XI.

Astronomia mechanica.

Caput I.

De viribus, quibus corpora coelestia sollicitantur.

1. **Definitio 1.** *Astronomia mechanica* est scientia motus corporum coelestium ex viribus, quibus sollicitantur, determinandi.

2. **Coroll. 1.** Cognitis viribus, quibus corpora coelestia sollicitantur, eorum motus per principia mechanica determinatur, ex quo haec scientia nomen Astronomiae mechanicae est adepta.

3. **Coroll. 2.** Ante omnia ergo vires nosse oportet, quibus corpora coelestia sollicitantur, quarum cognitio cum ex suis causis cognosci nequeat, earum indolem ex ipsis phaenomenis scrutari convenit.

4. **Coroll. 3.** Si enim corpora coelestia a nullis viribus sollicitarentur, singula vel quiescerent, vel uniformiter in directum progrederentur, secundum prima Mechanicae principia.

5. **Scholion 1.** Quatenus scilicet corpora coelestia non uniformiter in directum incedunt, sed vel celeritate variata, vel secundum lineas curvas progrediuntur, eatenus vires adsint necesse est, quibus eorum motus afficiatur. Atque hoc non solum de motu absoluto valet, sed etiam de respectivo, cum semper vires concipi possint, quibus motus cujusquam corporis, qualis ex alio apparet, producatur. In Astronomia autem non tam motus corporum coelestium absolutos spectamus, quam eos, quibus spectatori in quopiam loco constituto moveri videntur, etiamsi forte hic ipse locus quomodocunque circumferatur. Hic ergo locus spectari solet tanquam absolute quiescens, ejusque respectu corporum coelestium motus ita considerari debent, ut vires, quae talem motum producere valeant, definiantur. Ita vires assignari possent, quae planetis eos motus irregulares inducerent, quibus ex terra visi incedere observantur, verum hoc modo illae vires nimis prodirent complicatae, quam ut earum existentiam in mundo agnoscere liceret. Quam ob causam talem investigationem respectu plurium locorum, in quibus spectator concipiatur, suscipi conveniet, et pro quo in viribus inventis maxima simplicitas inesse deprehenditur, eas demum tanquam in mundo revera existentes

admittere fas erit. Dummodo enim vires invenerimus, quae pro dato spectatoris loco coelestibus producendis fuerint pares, eas tanquam revera existentes considerare possumus, forte ob motum spectatoris longe aliae vires in mundo existerent, quandoquidem hic nobis est propositum motus apparentes explicare.

6. **Scholion 2.** Ad hanc ergo virium investigationem instituendam nosse oportet motus porum coelestium, qui quo accuratius fuerint perspecti, eo certius illarum virium indolem cog licebit. Quare si quilibet motus peculiarem virium legem postularet, ita ut inde pro reliquis concludere liceret, hinc etiam ipsa motuum cognitio nihil lucri adipisceretur; sin autem eve vires pro omnibus motibus inventae ad communem quandam regulam referantur, hinc sine plurimum lucis consequemur; cum inde etiam eorum motuum, quorum ratio per observationes satis fuerit explorata, explicatio peti queat. Hocque ergo casu ex Astronomia mechanica incrementa in Astronomiam practicam transferrentur. Atque istud institutum summus quondam Isaacus Newtonus felicissimo successu absolverit, dum ex collatione phaenomenorum cum mechanicis elegantissimam aeque ac simplicissimam legem detexit, quae omnes vires coelestes teretur. Haec itaque virium lex fundamentum universae Astronomiae mechanicae constituet omnium motuum coelestium ratio est repetenda, quod felicissimum inventum, cum phaenomenis tissimum innitatur, instar hypothesis hic proponam et ad usum accomodabo.

7. **Hypothesis 1.** *Corpora coelestia perinde inter se commoventur, ac si singula attraherent, viribus reciproce quadratorum distantiis proportionalibus.*

8. **Explicatio.** De tellure res est manifesta, cum omnia corpora circa terram existentia sum urgeantur vi, quae gravitas appellatur, et sine dubio ad multo majores distantias quam experimenta capere licet. Luna enim ab eadem vi sollicitari deprehenditur, quae autem minor est quam prope terrae superficiem, hocque fere in ratione reciproca duplicata dist Scilicet cum luna circiter sexagies magis sit remota a centro terrae quam corpora in ejus sita, vis, qua luna terram versus urgetur, sexagies minor est aestimanda quam vis gravitatis superficie, quemadmodum ex motu lunae concludere licet. Gravitas quidem in superficie terrae effectus mixtus ex vero corporum nisu deorsum directo et vi centrifuga e motu terrae diurno unde potissimum evenit, ut gravitas neque ubique praecise ad centrum terrae dirigatur, neque dem sit magnitudinis. Seposita autem vi centrifuga, quippe cujus corpora longius a terra sunt expertia, nisus ad ejus centrum directus satis exacte distantiarum ab eo quadratis proportionalis deprehenditur. Concesso igitur hoc, quod omnia corpora, quantumvis a terra remota, ad ejus centrum quasi trahantur hujusmodi vi, similes vires Newtonus singulis mundanis tribuit, ita ut eorum quodque reliqua corpora ad se attrahat viribus in ratione distantiarum decrescentibus. Atque in hac lege contineri sunt censendae omnes vires, quibus porum coelestium motus reguntur.

9. **Coroll. 1.** Cum istae vires attractrices corporum mundanorum in ratione duplicata tiarum decrescant, in maximis distantiis tam parvae evadunt, ut pro evanescentibus haberi

10. **Coroll. 2.** Hinc cum stellae fixae ad tam enormes distantias a nobis et toto solari sint remotae, vires, quibus sol et planetae ad stellas fixas attrahuntur, pro nihilo sunt

11. **Coroll. 3.** Planetarum igitur et cometarum motus a nullis aliis viribus perturbari sunt nisi quibus vel ad solem vel ad reliquos planetas gravitatione mutua sollicitantur.

12. **Scholion 1.** Haec virium mundanarum lex per phaenomena stabilita etsi in magnis intervallis veritati apprime consentanea deprehenditur, tamen in minoribus distantiis, praecipue ubi corpus attractum intra superficiem corporis attrahentis est situm, a veritate vehementer recedit. Evanescente enim distantia corporis attracti a centro corporis attrahentis, secundum hanc legem vis attrahentis infinita prodiret, id quod sine dubio rerum naturae adversaretur. Quin potius statuere deberemus, si in terrae visceribus experimenta capere liceret, quo propius ad ejus centrum pertingeremus, eo minorem esse futuram vim gravitatis, cum in ipso centro plane in nihilum abire necesse sit ob defectum rationis, cur potius in hanc quam aliam plagam dirigeretur. Ex quo etiam Newtonus statuit, a terrae superficie intus ad ejus centrum penetrando, vim gravitatis iterum decrescere atque ipsis a centro distantiis esse proportionalem, quem saltum ex principiis gravitationis universalis egregie explicavit, ita ut lex illa ad corpora extra se posita nullum detrimentum patiatur. Cum igitur in Astronomia corpora tantum longis intervallis a se invicem dissita considerentur, sine ulla haesitatione phaenomena sequentes agnoscere debemus vires, quibus ea se mutuo attrahunt, rationem reciprocam duplicatam distantiarum sequi, atque esse directas ad cujusque corporis attrahentis centrum, siquidem figuram habeant sphaericam, vel potius centrum inertiae, si ab hac figura abludant, quod quidem exiguum discrimen in tantis distantiis pro nihilo est habendum. Quamvis enim in superficie terrae gravitas non ubique ad ejus centrum dirigatur, tamen in grandibus ab ea distantiis, etiamsi gravitatis directio aliquantillum centrum praetergrediatur, haec tantilla aberratio in motuum determinatione nullius plane est momenti.

13. **Scholion 2.** Quando autem statuimus singula corpora coelestia perinde ac terram ejusmodi proprietate esse praedita, qua corpora extra se posita attrahant vi quadrato distantiae reciproce proportionali, haec virium ratio de eadem vel aequalibus massis corporis attracti est interpretanda. Posita scilicet massa corporis attracti $= M$, ejusque distantia a centro corporis attrahentis $= x$; si vi qua eo impellitur fuerit V, eadem massa M in alia distantia $= y$ a centro ejusdem corporis attrahentis remota eo impelletur vi U, ut sit

$$V : U = \frac{1}{xx} : \frac{1}{yy} \quad \text{seu} \quad U = \frac{xx}{yy} V.$$

Unde si pro una quadam distantia innotescat vis attractrix, pro alia quacunque distantia facile definietur, siquidem ambo corpora tam attrahens quam attractum maneant eadem. Sin autem massa corporis attracti fuerit major vel minor, vis attractrix praeterea in eadem ratione erit augenda vel minuenda, ut mox declarabimus. Tum vero etiam vis attrahens diversorum corporum coelestium plurimum discrepat, ita ut etiam in pari distantia diversas vires exerant. Scilicet cum vis attrahens terrae in superficie, seu distantia ab ejus centro, radio ejus aequali, sit ipsa gravitas, pro aliis corporibus coelestibus distantia, ad quam vis eorum attractrix gravitati est aequalis, modo major modo minor esse potest, quam radius terrae; unde dicimus alia corpora coelestia majori, alia minori facultate attrahendi pollere, etiamsi pro unoquoque vis attrahens sequatur rationem reciprocam duplicatam distantiarum.

*

14. **Hypothesis 2.** *Vires, quibus diversa corpora ab eodem corpore coelesti in ead stantia attrahuntur, sunt ut eorum massae, ac si distantiae fuerint diversae, rationem seq compositam ex ratione massarum et reciproce duplicata distantiarum.*

15. **Coroll. 1.** Vis ergo attractrix corporum coelestium perinde ac gravitas terrestris sec quantitatem materiae in corpora agit, ita ut nisus cujusque corporis sit ejus massae propor siquidem distantia fuerit eadem.

16. **Coroll. 2.** Hae igitur vires coelestes corpora quasi penetrant, in eaque, quatenus sunt praedita, agunt, ita ut quo major fuerit massa cujuspiam corporis, ideo fortius a qu corpore coelesti attrahatur.

17. **Coroll. 3.** Hinc vis, qua corpus quodvis ad aliquod corpus coeleste attrahitur aggregatum omnium virium elementarium, quibus singula corporis elementa pro ratione massae inertiae sollicitantur.

18. **Scholion.** De corporibus circa terram sitis per experimenta est evictum eorum gr tatem seu pondus ipsorum massae esse proportionale, cum singulae particulae seorsim gravit ratione massae. Quare cum vis attractrix corporum coelestium pari ratione sit comparata atque gravitatis telluris, nullum etiam est dubium, quin eorum vires parem sequantur legem atque corp attracta pro ratione materiae seu massae afficiunt. Unde si singulae corporis particulae a corp coelesti aeque distent, quod evenire censendum est, si magnitudo corporis attracti prae ejus dist a centro corporis attrahentis tam sit exigua ut pro nihilo reputari queat, singulae vires elem erunt aequales sub directionibus inter se parallelis: hincque vis tota earum summae aequalis, ejus directio per centrum inertiae corporis attracti transire est censenda. Sin autem corporis attr magnitudo ad distantiam a centro corporis attrahentis notabilem teneat rationem, ut vires elem tares, quibus singula corporis elementa attrahuntur, neque pro aequalibus, ob inaequales elementor distantias, neque directiones pro parallelis inter se haberi queant, vis tota inde demum per calcul est colligenda; hincque evenire potest, ut vis tota neque massae corporis attracti sit proportion neque per ejus centrum inertiae transeat. Ex quo proprie loquendo ambae allatae hypotheses tant ad corpuscula quasi infinite parva, quae ad corpora coelestia attrahantur, sunt restringendae, vires tantum elementares praefatas leges sequantur. Unde deinceps vires totae, quibus corpor jora attrahuntur, per regulas staticas demum colligi debeant.

19. **Hypothesis 3.** *Corpora coelestia in aequalibus distantiis eo majores exerunt vires att trices, quo majores fuerint ipsorum massae, atque in inaequalibus distantiis vires attractrices corp coelestium sunt in ratione composita massarum et reciproca duplicata distantiarum.*

20. **Coroll. 1.** Hinc si massa corporis coelestis fuerit $=A$, in distantia x ab ejus cent erit vis attractrix ut $\frac{A}{xx}$, quae propterea est directe ut massa corporis attrahentis A, et recipro quadratum distantiae ab ejus centro.

21. **Coroll. 2.** Haec autem lex tantum valet, si corporis attracti massa fuerit eadem; quin enim cum illa ratione composita insuper ratio massae corporis attracti conjungi debet, secun dum hypothesin praecedentem.

22. **Coroll. 3.** Ita si massa corporis coelestis sit $=A$, corporis autem attracti massa $=M$, ejusque ab illius centro distantia $=x$, erit vis, qua hoc ad illud attrahitur ut $\frac{AM}{xx}$. Quia autem in motus determinatione vis haec semper per massam corporis attracti M dividi debet, in calculum tantum ingreditur formula $\frac{A}{xx}$, massa M inde iterum egrediente.

23. **Scholion 1.** Ista hypothesis non aeque certo ex phaenomenis colligitur ac praecedentes, nisi enim inde veram virium quantitatem concludere licet, tamen nulla constat ratio massas corporum coelestium dignoscendi. Eorum quidem magnitudinem Astronomi sollicite definire conantur, verum hinc ideo massa, quoniam pro volumine vehementer discrepare potest, nihil statuere licet. Haec massae autem ratione omnino carere possemus, si pro quovis corpore coelesti eam distantiam determinaremus, in qua vis ejus attractrix aequalis esset futura vi gravitatis in superficie terrae. Ita si pro quopiam corpore coelesti haec distantia fuerit $=f$, pro alia quacunque distantia x ejus vis attractrix erit $=\frac{ff}{xx}$ unitate gravitatem exprimente: Sicque sufficit pro quolibet corpore coelesti distantiam hanc f ipsi convenientem nosse, parumque interest quomodo haec distantia ad massam corporis attrahentis se sit habitura. Newtonus autem statuit quadratum istius distantiae semper ipsi massae corporis attrahentis proportionale; ita ut loco ff massa A substitui queat, — quae propositio, si de ejus veritate convicti essemus, non solum pro pulcherrima esset habenda, sed etiam plurimum lucis ad naturae mysteria scrutanda esset allatura. Phaenomena autem huic propositioni jam insignem probabilitatis gradum conciliant, quoniam quo corpora coelestia fuerint majora vel minora, etiam quadratum distantiae f illis respondentis majus minusve deprehenditur: ratione autem ea propositio multo magis confirmari potest. Primum enim cum gravitatio in corporibus coelestibus sit reciproca, ex principio aequalitatis inter actionem et reactionem duo corpora se mutuo attrahentia paribus viribus in se invicem niti debent. Hinc si eorum massae sint A et B, et distantiae, ad quas eorum vires attractrices gravitati aequantur, sint a et b, distantia inter centra corporum existente $=x$, erit per praecedentem hypothesin vis, qua corpus B ad A urgetur $=\frac{aaB}{xx}$, vis autem, qua corpus A vicissim ad B urgetur $=\frac{bbA}{xx}$, quae duae vires si censeantur aequales, fit $aa:bb=A:B$, prorsus ut vult Newtonus. Quodsi haec propositio admittatur, inde etiam haec eximia proprietas consequitur, quod plurium corporum se mutuo hac lege attrahentium commune centrum inertiae perpetuo vel quiescat, vel uniformiter in directum proferatur; — quae cum tanquam constans naturae lex assumenda videatur, inde vicissim veritas nostrae hypotheseos evincitur.

24. **Scholion 2.** Quoniam igitur vis attractrix massae corporis attrahentis est proportionalis, ea ita inde oriri est judicanda, ut singula corporis elementa seorsim vires attractrices exerant, ex quarum collectione demum vis tota attrahens nascatur. Lex ergo praescripta tantum ad vires elementares, quibus singula corporis elementa ad se attrahuntur, proprie pertineri est censenda, neque tribui ad corpora finita extendi patitur, nisi haec corpora tantopere a se invicem fuerint remota, ut eorum magnitudo prae distantia quasi evanescat. Eatenus ergo tantum haec lex attrahendi in corporibus mundanis deprehenditur, quatenus ea tam vastis intervallis a se invicem sunt sejuncta, quae si sibi multo essent propiora, nullum est dubium quin vires eorum attractrices ab hac lege sint

aberraturae, nisi forte eorum figura perfecte fuerit sphaerica. Quare si hoc modo praec… hypothesin restringamus, uti ratio suadet, universum Astronomiae mechanicae fundamentum … hypothesi continebitur.

25. **Hypothesis 4.** *Omnia materiae elementa, ex quibus corpora mundana sunt conf… pollent attrahendi, quae cujusque massae directe, inverso autem quadrato distantiae est propor… cum qua ratione insuper massa corpusculi attracti est conjungenda.*

26. **Coroll. 1.** Positis ergo massis duorum elementorum materiae μ et ν, eorumque di… $= z$, erit vis, qua alterum ab altero attrahitur ut $\frac{\mu\nu}{zz}$, atque ex viribus elementaribus, quibus … duorum corporum finitorum se mutuo attrahunt, vires ambo corpora tota sollicitantes, deben…

27. **Coroll. 2.** Cum haec vis elementaris sit ut $\frac{\mu\nu}{zz}$, factor quidam constans C adjung… ut formula $\frac{C\mu\nu}{zz}$ ipsam vim exprimat; atque haec quantitas C perpetuo erit eadem ubicunque … ista duo elementa materiae fuerint posita.

28. **Coroll. 3.** Corpora ergo coelestia eatenus tantum se mutuo attrahunt, quatenus con… materia, cujus omnia elementa tali vi se attrahendi sunt praedita. Ex quo patet si corpora … fuerint admodum a se invicem remota, simulque figuram habeant irregularem, fieri posse, ut vis … e viribus elementaribus resultans multum a simplicitate formulae exhibitae discrepet.

29. **Scholion 1.** Cum hujusmodi vis attrahendi omnibus corporibus coelestibus conven… ideoque omnibus elementis corporum, ubicunque reperiantur, tribui debeat, ea tanquam pro… universalis materiae spectari potest, cujus existentiam realem ex phaenomenis cum ratione con… evictam agnoscere debemus. Certum itaque est omnia materiae elementa tali vi attrahendi, qua… descripsimus, esse praedita, neque de hoc ullo modo dubitare licet. Utrum autem haec vis … materiae ex sua natura competat perinde atque inertia et impenetrabilitas? an vero a causa qua… externa producatur? multum inter Philosophos dubitatur. Qui priorem sententiam propugnant … mium firmamentum inveniunt in universalitate istius indolis attractricis, quae cum in omnibus cor… poribus inesse, atque adeo eorum massae proportionalis deprehendatur, eam pariter atque iner… materiae essentialem esse autumant, ita ut ejus causa extrinsecus frustra quaeratur; quin etiam … rere solent, an non Creator per omnipotentiam corporibus talem proprietatem infundere potue… quod negare ipsis adeo impium videtur. Deinde in hoc non parum subsidii sibi situm esse arbitran… tur, quod nemo adhuc istius phaenomeni latissime patentis causam externam dilucide docere vol… Qui autem contrariae sententiae sunt addicti, haec argumenta gravibus rationibus infirmare con… maluntque credere dari hujus phaenomeni causam externam, etiamsi eam nobis nullo modo persp… liceat, quam concedere ejus rationem in ipsa materiae indole esse positam. Ad nostrum … institutum parum refert, utrum causa externa existat, nec ne? sufficit enim nosse in omnibus cor… poribus mundi talem vim attrahendi revera inesse, cum nobis id tantum sit propositum, ut quo… motus corporum coelestium ab his viribus afficiantur, investigemus.

30. **Scholion 2.** Prior sententia, qua materiae vis attractrix, tanquam proprietas essen… tribuitur, si esset vera, hoc commodi afferret, ut ulteriori investigatione causae liberaremur…

[illegible] naturae scrutatoribus hoc onus gravissimum esset impositura, cui expediendo vires [illegible] nunquam sufficerent. Ex quo ad nostrum commodum utique esset optandum, ut [illegible] veritati foret consentanea. Multis autem premitur difficultatibus, quas cum primis [illegible] nostrae principiis minime conciliare licet: si enim corpus ab alio attractum moveri incipit, [illegible] non in illo sed in hoc altero est ponenda, quod cum ab illo sit remotum, concedendum [illegible] corpus quaqua versus a nullis aliis corporibus cinctum, sed quasi in vacuo posi- [illegible] moveri incipiat, etiamsi nusquam tangatur; neque tamen motus causam in ipso, sed in [illegible] corpore longissime ab eo remoto esse quaerendam, hocque perinde evenire sive spatium [illegible] sit vacuum, sive plenum. Corpus ergo, quatenus vi attrahendi esset praeditum, ad [illegible] corpora utrumque remota quasi vires emitteret, quibus alia quasi comprehenderet et ad [illegible] Quam actionem in distans qui concoquere non possunt, cum nullo modo concipi queat, [illegible] quandam subtilem confugiunt, quae pressione in corpora agens ea phaenomena producat, [illegible] attractioni, tanquam essentiali omnium corporum proprietati, adscribunt, etiamsi et illi [illegible] quo hoc efficitur, explicare haud valeant.

[illegible] **Scholion 3.** Hactenus saltem alium modum, quo duo corpora in se invicem agant, non [illegible] nisi quando in se mutuo impetum faciunt et ad contactum perveniunt; cum enim tum [illegible] in statu suo perseverare annitatur, hoc autem fieri nequeat, nisi se mutuo penetrent, eorum [illegible] in causa est quominus hoc eveniat. Ex ea ergo nascantur, necesse est, vires utriusque [illegible] immutantes, ut penetratio evitetur. Experientia etiam testatur, hoc casu majores vires [illegible] non exeri, quam quae penetrationem avertere valeant. Istarum igitur virium, quarum ef- [illegible] in conflictu corporum cernitur, origo in eorum impenetrabilitate manifesto est posita, unde [illegible] percipere licet, quomodo duo corpora remota in se invicem agere valeant; ac si quis [illegible] corpora ab aliis quantumvis remotis sine adminiculo medii inter ea existentis affici posse, [illegible] nostrae principia funditus everti videntur, neque apparet quo jure tum siderum [illegible] superstitionis commenta negari queant. Qui quidem a Leibnizii Harmonia praesta- [illegible] concedere coguntur spirituum actioni corpora esse subjecta, quod etiam Leibniziani [illegible] supremo negare non audent; spirituum autem actio in corpora ab omni contactu certe [illegible] statuenda, id quod attractioni favere videtur. Verum si corpora a spiritu concitantur, [illegible] contactus, saltem praesentia quaedam concipi debet, ita ut etiam hinc actio corporum in [illegible] firmamentum recipiat. Quare qui dicunt corporibus a Deo vim alia corpora quan- [illegible] attrahendi tribui potuisse, nihil aliud dicere videntur, nisi Deum perpetuo immediate [illegible] ad se invicem impellere. Verum omissa hac disputatione, ad Physicam potius quam huc [illegible] certum sit singula materiae elementa perinde ad se mutuo impelli, ac si se attra- [illegible] videamus quales inde vires pro corporibus finitae magnitudinis nascantur.

[illegible] **Theorema.** Corpus rigidum a viribus, quibus singula ejus elementa se mutuo attra- [illegible] ad motum neutiquam sollicitatur.

[illegible] **…nstratio.** Veritas hujus theorematis isto nititur fundamento, quod vires, quibus duo [illegible] mutuo attrahunt, utrinque sint aequales. Si enim duo concipiantur elementa, quorum massulae sint μ et ν, distantia vero $= z$, vis, qua μ ad ν attrahitur est $= \frac{C\mu\nu}{zz}$ (26), ac vi[...] vis, qua ν ad μ attrahitur est $= \frac{C\mu\nu}{zz}$. Sunt igitur hae vires aequales, et quia alterum ad alt[...] urgetur, earum directiones sunt contrariae. Jam in corpore elementum quodcunque ad reliqua o[...] attrahitur, et sumtis binis quibusque, vires, quibus alterum ab altero attrahitur, sunt aeq[...] et contrariae, ideoque in corpore rigido se mutuo destruunt. Quod cum eveniat, quaecu[...] bina elementa considerentur, necesse est omnes vires elementares, quibus cuncta elementa [...] mutuo agunt, se mutuo destruere, propterea quod quaelibet vis habeat in corpore sibi aequ[...] et contrariam.

33. **Coroll. 1.** Cum in hac mutua virium elementarium destructione ratio distantiae z n[...] censum veniat, patet theorema fore verum, etiamsi attractio aliam quamcunque distantiae rati[...] sequeretur, dummodo vires, quibus duo elementa se mutuo attrahunt, utrinque fuerint aequales.

34. **Coroll. 2.** Sive ergo corpus rigidum quiescat, sive moveatur, a viribus, quibus [...] elementa se mutuo appetunt, neque ejus status quietis, neque motus perturbabitur, sed a vi[...] externis aeque afficietur, ac si elementa ejus vi attractrice carerent.

35. **Coroll. 3.** Quae ergo in Mechanica de motu corporum rigidorum traduntur, ea om[...] veritati consentanea manent, etiamsi elementorum mutua attractio, a qua quidem ibi animum [...]straxeramus, accedat, neque quidquam ibi propterea erit immutandum.

36. **Scholion 1.** Quod ad formulam $\frac{\mu\nu}{zz}$ attinet, cui vis, qua massula μ aliam massul[...] in distantia $= z$ remotam attrahit, est proportionalis, quatenus ea constat ex reciproco qua[...] distantiae et massa corpusculi attracti ν, ejus veritatem per phaenomena stabilivimus. Quatenus [...]tem ea vis ipsi massae corpusculi attrahentis μ est proportionalis, id quidem sola ratione colleg[...] Nunc igitur haec postrema ratio multo fortius corroboratur: Cum enim phaenomena etiam evin[...] motum cujusque corporis coelestis non perturbari a viribus, quibus ejus partes se mutuo attra[...] hinc vicissim intelligitur, vires, quibus bina quaeque elementa se mutuo attrahunt, aequales [...] oportere, quoniam alioquin evenire posset, ut hae vires elementares se mutuo non destruerent. [...] hoc clarius perspiciatur, sumamus vim attractricem non ipsi massae μ corpusculi attrahentis [...] ejus quadrato μ^2 esse proportionalem, corpusque rigidum tantum ex duobus elementis μ et ν [...] vallo z dissitis esse conflatum. Quo posito erit vis, qua ν ad μ attrahitur $= \frac{C\mu^2\nu}{zz}$, contra ver[...] qua μ ad ν attrahitur $= \frac{C\mu\nu^2}{zz}$, quae ergo duae vires non essent aequales, nisi elementa [...] aequalia, ideoque corpus totum excessu virium $\frac{C\mu\nu}{zz}(\mu - \nu)$ ad motum sollicitaretur, quod eo[...] esset absurdum, cum idem corpus infinitis modis in duas partes dissectum concipi queat, et [...]libet sectio peculiarem vim esset exhibitura, cujus etiam directio a sectionis ratione penden[...] foret certa. Quod cum sit maxime absurdum, extra omne dubium est positum, vim attra[...] cujusque elementi ipsius massae esse proportionalem, hancque rationis $\frac{\mu\nu}{zz}$ partem adeo multo ce[...] esse evictam quam reliquas, cum hae tantum ex phaenomenis sint conclusae, illa autem adeo [...]cipio contradictionis innitatur.

37. **Scholion 2.** Hoc theorema quidem tantum ad corpora rigida, quorum partes ita firmo inter se sunt conjuncta, ut a nullis viribus de situ suo relativo dimoveri queant, accommodavimus, sed etiam quodammodo ad corpora flexibilia atque etiam fluida extenditur, quatenus scilicet tantum ad motum progressivum centri inertiae spectamus. Quodsi enim elementa corporis fuerint a se invicem dissoluta, quoniam vires, quibus bina quaeque se mutuo attrahunt, sunt aequales et contrariae, hinc nulla vis in centrum inertiae resultat. Ab his scilicet viribus fieri potest, ut partes quidem corporis quomodocunque inter se commoveantur, commune autem centrum inertiae jugiter quiescat, vel, si semel moveri coeperit, perpetuo uniformiter in linea recta progrediatur. Ex quo efficitur, ut quotcunque fuerint corpora se mutuo attrahentia, eorum commune centrum inertiae vel quiescat, vel uniformiter in directum promoveatur. Hinc ergo certum est omnium corporum mundanorum commune centrum inertiae vel in perpetua quiete versari, vel uniformiter in directum progredi. Atque hoc jam statim in ipso limine certissime affirmare licet, etiamsi adhuc minime pateat, quo motu singula corpora concitentur, in quo sine dubio veritas maximi momenti continetur.

38. **Problema 1.** Si corpus finitum, data figura praeditum, attrahat corpusculum ad datam et insignem ab eo distantiam remotum, definire tam quantitatem quam directionem ejus vis, qua corpusculum sollicitatur.

Solutio. (Fig. 172.) Cum corpusculum a singulis elementis corporis finiti attrahatur, definiri oportet vim ex omnibus istis viribus elementaribus resultantem. Quoniam igitur corporis finiti figura est data, tam ejus centrum inertiae quam ternos axes principales, eorumque respectu momenta inertiae pro cognitis assumi licet. Sit igitur J centrum inertiae corporis attrahentis, et JA, JB, JC ejus tres axes principales, eorumque respectu momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc, denotante M corporis massam. Corpusculum autem attractum, cujus massa $= m$, sit in H in distantia ab illius centro inertiae $JH = h$, quae recta cum axibus principalibus faciat angulos $HJA = \alpha$, $HJB = \beta$ et $HJC = \gamma$, ut sit $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Hinc demisso ab H ad planum AJB perpendiculo HG, et ex G ad JA productam normali GF, erit $JF = h\cos\alpha$, $FG = h\cos\beta$ et $GH = h\cos\gamma$. Concipiatur jam corporis elementum quodcunque in Z, pro quo coordinatae axibus principalibus parallelae sint $JX = x$, $XY = y$, $YZ = z$; massa autem istius elementi sit $= dM$, eritque ex indole axium principalium et centri inertiae $\int x dM = 0$, $\int y dM = 0$, $\int z dM = 0$; porro $\int xy dM = 0$, $\int xz dM = 0$, $\int yz dM = 0$, atque $\int xx dM = \frac{1}{2}M(bb + cc - aa)$, $\int yy dM = \frac{1}{2}M(aa + cc - bb)$, $\int zz dM = \frac{1}{2}M(aa + bb - cc)$. Ducatur recta HZ, qua posita $= v$ erit

$$v = \sqrt{((h\cos\alpha - x)^2 + (h\cos\beta - y)^2 + (h\cos\gamma - z)^2)}, \quad \text{seu}$$

$$v = \sqrt{(hh - 2h(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) + x^2 + y^2 + z^2)}.$$

His positis, corpusculum m in H ad elementum dM in Z situm attrahitur vi $= \frac{CmdM}{vv}$, ubi quidem coefficientem constantem C negligere licet, deinceps, ubi opus fuerit, facile introducendum; ita ut vis haec secundum HZ sit $= \frac{mdM}{vv}$, quae resoluta secundum directiones $H\alpha$, $H\beta$, $H\gamma$ axibus principalibus parallelas, praebebit

$$\text{vim secundum } H\alpha = \frac{m(h\cos\alpha - x)\,dM}{v^3},$$

$$\text{vim secundum } H\beta = \frac{m(h\cos\beta - y)\,dM}{v^3},$$

$$\text{vim secundum } H\gamma = \frac{m(h\cos\gamma - z)\,dM}{v^3}.$$

Hinc ergo integrando vis tota, qua corpusculum m in H sollicitatur, componitur ex his tribus

$$\text{vi secundum } H\alpha = m\int\frac{(h\cos\alpha - x)\,dM}{v^3},$$

$$\text{vi secundum } H\beta = m\int\frac{(h\cos\beta - y)\,dM}{v^3},$$

$$\text{vi secundum } H\gamma = m\int\frac{(h\cos\gamma - z)\,dM}{v^3},$$

quae formulae ita generaliter ulterius tractari nequeunt. Sed quia distantia corpusculi $JH = h$ prae magnitudine corporis praegrandis supponitur, ita ut maximi valores, quos coordinatae x, y, z recipere possunt, prae h sint satis exigui, ejusmodi approximatione uti, qua valor ipsius v in seriem resolvatur, in qua coordinatarum x, y, z potestates, secunda altior, rejiciantur; hinc ergo fiet

$$\frac{1}{v^3} = \frac{1}{h^3} + \frac{3(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)}{h^4} - \frac{3(xx + yy + zz)}{2h^5} + \frac{15(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2}{2h^5},$$

unde colligitur pariter non ultra secundam potestatem ascendendo

$$\frac{h\cos\alpha - x}{v^3} = \frac{\cos\alpha}{hh} - \frac{x}{h^3}(1 - 3\cos^2\alpha) + \frac{3y\cos\alpha\cos\beta}{h^3} + \frac{3z\cos\alpha\cos\gamma}{h^3}$$

$$- \frac{3xx\cos\alpha}{2h^4}(3 - 5\cos^2\alpha) - \frac{3yy\cos\alpha}{2h^4}(1 - 5\cos^2\beta) - \frac{3zz\cos\alpha}{2h^4}(1 - 5\cos^2\gamma)$$

$$- \frac{3xy\cos\beta}{h^4}(1 - 5\cos^2\alpha) - \frac{3xz\cos\gamma}{h^4}(1 - 5\cos^2\alpha) + \frac{15yz\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{h^4}.$$

Multiplicetur haec formula per DM, captisque singulorum membrorum integralibus secundum praecepta exposita, habebimus

$$\int\frac{(h\cos\alpha - x)}{v^3}dM = \frac{M\cos\alpha}{hh} - \frac{3M(bb + cc - aa)}{4h^4}\cos\alpha\,(3 - 5\cos^2\alpha)$$

$$- \frac{3M(aa + cc - bb)}{4h^4}\cos\alpha\,(1 - 5\cos^2\beta) - \frac{3M(aa + bb - cc)}{4h^4}\cos\alpha\,(1 - 5\cos^2\gamma)$$

quae forma ob $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ad sequentem revocatur

$$\int\frac{(h\cos\alpha - x)\,dM}{v^3} = \frac{M\cos\alpha}{hh} + \frac{3Maa\cos\alpha}{2h^4}(3 - 5\cos^2\alpha)$$

$$+ \frac{3Mbb\cos\alpha}{2h^4}(1 - 5\cos^2\beta) + \frac{3Mcc\cos\alpha}{2h^4}(1 - 5\cos^2\gamma).$$

Si simili modo reliqua duo integralia colligantur, erunt ternae vires, quibus corpusculum m a corpore finito sollicitatur, sequentes:

$$\text{secundum}\quad H\alpha = \frac{Mm\cos\alpha}{hh}\Big(1 + \frac{3aa}{2hh}(3 - 5\cos^2\alpha) + \frac{3bb}{2hh}(1 - 5\cos^2\beta) + \frac{3cc}{2hh}(1 - 5\cos^2\gamma)\Big),$$

$$H\beta = \frac{Mm\cos\beta}{hh}\Big(1 + \frac{3bb}{2hh}(3 - 5\cos^2\beta) + \frac{3cc}{2hh}(1 - 5\cos^2\gamma) + \frac{3aa}{2hh}(1 - 5\cos^2\alpha)\Big),$$

$$H\gamma = \frac{Mm\cos\gamma}{hh}\Big(1 + \frac{3cc}{2hh}(3 - 5\cos^2\gamma) + \frac{3aa}{2hh}(1 - 5\cos^2\alpha) + \frac{3bb}{2hh}(1 - 5\cos^2\beta)\Big),$$

quae vires jam pro lubitu ad alias directiones reduci possunt.

69. **Coroll. 1.** Si harum trium virium quadrata colligantur, et ex summa radix quadrata extrahatur, prodit vis illis aequivalens, quae ergo simili approximatione adhibita reperitur:

$$\text{Vis aequivalens} = \frac{Mm}{hh}\Big(1 + \frac{3aa}{2hh}(1 - 3\cos^2\alpha) + \frac{3bb}{2hh}(1 - 3\cos^2\beta) + \frac{3cc}{2hh}(1 - 3\cos^2\gamma)\Big),$$

cujus directio deflectet a directione HJ angulo exiguo, qui est

$$= \frac{3}{hh}\sqrt{\Big((aa - bb)^2\cos^2\alpha\cos^2\beta + (aa - cc)^2\cos^2\alpha\cos^2\gamma + (bb - cc)^2\cos^2\beta\cos^2\gamma\Big)}.$$

70. **Coroll. 2.** ~~Quodsi ergo corporis attrahentis terna momenta~~ principalia fuerint inter se aequalia, $aa = bb = cc$, ob $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, erit vis, qua corpusculum H sollicitatur, $= \frac{Mm}{hh}$, ejusque directio in ipsam lineam HJ cadit, ita ut hoc casu corpusculum m in H perinde attrahatur, ac si tota corporis attrahentis massa M in ipso centro inertiae J esset collecta.

71. **Coroll. 3.** Si corpusculum attractum in axe principali corporis attrahentis JA fuerit situm, ut sit $\alpha = 0$ et $\beta = \gamma = 90^\circ$, deflexio vis attrahentis a directione HJ evanescit, ipsa vero vis attrahens erit $= \frac{Mm}{hh}\Big(1 + \frac{3(bb + cc - 2aa)}{2hh}\Big)$. Nisi ergo sit $bb + cc = 2aa$, attractio erit vel major vel minor, quam si tota corporis attrahentis massa in suo centro inertiae esset collecta.

72. **Coroll. 4.** Si corpus attractum ita fuerit situm, ut recta HJ ad singulos axes principales ~~aeque inclinetur, angulo scilicet $54^0\,45'$, tum vis attrahens erit~~ $= \frac{Mm}{hh}$, perinde ac si massa attrahens M in centro inertiae J esset collecta, at ejus directio declinabit a directione HJ angulo, qui est

$$= \frac{1}{hh}\sqrt{2\,(a^4 + b^4 + c^4 - aabb - aacc - bbcc)}.$$

73. **Scholion 1.** Vis, qua corpusculum m a corpore M attrahitur, infinitis aliis modis repraesentari potest. Primo scilicet haec vis aequivalet vi secundum $HJ = \frac{Mm}{hh}$, et insuper his tribus viribus:

$$\text{secundum}\quad H\alpha = \frac{3Mm\cos\alpha}{2h^4}\Big(aa\,(3 - 5\cos^2\alpha) + bb\,(1 - 5\cos^2\beta) + cc\,(1 - 5\cos^2\gamma)\Big),$$

$$H\beta = \frac{3Mm\cos\beta}{2h^4}\Big(bb\,(3 - 5\cos^2\beta) + cc\,(1 - 5\cos^2\gamma) + aa\,(1 - 5\cos^2\alpha)\Big),$$

$$H\gamma = \frac{3Mm\cos\gamma}{2h^4}\Big(cc\,(3 - 5\cos^2\gamma) + aa\,(1 - 5\cos^2\alpha) + bb\,(1 - 5\cos^2\beta)\Big),$$

quae praeter prima sunt vehementer parvae.

Deinde ista vis etiam hoc modo referri potest, ut aequivaleat

$$\text{vi secund. } HJ = \frac{Mm}{hh}\left(1 + \frac{5aa}{2hh}(1 - 3\cos^2\alpha) + \frac{5bb}{2hh}(1 - 3\cos^2\beta) + \frac{5cc}{2hh}(1 - 3\cos^2\gamma)\right),$$

insuperque his tribus valde parvis

$$\text{vi sec. } H\alpha = \frac{Mm(2aa - bb - cc)\cos\alpha}{h^4},$$

$$\text{vi sec. } H\beta = \frac{Mm(2bb - aa - cc)\cos\beta}{h^4},$$

$$\text{vi sec. } H\gamma = \frac{Mm(2cc - aa - bb)\cos\gamma}{h^4}.$$

Tum vero etiam hoc modo, ut aequivaleat

$$\text{vi sec. } HJ = \frac{Mm}{hh}\left(1 + \frac{3aa}{2hh}(1 - 3\cos^2\alpha) + \frac{3bb}{2hh}(1 - 3\cos^2\beta) + \frac{3cc}{2hh}(1 - 3\cos^2\gamma)\right),$$

et insuper his exiguis tribus

$$\text{vi sec. } H\alpha = \frac{3Mm\cos\alpha}{h^4}\left((aa - bb)\cos^2\beta + (aa - cc)\cos^2\gamma\right),$$

$$\text{vi sec. } H\beta = \frac{3Mm\cos\beta}{h^4}\left((bb - aa)\cos^2\alpha + (bb - cc)\cos^2\gamma\right),$$

$$\text{vi sec. } H\gamma = \frac{3Mm\cos\gamma}{h^4}\left((cc - aa)\cos^2\alpha + (cc - bb)\cos^2\beta\right).$$

Hinc si corpusculum m in plano axium JA et JB reperiatur, ut sit $\gamma = 90^0$ et $\alpha + \beta = 90^0$, vis id sollicitans constabit primo

$$\text{vi sec. } HJ = \frac{Mm}{hh}\left(1 + \frac{3aa}{2hh}(1 - 3\cos^2\alpha) + \frac{3bb}{2hh}(1 - 3\sin^2\alpha) + \frac{3cc}{2hh}\right),$$

tum vero his duabus viribus

$$\text{vi sec. } H\alpha = \frac{3Mm(aa - bb)\cos\alpha\cos^2\beta}{h^4},$$

$$\text{vi sec. } H\beta = \frac{3Mm(bb - aa)\cos\beta\cos^2\alpha}{h^4}.$$

Unde si momenta principalia respectu axium JA et JB fuerint aequalia, hae duae postremae vires evanescunt, remanetque sola vis prior

$$\text{sec. } HJ = \frac{Mm}{hh}\left(1 + \frac{3(cc - aa)}{2hh}\right).$$

44. **Scholion 2.** Quemadmodum corpora coelestia tantopere a se invicem sunt remota, ut nostra approximatio solutionem perfectam praebere sit censenda, ita etiam commode usu venit, ut eorum momenta inertiae sint fere inter se aequalia, unde proxime perinde ad se attrahunt, ac si universa eorum massa in ipsorum centro inertiae esset collecta, quo casu vis attrahens perpetuo in centrum inertiae foret directa, et quadrato distantiae reciproce proportionalis, prorsus uti Newtonus

Si autem notabilis inaequalitas inter momenta inertiae intercederet, vis attrahens ab hac simplici lege ita aberraret, ut motus corpusculi attracti nonnisi difficillime inde definiri possit, praecipue si distantia non fuerit adeo magna. Cum enim corpusculum attractum continuo situm suum respectu axium principalium mutet, in motu ejus non solum distantia h, sed etiam anguli α, β, γ erunt quantitates variabiles, viresque assignatae maximam in calculo parient difficultatem. Unico casu difficultas minueretur, quando scilicet corporis attrahentis duo momenta principalia inter se fuerint aequalia, corpusque attractum in horum binorum axium plano moveatur: tum enim vis attrahens perpetuo ad centrum inertiae corporis attrahentis dirigetur, atque per solam distantiam determinabitur; verumtamen duabus constabit partibus, quarum altera quadrato, altera vero biquadrato distantiae erit reciproce proportionalis, quippe quae ut vidimus est $= \frac{Mm}{hh} + \frac{3Mm(cc-aa)}{2h^4}$, ubi quidem ob duplicem rationem pars posterior prae priori est vehementer parva, primo scilicet, quod quantitas hh plurimum superet quantitates cc et aa, tum vero quod ista quadrata aa et cc sint proxime inter se aequalia. Quod quo clarius perspiciatur, sit corpus attrahens sphaeroides ellipticum homogeneum, genitum ex conversione ellipsis, cujus semiaxes sint A et C, circa axem $2C$, ita ut bini semiaxes principales JA et JB futuri sint $= A$, ac tertius $JC = C$. Cum igitur massa istius corporis sit $M = \frac{4}{3}\pi ACC$, erit momentum inertiae respectu axium JA et $JB = \frac{1}{5}M(AA+CC)$, et respectu axis $JC = \frac{2}{5}MAA$, unde pro nostra formula fiet $aa = bb = \frac{AA+CC}{5}$ et $cc = \frac{2AA}{5}$, hincque $cc - aa = \frac{1}{5}(AA - CC)$. Quare si corpus fuerit sphaeroides compressum, uti terra, erit $AA > CC$, aliudque corpusculum circa id in plano aequatoris moveatur, vis attrahens major erit quam $\frac{Mm}{hh}$, et excessus erit biquadrato distantiae reciproce proportionalis, tota vi existente $= \frac{Mm}{hh} + \frac{3Mm(AA-CC)}{10h^4}$. Unde si semiaxes A et C proxime fuerint aequales, pars posterior prae priori fere pro evanescente haberi potest.

45. **Scholion 3.** Cum corpus solis sit fere perfecte sphaericum, in viribus, quibus planetae ad solem urgentur, haec inaequalitas tuto negligi potest, id quod etiam de viribus, quibus planetae primarii se mutuo attrahunt, multo magis est tenendum, cum hae vires ipsae prae vi solis sint vehementer exiguae. In motu quidem lunae aberratio figurae terrae a sphaerica alicujus momenti esse posse videtur, cum ob lunae vicinitatem, tum vero quod terrae figura magis a sphaerica recedat quam solis. Imprimis autem quando motus satellitum Jovis ac Saturni scrutari lubuerit, hujus aberrationis rationem haberi conveniet, propterea quod figura Jovis non parum a sphaerica recedit, dum ratio semiaxium $A : C$ fere ut $11 : 10$ reputatur, ac vicinitas satellitum hanc aberrationem eo magis adauget. In Saturno autem praeter eandem rationem annulus in vi attrahente notabilem perturbationem generare debet. Si enim annulus tanquam pars corporis Saturni spectetur, hoc figuram sphaeroidis admodum compressi induere est censendum. His autem casibus commode evenit, ut satellites Jovis fere in plano aequatoris hujus planetae, satellites Saturni autem fere in plano annuli revolvantur, quod si secus eveniret, investigationem motus satellitum ne suscipere quidem liceret. Quemadmodum autem figura corporis attrahentis hujusmodi anomaliam in vi attrahente gignere valet, ita similis anomalia quoque ex figura corporis attracti resultat, id quod in sequente problemate plenius ostendemus.

46. **Problema 2.** (Fig. 173.) Si corpus finitum attrahatur ad punctum N valde remotum ad corpus, cujus totam massam in eo puncto collectam concipere licet, invenire vim attractricem, qua illud corpus sollicitatur.

Solutio. Sit J centrum inertiae corporis attracti, et JA, JB, JC ejus axes principales, quorum respectu ejus momenta inertiae sint Maa, Mbb, Mcc, denotante littera M ejus massam. Corporis autem attrahentis centrum inertiae sit in N, cujus effectus ut perinde se habeat, ac si tota ejus massa, quae sit $= N$, in puncto N esset collecta, hujus corporis momenta inertiae omnia inter se aequalia sunt concipienda, quemadmodum ex § 40 intelligitur. Hoc posito, singula corporis M elementa ad ipsum punctum N attrahantur viribus distantiarum quadratis reciproce proportionalibus, et quoniam hae vires aequales sunt et contrariae viribus, quibus corpusculum in N collocatum, cujus quidem massa esset $= N$, ad singula corporis M elementa attrahitur, vis etiam tota, qua corpus M a corpore N sollicitatur, aequalis et contraria erit vi, qua corpus N, ut punctum consideratum, a corpore M attrahitur, et quam in problemate praecedente determinavimus. Ponatur ergo centri inertiae distantia $JN = h$, et anguli $NJA = \alpha$, $NJB = \beta$, $NJC = \gamma$, ductisque ex N rectis $N\alpha$, $N\beta$, $N\gamma$ parallelis ternis axibus principalibus JA, JB, JC corporis attracti, vires, quibus corpus M sollicitatur, ita ad directiones $N\alpha$, $N\beta$, $N\gamma$ reducentur, ut sit vis

$$\text{sec. } N\alpha = \frac{MN\cos\alpha}{hh}\left(1 + \frac{3aa}{2hh}(3 - 5\cos^2\alpha) + \frac{3bb}{2hh}(1 - 5\cos^2\beta) + \frac{3cc}{2hh}(1 - 5\cos^2\gamma)\right)$$

$$\text{sec. } N\beta = \frac{MN\cos\beta}{hh}\left(1 + \frac{3bb}{2hh}(3 - 5\cos^2\beta) + \frac{3cc}{2hh}(1 - 5\cos^2\gamma) + \frac{3aa}{2hh}(1 - 5\cos^2\alpha)\right)$$

$$\text{sec. } N\gamma = \frac{MN\cos\gamma}{hh}\left(1 + \frac{3cc}{2hh}(3 - 5\cos^2\gamma) + \frac{3aa}{2hh}(1 - 5\cos^2\alpha) + \frac{3bb}{2hh}(1 - 5\cos^2\beta)\right)$$

quippe quae sunt aequales et contrariae iis, quas in problemate praecedente invenimus, nisi quod hic corporis attrahentis massa sit N, cum ibi ejus loco habuissemus litteram m. Etsi autem hae vires hic ad punctum N sint relatae, tamen corpus ABC sollicitare sunt censendae; scilicet quaeri oportet vim illis ternis aequivalentem, cujus directio ad corpus ABC usque producta vim hoc corpus sollicitantem manifestabit. Potest autem ex his viribus una vis elici secundum directionem JN sollicitans, quae quasi vis primaria spectari potest, prae qua reliquae sint valde parvae. Scilicet ut in § 43 vires corpus ABC sollicitantes ita repraesentari possunt, ut primo adsit

$$\text{vis sec. } JN = \frac{MN}{hh}\left(1 + \frac{5aa}{2hh}(1 - 3\cos^2\alpha) + \frac{5bb}{2hh}(1 - 3\cos^2\beta) + \frac{5cc}{2hh}(1 - 3\cos^2\gamma)\right);$$

tum vero hae tres vires valde exiguae

$$\text{sec. } N\alpha = \frac{MN(2aa - bb - cc)\cos\alpha}{h^4},$$

$$\text{sec. } N\beta = \frac{MN(2bb - aa - cc)\cos\beta}{h^4},$$

$$\text{sec. } N\gamma = \frac{MN(2cc - aa - bb)\cos\gamma}{h^4}.$$

... modo ut primo adsit vis principalis

$$\text{sec. } JN = \frac{MN}{hh}\left(1 + \frac{3aa}{2hh}(1 - 3\cos^2\alpha) + \frac{3bb}{2hh}(1 - 3\cos^2\beta) + \frac{3cc}{2hh}(1 - 3\cos^2\gamma)\right)$$

ac praeterea hae tres vires minimae

$$\text{sec. } N\alpha = \frac{3MN\cos\alpha}{h^4}\left((aa - bb)\cos^2\beta + (aa - cc)\cos^2\gamma\right),$$

$$\text{sec. } N\beta = \frac{3MN\cos\beta}{h^4}\left((bb - aa)\cos^2\alpha + (bb - cc)\cos^2\gamma\right),$$

$$\text{sec. } N\gamma = \frac{3MN\cos\gamma}{h^4}\left((cc - aa)\cos^2\alpha + (cc - bb)\cos^2\beta\right).$$

77. **Coroll. 1.** Si igitur et corporis ABC terna momenta principalia fuerint inter se aequalia, sola vis secundum $JN = \frac{MN}{hh}$ relinquitur, et ambo corpora utut finita perinde se attrahant, ac si utriusque massa in suo centro inertiae esset collecta, ac tum directio vis attractricis per utriusque centrum inertiae transit.

78. **Coroll. 2.** Si corpus attrahens N in plano AJB binis axibus principalibus JA et JB corporis attracti determinato versetur, erit $\gamma = 90^0$ et $\alpha + \beta = 90^0$; unde hoc casu habebitur

$$\text{vis sec. } JN = \frac{MN}{hh}\left(1 + \frac{3aa}{2hh}(1 - 3\cos^2\alpha) + \frac{3bb}{2hh}(1 - 3\sin^2\alpha) + \frac{3cc}{2hh}\right),$$

ac praeterea hae duae tantum vires valde parvae

$$\text{vis sec. } N\alpha = \frac{3MN(aa - bb)\cos\alpha\cos^2\beta}{h^4},$$

$$\text{vis sec. } N\beta = \frac{3MN(bb - aa)\cos\beta\cos^2\alpha}{h^4}.$$

79. **Coroll. 3.** Quare si hoc casu corporis attracti momenta inertiae respectu axium JA et JB fuerint inter se aequalia, binae vires exiguae secundum $N\alpha$ et $N\beta$ evanescunt, relinquiturque vis attrahens sola secundum $JN = \frac{MN}{hh}\left(1 + \frac{3(cc - aa)}{2hh}\right)$, quae ergo partim quadrato partim biquadrato distantiae est proportionalis.

80. **Coroll. 4.** In genere autem si fuerit $bb = aa$, seu corporis ABC omnia momenta inertiae respectu axium in plano AJB sumtorum sint aequalia, vis sollicitans constabit

$$\text{vi sec. } JN = \frac{MN}{hh}\left(1 + \frac{3(cc - aa)(1 - 3\cos^2\gamma)}{2hh}\right)$$

et insuper his viribus exiguis

$$\text{vi sec. } N\alpha = \frac{3MN(aa - cc)\cos\alpha\cos^2\gamma}{h^4},$$

$$\text{vi sec. } N\beta = \frac{3MN(aa - cc)\cos\beta\cos^2\gamma}{h^4},$$

$$\text{vi sec. } N\gamma = \frac{3MN(cc - aa)\cos\gamma\sin^2\gamma}{h^4}.$$

51. **Scholion 1.** Effectus ab his viribus oriundus duplici modo se habet, prout vel motum progressivum corporis ABC afficit, vel ejus motum gyratorium, quos binos effectus seorsim definire licet. Quodsi ergo ad solum motum progressivum corporis ABC respiciamus, singulas sollicitantes, tanquam ipsi ejus centro inertiae J in suis directionibus applicatas consideramus, propterea corpus tum ab his viribus sollicitatum est censendum, primo a

$$\text{vi sec. } JN = \frac{MN}{hh}\left(1 + \frac{3aa}{2hh}(1-3\cos^2\alpha) + \frac{3bb}{2hh}(1-3\cos^2\beta) + \frac{3cc}{2hh}(1-3\cos^2\gamma)\right),$$

ac praeterea ab his tribus exiguis viribus

$$\text{vi sec. } JA = \frac{3MN}{h^4}\cos\alpha\left((aa-bb)\cos^2\beta + (aa-cc)\cos^2\gamma\right),$$

$$\text{vi sec. } JB = \frac{3MN}{h^4}\cos\beta\left((bb-cc)\cos^2\gamma + (bb-aa)\cos^2\alpha\right),$$

$$\text{vi sec. } JC = \frac{3MN}{h^4}\cos\gamma\left((cc-aa)\cos^2\alpha + (cc-bb)\cos^2\beta\right).$$

Sin autem perturbationem motus vertiginis, quo corpus ABC circumagitur, definire velimus, tam ad ipsas vires, quam earum momenta respectu axium principalium respicere debemus. Ex viribus autem secundum directiones $N\alpha$, $N\beta$, $N\gamma$ agentibus colligimus primo momentum respectu axis JA in sensum BC tendens $=$ vi $N\gamma . FG -$ vi $N\beta . GN =$ vi $N\gamma . h\cos\beta -$ vi $N\beta . h\cos\gamma$. Cum ergo vis primaria secundum JN nullum praebeat momentum, ex viribus exiguis sequentia colligimus momenta:

I. Momentum respectu axis JA in sensum $BC = \frac{3MN(cc-bb)\cos\beta\cos\gamma}{h^3}$,

II. Momentum respectu axis JB in sensum $CA = \frac{3MN(aa-cc)\cos\alpha\cos\gamma}{h^3}$,

III. Momentum respectu axis JC in sensum $AB = \frac{3MN(bb-aa)\cos\alpha\cos\beta}{h^3}$,

unde quemadmodum perturbatio motus gyratorii definiri debeat, in libro superiori abunde est ostensum.

52. **Scholion 2.** Si corpora coelestia essent perfecte sphaerica et ex materia homogenea conflata, seu saltem eorum momenta inertiae inter se aequalia, haud aliter se mutuo attraherent, ac si singulorum massae in suo quaeque centro inertiae essent collectae, quam hypothesin etiam Newtonus in investigatione motuum coelestium assumsit. Verum si corpora coelestia ab hac figura recedant, iisdem principiis inducti videmus vires attractrices neque ad centrum inertiae cujusque corporis tendere, neque exacte quadratis distantiarum reciproce esse proportionales, ac nunc quidem intelligimus aberrationem ab hac lege a duplici causa proficisci, a figura scilicet non sphaerica tam corporis attrahentis quam corporis attracti. In primo nempe problemate in corpore attracto momenta inertiae aequalia, et in attrahente inaequalia; in secundo autem problemate in corpore attracto momenta inertiae inaequalia et in attrahente aequalia sumsimus; unde dum alterum corpus habeat momenta inertiae aequalia, inde vis attractrix determinari potest. Superesset igitur, ut investigaremus etiam casum, quo ambo corpora habeant sua momenta inertiae inaequalia; verum etiamsi hanc investigationem feliciter expediremus, vix quicquam lucri inde consequeremur, cum calculus pro motu

minando instituendus nimis difficilis redderetur. Quo etiam facile erit vim attrahentem his casibus proxime assignare, modo unum modo alterum corpus tanquam sphaericum spectando et aberrationes a lege vulgari colligendo. Sed plerumque hae aberrationes tam sunt exiguae pro motu progressivo, ut satis tuto negligi queant; pro motu autem vertiginis sufficit figuram corporis attracti considerasse, quoniam vires sollicitantes per praelongos vectes agunt, unde tanta earum momenta nascuntur, ut prae iis momenta virium, quae ex figura corporis attracti resultarent, pro nihilo essent habenda, quandoquidem hae in ipso corpore attracto applicatae sunt censendae, ideoque nonnisi exigua momenta producere valent.

53. **Scholion 3.** Hae ergo sunt vires, quibus corpora coelestia sollicitantur, et ex quarum actione eorum motus ex principiis mechanicis investigari oportet, qui, quin deinceps vicissim cum observationibus exactissime conveniant, eo minus est dubitandum, cum existentia harum virium sit per ipsas observationes confirmata. Cum igitur hae vires neque sint quadratis distantiarum reciproce proportionales, neque ad ipsa centra inertiae cujusque corporis tendant, nisi corpora sint sphaerica, seu omnia momenta inertiae habeant aequalia, in multo difficiliores investigationes delabimur, quam quidem Newtonus susceperat. Praeterea vero insigne dubium hic oritur, an hae vires solae in mundo existant, quibus corpora coelestia sollicitentur? Etsi enim phaenomena alias nobis non patefaciant, tamen cum universum spatium aethere, utpote luminis vehiculo sit repletum, fieri omnino nequit, quin inde resistentia quaedam nascatur, quam corpora coelestia in motu suo patiantur. Nam quantumvis etiam subtilem aetheris materiam fingamus, tamen neque liberrime corpora crassiora penetrare statui potest, neque ea usque adeo poris plena concipere licet, ut in motu suo nullos plane impetus ab aethere sustineant. Ob poros quidem aetheri pervios concedere debemus, ejus resistentiam prae ea, quam alia fluida objicerent, multo minorem esse quam pro ratione densitatis; scilicet si aether esset centies millies rarior aëre, resistentia multo magis quam centies millies minor esset statuenda prae ea, quam idem corpus pari celeritate motum in aëre sentiret. Si quis objicere vellet, aetherem cuique corpori coelesti vicinum pari celeritate proferri, ideoque nullam inde resistentiam oriri, quod quidem nulla ratione confirmari potest, is tamen concedere teneretur, cometas resistentiam pati debere. Quod autem effectum hujusmodi resistentiae non percipiamus, causa est, quod nonnisi post plura secula sensibilis evadat: ac tantum abest, ut observationes huic sententiae plane adversentur, ut potius in motu lunae talis effectus animadverti videatur.

54. **Theorema.** Quotcunque fuerint corpora, quae se mutuo attrahant, et quomodocunque moveantur, eorum commune centrum inertiae vel quiescit, vel uniformiter in directum promovetur.

Demonstratio. Veritas hujus theorematis isto nititur fundamento, quod vires, quibus duo quaeque corpora se invicem attrahunt, sint inter se aequales et in contrarium directae. Scilicet si fuerint (fig. 174) duo corpora quaecunque Ma et Nb, et vis, qua se mutuo attrahunt $= V$, cujus directio sit recta ab, ita ut corpus Ma a corpore Nb sollicitetur a vi $= V$ in directione ab, corpus vero Nb a corpore Ma vi $= V$ in directione ba. Considerentur utriusque corporis centra inertiae, quae sint in A et B, et quatenus tantum ad motum progressivum horum corporum respicimus, utrique corpori vis, qua sollicitatur, in ipso centro inertiae secundum eandem directionem applicata est concipienda. Hinc corpus A sollicitari censendum est vi $= V$ in directione $A\alpha$, et corpus B vi $= V$ in directione $B\beta$, ita ut vires sint aequales et directiones parallelae oppositaeque. Quodsi motus ad ternas directiones fixas referatur, et vis corpus A sollicitans secundum has ternas directiones resoluta praebeat vires P, Q, R, vis corpus B sollicitans eodem modo resoluta dabit $-P$, $-Q$, $-R$. His positis (fig. 175) sint corpora quotcunque se mutuo attrahentia, quorum massae, in cujusque centro inertiae A, B, C collectae, denotentur literis A, B, C, pro quibus coordinatae ternis directionibus fixis OE, OF, OG parallelae statuantur

$$O\alpha = x,\ \alpha a = y,\ aA = z;\quad O\beta = x',\ \beta b = y',\ bB = z';\quad O\gamma = x'',\ \gamma c = y'',\ cC = z''.$$

Sit porro vis, qua corpora A et B se mutuo attrahunt, $= V$, vis corporum A et $C = V'$ et corporum B et $C = V''$, quae secundum easdem directiones fixas resolutae dent vires P, Q, R; P', Q', R', et P'', Q'', R'' atque

corpus	sollicitabitur secundum		
	direct. OE	direct. OF	direct. OG
A	$+P+P'$	$+Q+Q'$	$+R+R'$
B	$-P+P''$	$-Q+Q''$	$-R+R''$
C	$-P'-P''$	$-Q'-Q''$	$-R'-R''$

Jam ex principiis accelerationis, sumto elemento temporis dt constante, colligimus formulas sequentes

$$Addx = 2gdt^2(+P+P');\quad Addy = 2gdt^2(+Q+Q');\quad Addz = 2gdt^2(+R+R')$$
$$Bddx' = 2gdt^2(-P+P'');\quad Bddy' = 2gdt^2(-Q+Q'');\quad Bddz' = 2gdt^2(-R+R'')$$
$$Cddx'' = 2gdt^2(-P'-P'');\quad Cddy'' = 2gdt^2(-Q'-Q'');\quad Cddz'' = 2gdt^2(-R'-R'')$$

unde concludimus

$$Addx + Bddx' + Cddx'' = 0$$
$$Addy + Bddy' + Cddy'' = 0$$
$$Addz + Bddz' + Cddz'' = 0,$$

simulque patet si plura tribus fuerint corpora, hujusmodi ternas aequationes semper oriri debere. Hinc ergo integrando consequimur

$$Adx + Bdx' + Cdx'' = Edt;\quad Ax + Bx' + Cx'' = Et + \mathfrak{E}$$
$$Ady + Bdy' + Cdy'' = Fdt;\quad Ay + By' + Cy'' = Ft + \mathfrak{F}$$
$$Adz + Bdz' + Cdz'' = Gdt;\quad Az + Bz' + Cz'' = Gt + \mathfrak{G},$$

unde apparet, commune centrum inertiae corporum secundum singulas directiones OE, OF, OG uniformiter proferri, ideoque ejus motum verum fore uniformem in directum. Nisi igitur commune centrum inertiae quiescat, certe uniformiter in directum profertur.

55. **Coroll. 1.** Si igitur toti systemati motus aequalis et contrarius ei, quo commune centrum inertiae progreditur, imprimi concipiatur, corpora ita movebuntur, ut commune centrum inertiae in quiete persistat.

56. **Coroll. 2.** Hoc autem motu superaddito, motus corporum respectivus inter se non mutabitur, ex quo totius mundi commune centrum inertiae tanquam quiescens spectari potest, motus enim singulorum corporum ab iisdem viribus efficietur, sive istud centrum quiescat, sive uniformiter in directum promoveatur.

57. **Coroll. 3.** Quare si motum corporum respectivum, respectu communis centri inertiae definire velimus, non alias vires, praeter eas, quibus singula corpora revera sollicitantur, considerari opus est.

58. **Scholion 1.** In Astronomia autem neque motus corporum coelestium absolutos, neque ad eorum commune centrum inertiae relatos contemplari solemus, sed potius propositum est eorum motus respectu corporis cujuspiam mundani, quales spectatori, in ejus centro inertiae collocato, essent apparituri, assignare. Ita motus planetarum primariorum ut et cometarum ad centrum solis, secundariorum vero ad centrum primarii referri solent. Ut autem hi motus apparentes per calculum reperiantur, id corpus, ex cujus centro ii spectari concipiuntur, tanquam quiescens assumitur, reliquis vero, praeter vires, quibus revera sollicitantur, insuper vires applicari debent, quae sint similes et contrariae iis, quibus corpus quiescens urgetur; scilicet hae vires primo per massam corporis quiescentis dividi, tum vero iterum per massam cujusque corporis moti, cui sunt applicandae, multiplicari debent, ut in his corporibus aequalem et contrariam motus perturbationem producant ei, quam in corpore, quod quiescens assumitur, producturae fuissent. Haec regula rite observata perducet ad motus apparentes, ex quibus deinceps motus veri, si motus corporis, quod pro quiescente assumitur, fuerit cognitus, facile definiuntur, siquidem opus fuerit eos nosse: semper enim sufficit motus tantum respectivos inter se habere cognitos. Ac si hos motus respectu unius noverimus, facile respectu cujusque alius determinabimus, quemadmodum Astronomi ex locis planetarum heliocentricis eorum loca geometrica elicere solent: scilicet cognito motu planetarum ac proinde etiam terrae, qualis ex centro solis esset appariturus, per solam Geometriam inde colligitur motus eorum, quo spectatori in centro terrae posito progredi videntur, unde deinceps etiam motus apparens pro spectatoribus in superficie terrae constitutis facile concluditur.

59. **Scholion 2.** Cum numerus corporum in mundo existentium et se mutuo attrahentium sit quasi infinitus, eorum motus exactissime definire haud licet, nisi pro corporum se mutuo attrahentium numero quantumvis magno motus inde oriundos determinare voluerimus, quod problema tantis calculi difficultatibus involutum deprehenditur, ut sagacitas humana illi enodando minime sufficere videatur. Verum corpora mundana ita commode a sapientissimo Conditore disposita deprehenduntur, ut primo sol et stellae fixae tam vastis a se invicem intervallis sint remotae, ut vires, quibus in se mutuo agunt, non obstante horum corporum insigni mole, pro nihilo sint reputandae; unde fit, ut stellas fixas cum sole tanquam corpora quiescentia et nullis viribus se mutuo sollicitantia spectare liceat, quod commodum neutiquam locum esset habiturum, si minoribus intervallis a se invicem distarent. Deinde etiam planetae et cometae nunquam tantopere a sole recedere videntur, ut vires, quas a stellis fixis sustinent, prae vi solis quicquam momenti adipiscantur. Tum vero etiam planetae principales et cometae pro suis massis tantis distantiis a se invicem manent sejuncti, ut vires, qui-

bus se mutuo afficiunt, prae viribus, quibus ad solem tendunt, sint satis exiguae. Luna autem satellites Jovis et Saturni tam vicini sunt suis principalibus, ut vires, quibus ad eos urgentur, plurimum excedant ipsam vim solis. Quare pro motu omnium horum corporum proxime determinando sufficit unicam vim considerasse, dum reliquae prae ea sint valde parvae, quarum effectus tantum in exiguis perturbationibus producendis consumuntur, quas ope methodi approximandi definire licet. Si autem vel planetae primarii sibi essent multo propiores, vel satellites a suis principalibus magis distarent, nullo fere modo ad motus eorum cognitionem pertingere possemus.

60. **Scholion 3.** Primo ergo duo tantum corpora se mutuo attrahentia comtemplari conveniet, ubi quidem eorum indoles, prout fuerint sphaerica vel non sphaerica, investigationem bipartitam reddet. Nomine autem corporum sphaericorum complector omnia ea, in quibus terna momenta principalia sunt aequalia, reliqua omnia non sphaerica appellans. Sphaeroidica autem corpora in genere mihi erunt ea, in quibus duo momentorum principalia sunt aequalia, quae ergo unico axe principali sunt praedita, dum bini reliqui fuerint indefiniti, atque ad hoc genus omnia corpora coelestia referenda videntur. Expedito autem binorum corporum motu, ad terna progrediamur, quousque scilicet licuerit. Si enim problema in genere resolvere nequeamus, contenti esse poterimus approximationibus inde petitis, quod prae una vi reliquae sint valde exiguae, qui casus in mundo ubique locum habere videtur. Denique quid aetheris resistentia valeat erit inquirendum, ac tandem perturbatio in motu vertiginis a momentis virium sollicitantium oriunda Astronomiae mechanicae finem imponet.

Caput II.

De motu duorum corporum sphaericorum se mutuo attrahentium.

61. **Problema.** Si duo corpora sphaerica se mutuo attrahant, definire motum alterius, qualis spectatori in alterius centro posito est appariturus, ad planum, in quo ipse motus absolvitur, relatum.

Solutio. (Fig. 176.) Sint A et B duo corpora, quae litterae simul eorum massas denotent, et observator constitutus sit in centro corporis A, quod propterea ut quiescens consideretur. Jam quia virium, quibus se mutuo attrahunt, directio per utriusque centrum transit, quomodocunque corpus B moveri coeperit, directio vis sollicitantis semper est in plano per motus directionem et centrum corporis A transeunte, ideoque corpus B in eodem plano progredi perget. Quare tabula repraesentet hoc planum, in quo centrum corporis B moveri videtur, et cum initio ex E fuerit egressum, elapso tempore t pervenerit in B, ita ut circa A confecerit angulum $EAB = \varphi$, sitque distantia $AB = v$, unde patet si ad quodvis tempus t tam angulum $EAB = \varphi$ quam distantiam $AB = v$ assignare potuerimus, motum corporis B perfecte fore cognitum. Cum igitur B trahatur ad A in directione BA vi $= \frac{AB}{vv}$, parique vi corpus A ad B in directione AB sollicitetur, haec posterior vis in corpus B translata fiet $= \frac{BB}{vv}$, idque in directione AB afficere censendum est.