme sur un corps solide. La même chose doit donc arriver
nos tuyaux, lorsqu'ils ne sont pas partout de la même largeur. Car soit $EFGH$ un élément d
tel tuyau, dont l'amplitude en GH soit $= zz$ et en $EF = zz + 2zdz$, la longueur MN étant
Soit p l'état de compression tant en GH qu'en EF, de sorte que l'eau étant poussée par ce
forces soit en équilibre dans les tuyaux, ou, ce qui revient au même, que son mouvement
reçoive aucune altération. Cependant, puisque la force motrice qui agit sur la section GH est
et la force de l'autre côté qui agit sur la section EF est $= pzz + 2pz\,dz$, le tuyau même en
(Fig. 165) poussé selon la direction MN par la force $= 2pz\,dz$. Par conséquent, il y aura
outre la force que j'ai trouvée ci-dessus agir sur la machine, encore la force $= 2pzdz$ qui
le tuyau selon la direction mM. De là naît donc un moment pour tourner la machine dans l
$CXA = 2pz\,dz\cdot y\cdot\frac{y\,dx}{a\,ds}$, qu'il faut encore ajouter au moment élémentaire trouvé dans la so
du Probl. 3 pour avoir la force entière qui agit sur la machine. Mais je me contente d'avoi
diqué cette correction, dont a besoin la formule, trouvée pour le moment des forces de la mach
lorsque les tuyaux horizontaux ne sont pas partout de la même largeur. Car il vaudra tou
mieux donner à ces tuyaux partout la même largeur. (Fig. 168). Or quand ce n'est que le de
bout DEF qui va soit en s'élargissant soit en se rétrécissant, pour former l'ouverture EF
l'amplitude ayant été jusque là $= ff$; comme pour ce bout nous avons

$$y = b,\quad \frac{y\,dx}{a} = ds \quad \text{et} \quad p = \frac{f^4 v}{h^4} - \frac{f^4 v}{z^4},$$

l'intégrale de $\int 2pz\,dz\cdot\frac{yy\,dx}{a\,ds}$ sera $= -\frac{bffv}{h^4}(hh - ff)^2$.

Donc pour le second exemple on aura

$$G = \frac{2bDD}{ncff} - \frac{2(bb-aa)D\sqrt{i}}{cc} - \frac{bDD}{ncff}\left(1 - \frac{nff\sqrt{(cce+bbi)}}{cD}\right)^2$$

et si nous posons, comme ci-dessus $nff = \frac{cD}{\sqrt{(ccd+cce+aai)}}$, nous obtiendrons:

$$G = \frac{D}{cc}\left(b\sqrt{(ccd+cce+aai)} - 2(bb-aa)\sqrt{i} + 2b\sqrt{(cce+bbi)} - \frac{b(cce+bbi)}{\sqrt{(ccd+cce+aai)}}\right)$$

ou $$G = \frac{D}{cc}\left(\frac{b(ccd-[bb-aa]i)}{\sqrt{(ccd+cce+aai)}} - 2(bb-aa)\sqrt{i} + 2b\sqrt{(cce+bbi)}\right)$$

ce qui est la valeur véritable de G, d'où l'on ne peut plus si aisément trouver la plus avanta
longueur des tuyaux horizontaux. Cependant, on voit en général que le poids G doit être plus
à cause de l'inégalité entre ff et hh. Et partant il sera toujours plus convenable de faire l'ouver
ture $EF = hh$ égale à la largeur des tuyaux ff, ou bien $nff = nhh = \frac{cD}{\sqrt{(cce+bbi)}}$. Alors le poi
que la machine sera capable d'élever avec la vitesse donnée $= \sqrt{i}$ se trouvera:

$$G = \frac{2bD\sqrt{(cce+bbi)}}{cc} - \frac{2(bb-aa)D\sqrt{i}}{cc}$$

la compression de l'eau au commencement des tuyaux horizontaux AB sera exprimée par la hauteur

$$= -\left(\frac{bb}{aa}-1\right)\frac{aai}{cc} = -\frac{(bb-aa)i}{cc},$$

de sorte que $\frac{(bb-aa)i}{cc}$ ne doit pas surpasser la hauteur de 30 pieds. Donc si l'on met $\frac{(bb-aa)i}{cc}=d$, on aura $bb=aa+\frac{ccd}{i}$ et le poids élevé sera

$$G = \frac{2D\sqrt{(ccd+aai)(ccd+cce+aai)}}{cc\sqrt{i}} - \frac{2Dd}{\sqrt{i}}$$

qui devient encore d'autant plus grand, plus on diminue la grosseur du tambour ou son rayon $=c$. Et si c s'évanouissait, le poids G deviendrait même infini. Ce qui n'est plus surprenant, vu que la vitesse rotatoire $\frac{\sqrt{u}}{a}=\frac{\sqrt{i}}{c}$ devient aussi infinie, et que la dépense d'eau D, quelque petite qu'elle soit, renferme déjà une force infinie, puisqu'on suppose que l'eau, qu'on verse continuellement dans le vaisseau, a déjà un mouvement de rotation pareil à celui qui se trouve dans l'eau du vaisseau.

Problème 5.

38. Si l'eau qu'on verse continuellement dans le vaisseau pour l'entretenir plein, n'a pas encore le mouvement de rotation qui lui convient, mais qu'elle doive être mise dans ce mouvement par les forces de la machine, déterminer le déchet dont l'effet de la machine en sera diminué.

Solution. (Fig. 170) Désignant par D la dépense d'eau qu'il faut, pour entretenir le vaisseau toujours plein, de sorte que D soit le produit de l'ouverture par laquelle l'eau coule dans le vaisseau, et de la vitesse, la quantité d'eau fournie dans le vaisseau, pendant un temps $=t$, sera $=Dt$. Cette quantité d'eau étant entrée dans ce vaisseau que je suppose cylindrique, dont le rayon de la base $=a$, et partant la base même $=\pi aa$ (où π désigne la circonférence d'un cercle, dont le diamètre $=1$), elle y formera un cylindre de la hauteur $=\frac{Dt}{\pi aa}$. Qu'il faille imprimer à cette masse d'eau un mouvement de rotation égal à celui de la machine dans le temps $=t$, voyons alors quelle force est requise pour produire cet effet. Soit ABC la base de ce cylindre $OA=a$; et $\sqrt{u}$ la vitesse de rotation qui doit être imprimée à la périphérie ABC. Considérons en un élément $ZRSz$ dont le rayon $OZ=z$, $Zz=dz$ et l'anneau $ZzRS$ sera $=2\pi z dz$ qui, multiplié par la hauteur $\frac{Dt}{\pi aa}$, donne la masse de l'élément $=\frac{Dt}{aa}2zdz$, auquel il faut imprimer, dans le temps t, une vitesse autour de l'axe $O=\frac{z\sqrt{u}}{a}$. Or si nous avons une masse M, à laquelle une force motrice P imprime, dans le temps t, une vitesse $=\sqrt{v}$, les principes de mécanique donnent $dv=\frac{Pdt}{M}\sqrt{v}$ ou $\frac{Mdv}{\sqrt{v}}=Pdt$ dont l'intégrale est $2M\sqrt{v}=Pt$. Donc, pour produire cet effet, il faut la force $P=\frac{2M\sqrt{v}}{t}$, et partant, posant $\frac{2Dt}{aa}zdz$ pour M, et $\frac{z\sqrt{u}}{a}$ pour $\sqrt{v}$, la force requise pour l'élément $ZzRS$ sera $=\frac{4D\sqrt{u}}{a^3}\cdot zzdz$, et la direction de cette force étant perpendiculaire au rayon OA, son moment sera $=\frac{4D\sqrt{u}}{a^3}z^3dz$, et partant son intégrale $=\frac{D\sqrt{u}}{a^3}\cdot z^4$. Par conséquent, pour imprimer à toute la masse qu'on verse continuellement dans le vaisseau, le mouvement de rotation qui lui convient, il faut une force dont le moment est $DA\sqrt{u}$. C'est donc de ce moment qu'on doit diminuer le moment total des forces de la machine: Ou bien, si le poids élevé par la machine est nommé $=G$, sa vitesse $=\sqrt{i}$, rayon du tombour $=c$, de sorte que $\sqrt{u}=\frac{a\sqrt{i}}{c}$ et $Da\sqrt{u}=\frac{Daa\sqrt{i}}{c}$, on aura

$$Gc=\frac{2}{n}LDD-\frac{2(bb-aa)}{c}D\sqrt{i}+\frac{nMi}{cc}-\frac{Daa\sqrt{i}}{c}$$

ayant fait $ff=hh=\frac{cP}{n\sqrt{(cce+bbi)}}$, puisqu'il faut que l'ouverture et l'amplitude des tuyaux hori-taux soit partout la même. On aura donc

$$G=\frac{2LDD}{nc}+\frac{nMi}{c^3}-\frac{2bbD\sqrt{i}}{cc}+\frac{aaD\sqrt{i}}{cc}.$$

Mais il ne suffit pas que ce mouvement de rotation soit imprimé à la masse d'eau Dt au bout temps t; puisque avant ce terme, n'ayant pas encore ce mouvement de rotation, elle diminue déjà le mouvement de la machine, et cette diminution subsistera toujours, quand même on sup serait le temps t infiniment petit. Donc, afin que le mouvement de la machine ne soit pas trou de ce côté, il faut que le juste mouvement de rotation soit imprimé à l'eau qui succède dans temps plus court, et pour peu qu'on y réfléchisse, on verra que cela doit être la moitié; donc force qui est requise à cet effet, sera aussi deux fois plus grande, et son moment $=2Da$ et partant la vraie valeur du poids G que la machine est capable d'élever sera:

$$G=\frac{2LDD}{nc}+\frac{nMi}{c^3}-\frac{2bbD\sqrt{i}}{cc}.$$

39. **Coroll. 1.** Puisque nous supposons les tuyaux horizontaux partout de la même ampli ff, et leur ouverture hh aussi la même, $ff=hh=\frac{cD}{n\sqrt{(cce+bbi)}}$; nous aurons:

$$L=\frac{1}{ff}\int\frac{ydy}{r}=\frac{b}{ff}\ (16)\quad\text{ou}\quad L=\frac{n\sqrt{(cce+bbi)}\,b}{cD},$$

$$M=ff\int yy\,ds\sin 2AMO=\frac{Dc}{n\sqrt{(cce+bbi)}}\int yy\,ds\sin 2AMO,$$

et partant

$$G=\frac{2Db\sqrt{(cce+bbi)}}{cc}+\frac{Di}{cc\sqrt{(cce+bbi)}}\int yy\,ds\sin 2AMO-\frac{2bbD\sqrt{i}}{cc}.$$

40. **Coroll. 2.** Donc pour le cas où les tuyaux horizontaux sont supposés droits, à l'excep-tion de leur dernier bout, qui est courbé à angles droits, à cause de $\sin 2AMO=0$ partout, on

$$G=\frac{2Db}{cc}\left(\sqrt{(cce+bbi)}-b\sqrt{i}\right).$$

Et si l'on met ici c infiniment petit, on aura $G=\frac{De}{\sqrt{i}}$, ou l'effet de la machine sera $G\sqrt{i}=D$ qui ne renferme plus rien qui puisse choquer. Or plus la valeur de c est prise grande, deviendra petite la valeur de G qui s'évanouira même faisant $c=\infty$.

41. **Remarque.** Mais il faut considérer que, lorsque le mouvement de la machine est rapide, ce qui arrive, si l'on fait le tambour qui sert à élever le poids, fort mince, la ma

aussi un grand obstacle du côté de la résistance de l'air; de sorte que dans ce cas l'effet sera considérablement plus petit que le calcul ne le donne, même après en avoir retranché la perte déterminée dans ce problème. Je ne m'arrêterai point à calculer l'effet de la résistance de l'eau, puisque d'un côté, ce calcul n'a aucune difficulté, et de l'autre côté, un mouvement fort rapide de la machine est assujetti encore, par rapport au mouvement de l'eau même, à plusieurs empêchements, auxquels on n'a point fait attention dans le calcul, de sorte que dans ces cas, le calcul serait toujours peu d'accord avec l'expérience, quand même il n'y aurait point de résistance de l'air. Car quand l'eau entre du grand vaisseau dans les tuyaux horizontaux, il faut qu'elle change subitement tant de vitesse que de direction, et l'on comprendra aisément, que lorsque le mouvement de la machine est fort rapide, il se puisse glisser des irrégularités dans le mouvement de l'eau qui dérangent le calcul. Outre cela, on sait que l'eau, en passant par de longs tuyaux étroits, y rencontre un frottement considérable qui en diminue le mouvement; de sorte qu'on ne doit pas être surpris, lorsque l'expérience se trouvera fort peu d'accord avec le calcul, surtout quand le mouvement de rotation de la machine est fort rapide. Mais quand ce mouvement est assez lent, le calcul ne différera pas beaucoup de la vérité, et partant on ne saurait être assuré, que l'effet de la machine soit actuellement le même qu'on aura trouvé par le calcul; à moins que le mouvement de rotation ne soit assez lent. Pour cet effet, la vitesse du poids élevé $\sqrt{i}$ étant donnée, il ne convient pas de prendre la valeur de c trop petite; du moins faut-il faire en sorte, que la hauteur $\frac{(bb-aa)i}{cc}$ ne surpasse pas 30 pieds. Ensuite, la valeur de b ne doit pas être prise trop grande, puisqu'alors le mouvement de l'eau serait trop retardé par le frottement dans de si longs tuyaux. Ces circonstances ne nous convainquent que trop, que la théorie du mouvement des eaux n'est pas encore portée à ce degré de perfection dont on puisse être content, et qu'il faut même encore faire de très grands progrès, avant qu'on arrive à ce point.

Problème 6.

42. Trouver la figure la plus avantageuse qu'on puisse donner aux tuyaux horizontaux, pour que l'effet de la machine en devienne le plus grand.

Solution. Ayant supposé jusqu'ici les tuyaux horizontaux droits, nous avons vu que la valeur intégrale indiquée par M ou $\int yy\,ds \sin 2AMO$ s'évanouit, puisque, dans ce cas, $\sin 2AMO = 0$. Et il est clair que, lorsqu'on donne quelque courbure aux tuyaux horizontaux, cette formule en obtiendra une valeur quelconque dont le moment des forces de la machine sera augmenté, d'où l'on peut conclure qu'il est possible de donner aux tuyaux horizontaux une telle courbure, que le moment des forces de la machine, et partant aussi son effet devienne le plus grand. Soit (Fig. 171) AMD cette courbure, et quel que soit l'angle ADO qu'elle fait avec le rayon OD, on y peut ajouter un bout DE perpendiculaire à OD, sans que la valeur de l'intégrale M soit changée; or je suppose, que ce tuyau ait partout la même amplitude. Posons donc comme ci-dessus $OA = a$, $OX = x$, $OM = y$ et l'arc $AM = s$, de sorte que $ds = \sqrt{(dy^2 + \frac{yydx^2}{aa})}$. Maintenant le sinus de l'angle AMO sera $\frac{ydx}{ads}$, et son cosinus $\frac{dy}{ds}$, donc $\sin 2AMO = \frac{2y\,dx\,dy}{a\,ds^2}$, et partant $\int yy\,ds \sin 2AMO = 2\int \frac{y^3\,dx\,dy}{a\,ds}$ dont la valeur doit être un maximum.

Pour cet effet, suivant ma méthode je pose $dx = pdy$, et puisque $ds = dy\sqrt{(1 + pp...}$ formule intégrale qui doit devenir un maximum sera $\int \frac{y^3 p\,dy}{\sqrt{(aa+ppyy)}}$. Or la différentielle de $\frac{...}{\sqrt{(aa...}}$ étant

$$\frac{3aapyydy + 2p^3y^4dy}{(aa+ppyy)^{\frac{3}{2}}} + \frac{aay^3dp}{(aa+ppyy)^{\frac{3}{2}}};$$

il faut que la différentielle de $\frac{aay^3}{(aa+ppyy)^{\frac{3}{2}}}$ divisé par dy soit $=0$, d'où l'on tire

$$\frac{y^3}{(aa+ppyy)^{\frac{3}{2}}} = \text{Const.}$$

et partant on aura

$$y = \alpha\sqrt{(aa+ppyy)} \quad \text{ou} \quad yy = \alpha\alpha aa + \alpha\alpha ppyy \quad \text{et} \quad p = \frac{\sqrt{(yy-\alpha\alpha aa)}}{\alpha y} = \frac{dx}{dy}.$$

Donc
$$dx = \frac{dy\sqrt{(yy-\alpha\alpha aa)}}{\alpha y} \quad \text{et} \quad ds = \frac{ydy}{\alpha a}.$$

Or le tuyau DMA doit être perpendiculaire au vaisseau en A, ou posant $y=a$, il faut qu'il soit $\frac{dx}{dy} = 0$, d'où l'on voit que $\alpha = 1$, et partant l'équation pour la courbe cherchée sera

$$dx = \frac{dy}{y}\sqrt{(yy-aa)} \quad \text{et} \quad ds = \frac{ydy}{a}.$$

Pour la rectification de la courbe on aura donc d'abord $s = \frac{yy-aa}{2a}$.

Qu'on tire à la courbe en M la perpendiculaire MT, sur laquelle on abaisse de O la perpendiculaire OT, et l'on aura $ds:dy = OM:OT = y:a$; donc puisque $OM = y$, il y aura $OT = a$, et partant MT une tangente du cercle ACT qui reçoit tous les tuyaux horizontaux. D'où il est clair que la courbe AMD se décrit par l'évolution du cercle AXT. Ayant donc trouvé cette courbe, nous aurons:

$$\int yy\,ds \sin 2AMO = \int 2ydy\sqrt{(yy-aa)} = \tfrac{2}{3}(yy-aa)\sqrt{(yy-aa)},$$

ce qui est la valeur la plus grande qui soit possible.

Et partant, en donnant aux tuyaux horizontaux cette courbure qui est la plus avantageuse, le poids G que la machine sera capable d'élever avec la vitesse $\sqrt{i}$ et la dépense d'eau $= D$, se trouve en posant $OD = b$ par le § 39

$$G = \frac{2Db\sqrt{(cce+bbi)}}{cc} + \frac{2Di(bb-aa)\sqrt{(bb-aa)}}{3cc\sqrt{(cce+bbi)}} - \frac{2bbD\sqrt{i}}{cc}.$$

43. **Coroll.** De là il est clair que l'effet de la machine peut être très considérablement augmenté par la courbure des tuyaux horizontaux, et que cette augmentation irait à l'infini, si l'on mettait le rayon du tambour c infiniment petit. Cela doit s'entendre, sans qu'on ait réflexion sur la résistance de l'air et le frottement de la machine.

44. **Exemple.** Posons $a=1$ pied; $b=6$ pieds, $e=6$ pieds, $c=\frac{1}{2}$ pied et $i=\frac{1}{6}$ pied, afin que $\frac{(bb-aa)i}{cc}=23\frac{1}{3}$ ne surpasse pas 30 pieds. De plus, soit le nombre des tuyaux horizontaux $=6$ et leur amplitude $ff=hh=\frac{1}{144}$ pied carré, ou un pouce carré. De là nous trouverons la dépense d'eau requise pour entretenir le vaisseau plein d'eau

$$D=\frac{nff\sqrt{(cce+bbi)}}{c}=\frac{\sqrt{30}}{48} \quad \text{et} \quad \sqrt{u}=2\sqrt{\tfrac{1}{6}}=\sqrt{\tfrac{2}{3}} \quad \text{ou} \quad u=\tfrac{2}{3} \text{ pied.}$$

Alors le poids que la machine sera capable d'élever avec la vitesse $\sqrt{i}=\sqrt{\frac{1}{6}}$ se trouve:

$$G=\frac{\sqrt{30}}{48}\left(24\sqrt{30}+\frac{140}{9}\cdot\sqrt{\frac{14}{3}}-48\sqrt{6}\right),$$

ou bien $G=5{,}419$ pieds cubiques d'eau.

Une telle quantité d'eau serait donc élevée à la hauteur $e=6$ pieds, dans le temps $\frac{e}{\sqrt{i}}=6\sqrt{6}$. Or dans ce même temps, la dépense d'eau comporte $\frac{De}{\sqrt{i}}=\frac{1}{8}\sqrt{180}$ pieds cubiques d'eau, c'est-à-dire 1,677 pieds cubiques d'eau, donc elle élèverait trois fois plus d'eau qu'il ne faut pour la maintenir dans son mouvement: ce qui est le plus grand paradoxe, dont il s'agirait de trouver la solution.