bus se mutuo afficiunt, prae viribus, quibus ad solem tendunt, sint satis exiguae. Luna autem et satellites Jovis et Saturni tam vicini sunt suis principalibus, ut vires, quibus ad eos urgentur, plurimum excedant ipsam vim solis. Quare pro motu omnium horum corporum proxime determinando sufficit unicam vim considerasse, dum reliquae prae ea sint valde parvae, quarum effectus tantum in exiguis perturbationibus producendis consumuntur, quas ope methodi approximandi definire licet. Si autem vel planetae primarii sibi essent multo propiores, vel satellites a suis principalibus magis distarent, nullo fere modo ad motus eorum cognitionem pertingere possemus.

60. **Scholion 3.** Primo ergo duo tantum corpora se mutuo attrahentia contemplari conveniet, ubi quidem eorum indoles, prout fuerint sphaerica vel non sphaerica, investigationem bipartitam reddet. Nomine autem corporum sphaericorum complector omnia ea, in quibus terna momenta principalia sunt aequalia, reliqua omnia non sphaerica appellans. Sphaeroidica autem corpora in genere mihi erunt ea, in quibus duo momentorum principalia sunt aequalia, quae ergo unico axe principali sunt praedita, dum bini reliqui fuerint indefiniti, atque ad hoc genus omnia corpora coelestia referenda videntur. Expedito autem binorum corporum motu, ad terna progrediamur, quousque scilicet licuerit. Si enim problema in genere resolvere nequeamus, contenti esse poterimus approximationibus inde petitis, quod prae una vi reliquae sint valde exiguae, qui casus in mundo ubique locum habere videtur. Denique quid aetheris resistentia valeat erit inquirendum, ac tandem perturbatio in motu vertiginis a momentis virium sollicitantium oriunda Astronomiae mechanicae finem imponet.

Caput II.

De motu duorum corporum sphaericorum se mutuo attrahentium.

61. **Problema.** Si duo corpora sphaerica se mutuo attrahant, definire motum alterius, qualis spectatori in alterius centro posito est appariturus, ad planum, in quo ipse motus absolvitur, relatum.

Solutio. (Fig. 176.) Sint A et B duo corpora, quae litterae simul eorum massas denotent, et observator constitutus sit in centro corporis A, quod propterea ut quiescens consideretur. Jam quia virium, quibus se mutuo attrahunt, directio per utriusque centrum transit, quomodocunque corpus B moveri coeperit, directio vis sollicitantis semper est in plano per motus directionem et centrum corporis A transeunte, ideoque corpus B in eodem plano progredi perget. Quare tabula repraesentet hoc planum, in quo centrum corporis B moveri videtur, et cum initio ex E fuerit egressum, elapso tempore t pervenerit in B, ita ut circa A confecerit angulum $EAB = \varphi$, sitque distantia $AB = v$, unde patet si ad quodvis tempus t tam angulum $EAB = \varphi$ quam distantiam $AB = v$ assignare potuerimus, motum corporis B perfecte fore cognitum. Cum igitur B trahatur ad A in directione BA vi $= \frac{AB}{vv}$, parique vi corpus A ad B in directione AB sollicitetur, haec posterior vis in corpus B translata fiet $= \frac{BB}{vv}$, idque in directione AB afficere censendum est, jam corpus B sollicitetur omnino vi $= \frac{B(A+B)}{vv}$ in directione BA, quoniam corpus A ut quiescens consideramus. Ex B in directionem fixam AE demisso perpendiculo BX, ut sit $AX = v\cos\varphi$ et $XB = v\sin\varphi$, et secundum easdem directiones vis $BA = \frac{B(A+B)}{vv}$ resolvatur, erit vis secundum $AX = \frac{B(A+B)}{vv}\cos\varphi$, et vis secundum $BX = \frac{B(A+B)}{vv}\sin\varphi$. Hinc sumto elemento temporis dt constante, ex principiis Mechanicae elicimus has binas aequationes:

$$dd.v\cos\varphi = \frac{-2g(A+B)}{vv}dt^2\cos\varphi; \qquad dd.v\sin\varphi = \frac{-2g(A+B)}{vv}dt^2\sin\varphi,$$

ubi g est altitudo, per quam grave delabitur tempore unius minuti secundi, siquidem tempus t detur in minutis secundis; at hic formula virium per certam constantem multiplicari oporteret, cujus magnitudo ex dato casu esset definienda. Verum hanc ipsam constantem sine ulla confusione subintelligere licet. En ergo has duas aequationes solutionem problematis continentes:

$$\text{I.}\quad ddv\cos\varphi - 2dv\,d\varphi\sin\varphi - vd\varphi^2\cos\varphi - v\,dd\varphi\sin\varphi = \frac{-2g(A+B)}{vv}dt^2\cos\varphi,$$

$$\text{II.}\quad ddv\sin\varphi + 2dv\,d\varphi\cos\varphi - vd\varphi^2\sin\varphi + v\,dd\varphi\cos\varphi = \frac{-2g(A+B)}{vv}dt^2\sin\varphi,$$

unde haec combinatio $\text{II}.\cos\varphi - \text{I}.\sin\varphi$ praebet

$$2dv\,d\varphi + v\,dd\varphi = 0,$$

quae per v multiplicata dat hoc integrale

$$vv\,d\varphi = Cdt \quad \text{hincque} \quad d\varphi = \frac{Cdt}{vv}.$$

At prima aequatio per v multiplicata ita repraesentari potest:

$$v\,ddv\cos\varphi - d.vv\,d\varphi\sin\varphi = \frac{-2g(A+B)}{v}dt^2\cos\varphi,$$

ubi, ob $vv\,d\varphi = Cdt$, est $d.vv\,d\varphi\sin\varphi = Cdt\,d\varphi\cos\varphi$, ideoque

$$v\,ddv - Cdt\,d\varphi + \frac{2g(A+B)}{v}dt^2 = 0, \quad \text{seu}$$

$$v\,ddv - \frac{CCdt^2}{vv} + \frac{2g(A+B)}{v}dt^2 = 0,$$

quae multiplicata per $\frac{2dv}{v}$ praebet

$$2dv\,ddv - \frac{2CCdt^2dv}{v^3} + \frac{4g(A+B)\,dt^2}{vv} = 0,$$

cujus integrale est

$$dv^2 + \frac{CCdt^2}{vv} - \frac{4g(A+B)\,dt^2}{v} = Ddt^2,$$

unde elicitur

$$dt = \frac{v\,dv}{\sqrt{(Dvv + 4g(A+B)v - CC)}}$$

hincque

$$d\varphi = \frac{Cdv}{v\sqrt{(Dvv + 4g(A+B)v - CC)}}.$$

Cum igitur hinc per v definiantur tam t et φ, vicissim pro dato tempore t assignare licebit
variabilium v et φ.

62. **Coroll. 1.** Prima aequatio integralis $vvd\varphi = Cdt$ continet elementum areae desc
BAb, quod est $= \frac{1}{2} vvd\varphi$, unde tota area $EAB = \frac{1}{2} \int vvd\varphi$ aequalis fit $\frac{1}{2}Ct$, ideoque tempo
proportionalis.

63. **Coroll. 2.** Aequatio inter v et φ inventa

$$d\varphi = \frac{Cdv}{v\sqrt{(Dvv + 4g(A+B)v - CC)}}$$

exprimit naturam curvae EB, quam corpus B circa A describere videtur. Eam autem esse sectio
conicam mox ostendemus.

64. **Coroll. 3.** Cum $-CC$ necessario sit quantitas negativa, ex formula irrationali

$$\sqrt{(Dvv + 4g(A+B)v - CC)}$$

patet distantiam v evanescere nunquam posse, nisi sit $C = 0$, quo casu ob $d\varphi = 0$, corpus B
linea recta ad A esset accessurum.

65. **Coroll. 4.** At si non est $C = 0$, necesse est, ut distantia v semper limitem quendam
superet, qui limes, si constans D sit positiva, est

$$= \frac{\sqrt{(4gg(A+B)^2 + CCD)} - 2g(A+B)}{D}.$$

Sin autem D sit quantitas negativa $= -E$, erit limes

$$= \frac{2g(A+B) - \sqrt{(4gg(A+B)^2 - CCE)}}{E};$$

at si $D = 0$, limes iste fit $= \frac{CC}{4g(A+B)}$.

Resolutio formularum.

66. Quoniam distantia v superare debet certum limitem, si hic ponatur $= h$, erit $v - h$ facto
formulae post signum radicale $Dvv + 4g(A+B)v - CC$, et alter factor erit formae $k \pm$
D fuerit vel positivum vel negativum. Commodius autem scopum attingemus ponendo $v = \frac{f}{u}$, unde
ob $dv = \frac{-fdu}{uu}$, erit

$$dt = \frac{-ffdu}{uu\sqrt{(Dff + 4fg(A+B)u - CCuu)}}$$

$$\text{et} \quad d\varphi = \frac{-Cdu}{\sqrt{(Dff + 4fg(A+B)u - CCuu)}}.$$

Hic si ponatur $Cu = Cp + \frac{2fg(A+B)}{C}$, fit formula radicalis $= \sqrt{(Dff + \frac{4ffgg(A+B)^2}{CC} - CCpp)}$
ob $-Cdu = -Cdp$, integrale posterioris aequationis erit

$$\alpha + \varphi = \text{Arc.}\cos.\frac{CCp}{\sqrt{(CCDff + 4ffgg(A+B)^2)}}.$$

Habebimus ergo

$$p = \frac{f\cos(\alpha+\varphi)}{CC}\sqrt{(CCD + 4gg(A+B)^2)}$$

$$\text{et}\quad u = \frac{2fg(A+B)}{CC} + \frac{f\cos(\alpha+\varphi)}{CC}\sqrt{(CCD + 4gg(A+B)^2)}.$$

Quo has formulas commodiores reddamus, constantes ita definiamus, ut fiat $u = 1 + n\cos s$, eritque

$$\alpha + \varphi = s,\quad \frac{2fg(A+B)}{CC} = 1\quad \text{et}\quad \frac{f}{CC}\sqrt{(CCD + 4gg(A+B)^2)} = n.$$

Quare ob $CC = 2fg(A+B)$, sumtis quadratis habebitur

$$\frac{Df}{2g(A+B)} + 1 = nn\quad \text{et}\quad D = \frac{-2(1-nn)g(A+B)}{f},\quad \text{seu}\quad D = \frac{-(1-nn)CC}{ff}.$$

Hinc pro signo radicali obtinebimus

$$\sqrt{(-CC + nnCC + 2CCu - CCuu)} = C\sqrt{(nn - (1-u)^2)},$$

quae, ob $u - 1 = n\cos s$ abit in $Cn\sin s$, ubi meminisse oportet esse $C = \sqrt{2fg(A+B)}$. Cum ergo sit

$$v = \frac{f}{1+n\cos s}\quad \text{et}\quad d\varphi = \frac{Cn\,ds\sin s}{Cn\sin s} = ds,\ \text{erit}\ \varphi = s + \text{Const.}\quad \text{et}\quad Cdt = \frac{ffds}{(1+n\cos s)^2},$$

unde elicimus

$$\frac{Ct}{ff} = \frac{1}{1-nn}\int\frac{ds}{1+n\cos s} - \frac{n\sin s}{(1-nn)(1+n\cos s)}.$$

Jam vero si $n < 1$ est

$$\int\frac{ds}{1+n\cos s} = \frac{1}{\sqrt{(1-nn)}}\text{Arc.}\cos\frac{n+\cos s}{1+n\cos s};$$

sin autem $n > 1$ erit

$$\int\frac{ds}{1+n\cos s} = \frac{1}{\sqrt{(nn-1)}}\log\frac{n+\cos s+\sin s\sqrt{(nn-1)}}{1+n\cos s}.$$

Casu autem quo $n = 1$ reperitur

$$\frac{Ct}{ff} = \int\frac{ds}{(1+\cos s)^2} = \frac{(2+\cos s)\sin s}{3(1+\cos s)^2}.$$

In hac ergo resolutione loco binarum constantium C et D aliae duae f et n introducuntur, et omnia per novam variabilem, angulum scilicet s, ita definiuntur ut sit

$$\text{I.}\ \varphi = s + \text{Const.}\quad \text{II.}\ v = \frac{f}{1+n\cos s}\quad \text{et}\quad dt\sqrt{2fg(A+B)} = \frac{ffds}{(1+n\cos s)^2},\quad \text{sive}$$

$$\text{III.}\ t = \frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{2g(A+B)}}\int\frac{ds}{(1+n\cos s)^2},$$

cujus solutionis usum et applicationem mox diligentius evolvemus.

67. **Scholion 1.** Binae aequationes differentio-differentiales in alias transformari possunt ut anguli φ sinus et cosinus elidantur. Uti enim $\mathrm{II}.\cos\varphi - \mathrm{I}.\sin\varphi$ praebet $2dv\,d\varphi + v\,dd\varphi = 0$, $\mathrm{I}.\cos\varphi + \mathrm{II}.\sin\varphi$ suppeditat hanc aequationem

$$ddv - v\,d\varphi^2 = \frac{-2g(A+B)}{vv}\,dt^2,$$

quarum illa per v multiplicata et integrata statim praebet, ut vidimus, $vv\,d\varphi = C\,dt$, qua aequabilis arearum descriptio continetur. Deinde posterior per $2dv$, prior vero per $2v\,d\varphi$ multiplicata in summa praebent

$$2dv\,ddv + 2v\,dv\,d\varphi^2 + 2vv\,d\varphi\,dd\varphi = \frac{-4g(A+B)\,dv}{vv}\,dt^2,$$

quae integrata dat:

$$dv^2 + vv\,d\varphi^2 = D\,dt^2 + \frac{4g(A+B)}{v}\,dt^2,$$

ubi $\sqrt{(dv^2 + vv\,d\varphi^2)}$ exprimit elementum spatii Bb tempusculo dt descripti, inde autem $vv\,d\varphi^2 = \frac{CC\,dt^2}{vv}$ altera aequatio integralis ante inventa elicitur. Juvabit autem has aequationes pluribus modis tractare, ut deinceps, cum hujusmodi aequationes magis complicatae occurrent, subsidia inde peti queant. Licet etiam has duas aequationes

$$2dv\,d\varphi + v\,dd\varphi = 0 \quad \text{et} \quad ddv - v\,d\varphi^2 + \frac{2g(A+B)}{vv}\,dt^2 = 0$$

hoc modo resolvere: Multiplicetur prior per $2v^3\,d\varphi$, ut habeatur $4v^3\,dv\,d\varphi^2 + 2v^4\,d\varphi\,dd\varphi = 0$, cujus integrale est $v^4\,d\varphi^2 = EE\,dt^2$, unde valor pro dt^2 in altera aequatione substitutus praebet

$$ddv - v\,d\varphi^2 + \frac{2g(A+B)\,vv\,d\varphi^2}{EE} = 0.$$

Cum autem hic adhuc sit dt constans assumtum, ut ejus loco $d\varphi$ tanquam constans introducatur, multiplicetur per $2dv$, ut habeatur

$$2dv\,ddv - 2v\,dv\,d\varphi^2 + \frac{4g(A+B)\,vv\,dv}{EE}\,d\varphi^2 = 0$$

et loco $2dv\,ddv$ scribatur

$$dt^2 d\cdot\frac{dv^2}{dt^2} = \frac{v^4\,d\varphi^2}{EE}\,d\cdot\frac{EE\,dv^2}{v^4\,d\varphi^2} = v^4\,d\cdot\frac{dv^2}{v^4}$$

et nunc elementum $d\varphi$ est constans. Statuatur porro $v = \frac{f}{u}$, erit $\frac{dv}{vv} = \frac{-du}{f}$ et $v\,dv =$ sicque prodibit

$$\frac{f^4}{u^4}\,d\cdot\frac{du^2}{ff} + \frac{2ff\,du\,d\varphi^2}{u^3} - \frac{4g(A+B)\,f^3\,du}{EE\,u^4}\,d\varphi^2 = 0,$$

seu
$$\frac{2du\,ddu}{u^4} + \frac{2du\,d\varphi^2}{u^3} - \frac{4fg(A+B)\,du}{EE\,u^4}\,d\varphi^2 = 0,$$

vel
$$2du\,ddu + 2u\,du\,d\varphi^2 - \frac{4fg(A+B)\,du}{EE}\,d\varphi^2 = 0,$$

cujus integrale est

$$du^2 + uu\,d\varphi^2 - \frac{4fg\,(A+B)\,u\,d\varphi^2}{EE} = \frac{D\,d\varphi^2}{EE}.$$

unde colligitur

$$d\varphi = \frac{E\,du}{\sqrt{(D + 4fg\,(A+B)\,u - EEuu)}},$$

quae formula cum ante inventa congruit.

68. **Scholion 2.** Integralia formulae $\frac{ds}{(1+n\cos s)^2}$, quae prout fuerit $n<1$, vel $n>1$, vel $n=1$ exhibuimus, per se sunt manifesta, uti ex differentiatione patet. Est ergo casu $n<1$,

$$\int\frac{ds}{(1+n\cos s)^2} = \frac{1}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{Arc.cos}\,\frac{n+\cos s}{1+n\cos s} - \frac{n\sin s}{(1-nn)(1+n\cos s)};$$

sin autem sit $n>1$, erit

$$\int\frac{ds}{(1+n\cos s)^2} = \frac{n\sin s}{(nn-1)(1+n\cos s)} - \frac{1}{(nn-1)^{\frac{3}{2}}}\log\cdot\frac{n+\cos s+\sin s\sqrt{(nn-1)}}{1+n\cos s},$$

quarum formularum utraque casu $n=1$ fit inepta; hoc autem casu $n=1$ habetur

$$\int\frac{ds}{(1+\cos s)^2} = \frac{(2+\cos s)\sin s}{3(1+\cos s)^2},$$

ubi praecipue notari meretur, quod in integrali eadem denominatoris potestas occurrit, atque in differentiali, cum alias sit unitate inferior. Simili modo est

$$\int\frac{ds}{1+\cos s} = \frac{\sin s}{1+\cos s}$$

atque adeo in genere formula $\int\frac{ds}{(1+\cos s)^n}$ integrari potest, cum sit

$$\int\frac{ds}{(1+\cos s)^n} = \frac{n-1}{2n-1}\int\frac{ds}{(1+\cos s)^{n-1}} + \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{\sin s}{(1+\cos s)^n},$$

unde sequentia integralia deducuntur

$$\int\frac{ds}{1+\cos s} = \frac{\sin s}{1+\cos s},$$

$$\int\frac{ds}{(1+\cos s)^2} = \frac{\sin s\,(2+\cos s)}{3\,(1+\cos s)^2},$$

$$\int\frac{ds}{(1+\cos s)^3} = \frac{\sin s\,(7+6\cos s+2\cos^2 s)}{3.5\,(1+\cos s)^3},$$

$$\int\frac{ds}{(1+\cos s)^4} = \frac{\sin s\,(36+39\cos s+24\cos^2 s+6\cos^3 s)}{3.5.7\,(1+\cos s)^4},$$

$$\int\frac{ds}{(1+\cos s)^5} = \frac{\sin s\,(249+300\cos s+252\cos^2 s+120\cos^3 s+24\cos^4 s)}{3.5.7.9\,(1+\cos s)^5},$$

etc.

quae evanescunt posito $s=0$; ubi notandum si post integrationem ponatur $s=90^\circ$, fore

$$\int\frac{ds}{(1+\cos s)^n} = \frac{1}{2n-1} + \frac{n-1}{(2n-1)(2n-3)} + \frac{(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)(2n-7)}\ \text{etc.},$$

quae series ad hanc progressionem infinitam reducitur

$$\frac{\sqrt{2}}{2n-1}+\frac{1.\sqrt{2}}{4(2n-3)}+\frac{1.3\sqrt{2}}{4.8(2n-5)}+\frac{1.3.5\sqrt{2}}{4.8.12(2n-7)}+\text{etc.}$$

Verum ad propositum revertentes, videamus hujusmodi curvam corpus B sit descripturum, et qua lege per eam sit progressurum, ita ut ad datum quodvis tempus locus corporis assignari possit, quod fit cum distantiam $AB=v$, tum angulum $EAB=\varphi$ pro tempore t definiendo.

69. **Problema.** Definire (fig. 176) naturam curvae EB, quam corpus B motu suo ... spectato describit.

Solutio. Hic nullo respectu ad tempus habito, tantum ad relationem inter distantiam AB ... et angulum $EAB=\varphi$ est spectandum, quae per angulum s ita definiuntur, ut sit $\varphi=s+\alpha$ ... $v=\frac{f}{1+n\cos s}$. Statuantur coordinatae $AX=x$, $BX=y$, erit $vv=xx+yy$ et $x=v\cos\varphi$, $y=v\sin\varphi$, seu $\cos\varphi=\frac{x}{v}$; $\sin\varphi=\frac{y}{v}$. Cum ergo sit $s=\varphi-\alpha$, erit $\cos s=\frac{x\cos\alpha+y\sin\alpha}{v}$, unde fit $v+nx\cos\alpha+ny\sin\alpha=f$, ideoque

$$vv=xx+yy=(f-nx\cos\alpha-ny\sin\alpha)^2,$$

unde patet curvam esse sectionem conicam, cujus natura et positio ex aequatione $v=\frac{f}{1+n\cos(\varphi-\alpha)}$ facilius intelligitur. Ac primo quidem liquet, si sit $n=0$, ob $v=f$, curvam fore circulum centro A et radio $=f$ descriptum. Deinde si n sit numerus quicunque positivus, angulus $\varphi=\alpha$ dat minimam distantiam curvae a puncto A, quae est $=\frac{f}{1+n}$, ubi est $dv=0$ ob $dv=\frac{nfd\varphi\sin(\varphi-\alpha)}{(1+n\cos(\varphi-\alpha))^2}$. Simili modo sumendo $\varphi-\alpha=180^0$, prodit alter locus, ubi recta AB ad curvam est normalis, estque tum $v=\frac{f}{1-n}$, unde patet si sit $n<1$, curvam fore ellipsin; si $n=1$, parabolam; at si $n>1$, hyperbolam. Tum vero quia distantia $AB=v$ per coordinatas rationaliter exprimitur, punctum A in altero foco sectionis conicae est situm, cujus bini habentur vertices, quorum alterius a foco A distantia est $=\frac{f}{1+n}$, alterius $=\frac{f}{1-n}$, ita ut totus axis transversus sit $=\frac{2f}{1-nn}$, ideoque ejus semissis $=\frac{f}{1-nn}$, unde focus a centro sectionis distat intervallo $=\frac{nf}{1-nn}$; semiaxis ergo conjugatus erit $=\frac{f}{\sqrt{(1-nn)}}$, ideoque semiparameter $=f$. Axis denique transversus ad rectam fixam AE inclinatur angulo $=\alpha$, seu sumto $EAB=\alpha$, is in rectam AB cadet.

70. **Coroll. 1.** Curva ergo a corpore B circa A descripta semper est sectio conica, et cum sumto angulo $\varphi=\alpha$, corpus B transeat per verticem foco A propiorem, post singulas revolutiones completas, ubi $\varphi=\alpha+360^0$, $\varphi=\alpha+2.360^0$ etc. eodem revertitur, ita ut orbita haec quiescens sit censenda.

71. **Coroll. 2.** Cum valor numeri n speciem sectionis conicae ita determinet, ut $n=0$ det circulum, $n<1$ ellipsin, $n=1$ parabolam, et $n>1$ hyperbolam, idem intelligendum est, si n sit numerus negativus. In genere enim idem numerus n, sive sit positivus, sive negativus, eandem speciem declarat, quia scribendo $s+180^0$ loco s alter casus ad alterum reducitur.

72. **Scholion.** Praeter denominationes hic adhibitas notandae sunt sequentes ab Astronomis receptae:

I. Axis transversus sectionis conicae vocatur etiam *linea absidum*, ejusque terminus alter foco propior absis *ima*, alter remotior absis *summa*.

II. Distantia foci A a centro sectionis conicae per semiaxem transversum divisa, seu binorum focorum distantia per axem transversum ipsum divisa, vocatur *excentricitas* orbitae, quae ergo nostro casu numero n exprimitur.

III. Angulus ad focum A, quem recta AB cum linea absidum facit, vocari solet *anomalia vera*; vulgo quidem hic angulus ad absidem summam refertur. Nihil autem impedit, quominus ad absidem imam referamus, quandoquidem corpus B, si orbita fuerit vel parabola vel hyperbola, nunquam ad absidem summam pervenit, semper autem per imam transit. (Fig. 177) Ita si C sit absis ima, corpusque ex C ad B pervenerit, angulum CAB vocabo anomaliam veram, quam ergo in calculo nostro littera s denotat.

IV. Angulus autem EAB a recta quadam fixa AE computatus vocari solet *longitudo*, quae hic nobis littera φ exprimitur. Simili modo angulus EAC est longitudo absidis imae C, unde patet longitudinem φ inveniri, si ad anomaliam veram s longitudo absidis imae EAC addatur.

His praemissis ipsam motus rationem, prout orbita fuerit vel circulus, vel ellipsis, vel parabola, vel hyperbola, investigemus.

73. **Problema.** Si orbita, in qua corpus B circa A revolvi videtur, fuerit circulus, definire rationem motus.

Solutio. Erit ergo excentricitas $n=0$, et radius circuli simulque perpetua distantia $AB=v=f$, unde si ponatur tempus, quo angulus $EAB=\varphi$ percurritur, $=t$, ob $ds=d\varphi$, habebitur $t=\frac{f\varphi\sqrt{f}}{\sqrt{2g(A+B)}}$; unde cum tempus sit ipsi angulo φ, ideoque et arcui $EB=f\varphi$ proportionale, motus erit uniformis, ejusque celeritas $=\frac{f\varphi}{t}=\sqrt{\frac{2g(A+B)}{f}}$, quae propterea est directe ut $\sqrt{(A+B)}$ et reciproce ut $\sqrt{f}$. Ac si tempus, quo totus circulus percurritur, quodque tempus *periodicum* vocatur, ponatur $=T$, ob $\varphi=2\pi$, erit

$$T=\frac{2\pi f\sqrt{f}}{\sqrt{2g(A+B)}}=\frac{2\pi}{\sqrt{2g}}\cdot\frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{(A+B)}}.$$

Ergo ob $\frac{2\pi}{\sqrt{2g}}$ quantitatem constantem, tempus periodicum est directe in ratione sesquiplicata radii circuli f et reciproce in ratione subduplicata summae massarum $A+B$ utriusque corporis. Tempore ergo periodico cognito T, ob $\frac{t}{T}=\frac{\varphi}{2\pi}$, quovis tempore t percurritur arcus φ, ut sit $\varphi=\frac{2\pi t}{T}$, unde ad quodvis tempus t locus corporis B, ejus scilicet longitudo EAB facile colligitur. Pro mensura autem temporis absoluta definienda, consideretur ea corporum A et B distantia, in qua vis eorum attractrix aequalis est gravitati, quae distantia sit $=d$, eritque $\frac{A+B}{dd}=1$, seu $A+B=dd$; ubique ergo summa massarum $A+B$ per ejusmodi constantem multiplicari est censenda, ut fiat productum dd. Hinc ergo tempus t in minutis secundis exprimendo fiet $t=\frac{f\varphi\sqrt{f}}{d\sqrt{2g}}$, ideoque totum tempus periodicum $T=\frac{2\pi f\sqrt{f}}{d\sqrt{2g}}$ min. sec.

*

74. **Coroll. 1.** Ex dato ergo tempore periodico T pro quovis tempore dato t angulus ab ea descriptus φ per hanc analogiam facile definitur $T:t = 360^0:\varphi$; unde pro diebus, horis, minutis et secundis motus angularis φ assignatur.

75. **Coroll. 2.** Ex tempore etiam periodico T et radio circuli descripti f, determinatur distantia corporum d, in qua eorum vis attractrix, qua B ad A urgetur, aequalis est ponderi corporis B, cum sit $d = \frac{2\pi f\sqrt{f}}{T\sqrt{2g}}$, ubi perpetuo est tenendum, tempora in minutis secundis exprimi oportere.

76. **Coroll. 3.** Si idem corpus B modo in majori modo in minori distantia circa corpus A in circulo revolvatur, erunt tempora periodica in ratione sesquiplicata radiorum, seu quadrata temporum periodicorum erunt ut cubi radiorum.

77. **Problema.** Si orbita, in qua corpus B ex A spectatum moveri videtur, fuerit ellipsis, rationem motus definire.

Solutio. Erit ergo numerus n, quo excentricitas exprimitur, unitate minor, ac si ponatur semiparameter $= f$, anomalia vera seu angulus $CAB = s$, erit absidis imae C distantia $AC = \frac{f}{1+n}$, semiaxis transversus $= \frac{f}{1-nn}$, et semiaxis conjugatus $= \frac{f}{\sqrt{(1-nn)}}$. Statuatur autem longitudo absidis imae C seu angulus $EAC = \alpha$, a directione fixa AE computata, a qua corpus B egressum elapso tempore $= t$ pervenerit in B, ut sit longitudo ejus $EAB = \varphi$, erit $\varphi = \alpha + s$, ac habebimus has aequationes: Posita distantia $AB = v$:

$$v = \frac{f}{1+n\cos s} \quad \text{et} \quad t = \frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{2g(A+B)}}\left(\frac{1}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}}\,\text{Arc.}\cos\frac{n+\cos s}{1+n\cos s} - \frac{n\sin s}{(1-nn)(1+n\cos s)}\right),$$

quae formula proprie indicat tempus, quo corpus ab abside ima C in B usque pervenit, anomaliamque veram $CAB = s$ absolvit, quod tempus primo definiri convenit, cum deinceps ex eo tempus pro angulo $EAB = \varphi$ haud difficulter concludatur. Cum igitur posito $s = 0$ fiat $t = 0$, statuamus $s = 180^0$, erit tempus ab abside ima ad summam

$$= \frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{2g(A+B)}} \cdot \frac{\pi}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}},$$

cui iterum aequale fit tempus a summa ad imam, ita ut totum tempus periodicum, quod ponatur $= T$, futurum sit

$$= \frac{2\pi f\sqrt{f}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2g(A+B)}},$$

quo tempore integra revolutio seu anomalia vera $= 360^0$ absolvitur. Hinc si motus angularis esset aequabilis tempore t, conficeretur angulus $= \tau$, ut sit

$$\frac{2\pi f\sqrt{f}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2g(A+B)}} : t = 360^0:\tau, \quad \text{seu} \quad t = \frac{\tau f\sqrt{f}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2g(A+B)}};$$

ideoque ex cognito tempore periodico T, si motus esset aequabilis ad quodvis tempus elapsum quam corpus absidem imam C fuerit transgressum, angulus interea confectus $\tau = \frac{360\,t}{T}$ assignari potest, quem ergo loco temporis t in calculum introducamus et inquiramus, quantum angulus interea confectus, seu anomalia vera $CAB = s$ ab eo discrepet. Pro t autem illo valore substituto habebimus

$$\frac{\tau f \sqrt{f}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2g\,(A+B)}} = \frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{2g\,(A+B)}} \left(\frac{1}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}} \text{Arc.}\cos\frac{n+\cos s}{1+n\cos s} - \frac{n\sin s}{(1-nn)\,(1+n\cos s)} \right),$$

seu

$$\tau = \text{Arc.}\cos\frac{n+\cos s}{1+n\cos s} - \frac{n\sin s\sqrt{(1-nn)}}{1+n\cos s}.$$

Ponatur $\text{Arc.}\cos\frac{n+\cos s}{1+n\cos s} = \sigma$, erit

$$\frac{n+\cos s}{1+n\cos s} = \cos\sigma \quad \text{et} \quad \sin\sigma = \frac{\sin s\sqrt{(1-nn)}}{1+n\cos s}, \quad \text{hincque}$$

$$\cos s = \frac{\cos\sigma - n}{1-n\cos\sigma} \quad \text{et} \quad \sin s = \frac{\sin\sigma\sqrt{(1-nn)}}{1-n\cos\sigma} \quad \text{atque} \quad \tau = \sigma - n\sin\sigma,$$

unde pro quovis angulo τ tempori t proportionali haud difficulter colligitur angulus σ, hincque porro anomalia vera s, cui si addatur longitudo absidis imae $EAC = \alpha$, obtinebitur longitudo quaesita seu angulus $EAB = \varphi$; distantia autem $AB = \varrho$ ope formulae $\varrho = \frac{f}{1+n\cos s}$ facillime assignatur.

78. **Coroll. 1.** Cum tempus periodicum sit

$$T = \frac{2\pi f\sqrt{f}}{(1-nn)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2g\,(A+B)}}$$

semiaxis autem transversus orbitae $= \frac{f}{1-nn}$, qui si dicatur $= a$, erit tempus periodicum $T = \frac{2\pi a\sqrt{a}}{\sqrt{2g(A+B)}}$, quod ergo est directe in ratione sesquiplicata axis transversi, et reciproce in subduplicata summae massarum.

79. **Coroll. 2.** Simili modo si loco semiparametri f introducatur semiaxis transversus $a = \frac{f}{1-nn}$, habebitur pro tempore quocunque t

$$t = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2g\,(A+B)}} \left(\text{Arc.}\cos\frac{n+\cos s}{1+n\cos s} - \frac{n\sin s\sqrt{(1-nn)}}{1+n\cos s} \right),$$

$$\text{seu} \quad t = \frac{T}{2\pi}(\sigma - n\sin\sigma) \quad \text{posito} \quad \sigma = \text{Arc.}\cos\frac{n+\cos s}{1+n\cos s}.$$

80. **Coroll. 3.** Cognito ergo tempore periodico T et momento, quo corpus per absidem imam transiit, pro tempore inde elapso $= t$, quaeratur primo angulus $\tau = \frac{t}{T} \cdot 360^0$, hincque porro angulo σ, ut sit $\tau = \sigma - n\sin\sigma$, quo invento pro anomalia vera s habebitur

$$\cos s = \frac{\cos\sigma - n}{1-n\cos\sigma} \quad \text{seu} \quad \sin s = \frac{\sin\sigma\sqrt{(1-nn)}}{1-n\cos\sigma},$$

ac denique longitudo $\varphi = \alpha + s$.

81. **Scholion 1.** Hic iterum novae appellationes in Astronomia occurrunt quas probe notari convenit.

I. Angulus ille tempori proportionalis τ, qui pro revolutione integra abit in 360^0, voca *anomalia media*, quae ergo est angulus, quem corpus ab abside ima digressum, si aequabiliter punctum A eodem tempore periodico revolveretur, dato tempore esset confecturum.

II. Differentia inter anomaliam mediam τ et veram s vocari solet *aequatio centri*, vel *prostaphaeresis*, quae igitur est nulla casibus $\tau = 0$, $\tau = 180^0$, $\tau = 360^0$ etc., hoc est quo anomalia media in lineam absidum incidit.

III. Angulus ille subsidiarius σ, cujus relatio tam ad anomaliam mediam τ quam ad veram est assignata, vocari solet *anomalia excentrica*. Ex qua etiam distantia $AB = \varrho$ expedite defini Cum enim sit $1 + n\cos s = \frac{1-nn}{1-n\cos\sigma}$ et $\frac{f}{1-nn} = a$, erit $\varrho = \frac{f}{1+n\cos s} = a(1 - n\cos\sigma)$, ideoque distantia absidis imae a puncto $A = a(1-n)$, et summae $= a(1+n)$.

82. **Scholion 2.** Haec relatio inter anomalias veram, mediam et excentricam, quam per cal culum eruimus, ita geometrice doceri potest. Sit (fig. 178) AVB semiellipsis super axe transverso AB' descripta, cujus centrum in C et focus in F, positoque semiaxe $CA = a$ et excentricitate $= n$ erit $CF = na$; tum super eodem axe constituatur semicirculus ANB. Sumta jam in ellipsi anoma vera seu angulo $AFV = s$, ei respondeat in circulo anomalia media seu angulus $ACM = \tau$; atque necesse est, ut sector circuli ACM sit ad aream semicirculi, ut sector ellipticus AFV ad aream semi ellipsis. Per V ducatur ad axem AB perpendicularis PVN circulum secans in N, ductaque recta FN est area elliptica AFV ad aream circularem AFN, ut semiellipsis area ad aream semicirculi, ex quo sectorem circularem ACM aequalem esse oportet areae circulari AFN. Unde notata rectarum FN et CM intersectione O, trilineum mixtilineum MON aequale esse debet triangulo rectilineo COF. Addatur utrinque triangulum CON ducto radio CN, ut fiat sector CMN aequalis triangulo CFN. Nunc primo patet angulum ACN esse anomaliam excentricam σ, nam hinc fit

$$PN = a\sin\sigma \quad \text{et} \quad PV = a\sin\sigma\sqrt{(1-nn)},$$

tum vero est $CP = a\cos\sigma$ et $FP = a(\cos\sigma - n)$, hincque $FV = a(1 - n\cos\sigma)$; unde fit ut invenimus

$$\cos s = \frac{\cos\sigma - n}{1 - n\cos\sigma}, \quad \text{seu} \quad \sin s = \frac{\sin\sigma\sqrt{(1-nn)}}{1-n\cos\sigma}.$$

Porro ob angulum $MCN = \sigma - \tau$, erit sector $MCN = \frac{1}{2}aa(\sigma - \tau)$, area vero trianguli $CFN = \frac{1}{2}naa\sin\sigma$ quibus valoribus aequatis fit $\sigma - \tau = n\sin\sigma$ seu $\tau = \sigma - n\sin\sigma$, quae aequalitas cum supra inventa congruit.

83. **Problema.** Data excentricitate orbitae ellipticae et anomalia media, invenire anomaliam excentricam, indeque anomaliam veram et aequationem centri seu prostaphaeresin.

Solutio. Posita excentricitate $= n$, et anomalia media $= \tau$, inde primo definiatur anomalia excentrica σ ope aequationis $\tau = \sigma - n\sin\sigma$, quod commodissime per approximationem praestatur. Ponamus enim pro σ valorem jam prope verum esse inventum, qui sit $= \lambda$, et praebeat $\lambda - n\sin\lambda = \tau + \delta$, ut error sit valde parvus δ, ac statuamus $\sigma = \lambda + \omega$, unde ob ω valde parvum, erit $\sin\sigma = \sin\lambda + \omega\cos\lambda$

ideoque $\tau = \lambda + \omega - n \sin \lambda - n\omega \cos \lambda = \tau + \delta + \omega - n\omega \cos \lambda$. Erit ergo $\omega = \frac{-\delta}{1 - n \cos \lambda}$, ac propterea $\sigma = \lambda - \frac{\delta}{1 - n \cos \lambda}$. Si valor λ non ita prope ad verum accedat, ut haec approximatio sufficiat, hinc saltem multo propior colligitur, qui loco λ positus multo exactius ad veritatem perducet. Ceterum si anomaliae mediae τ convenire reperta fuerit anomalia excentrica σ, anomaliae mediae tantillum majori $\tau + d\tau$ conveniet anomalia excentrica $\sigma + d\sigma$, ut sit $d\tau = d\sigma - nd\sigma \cos \sigma$, ideoque $d\sigma = \frac{d\tau}{1 - n \cos \sigma}$, unde facile ad singulos gradus anomaliae mediae τ assignabitur anomalia excentrica σ. Inventa autem anomalia excentrica σ, anomalia vera s definiri debet ex hac formula

$$\cos s = \frac{\cos \sigma - n}{1 - n \cos \sigma} \quad \text{seu} \quad \sin s = \frac{\sin \sigma \sqrt{(1 - nn)}}{1 - n \cos \sigma},$$

quae ut per logarithmos expediri posset, quaeratur primo angulus ω, ut sit $\operatorname{tang} \omega = \frac{\operatorname{tang} \sigma}{\sqrt{(1 - nn)}}$, quo invento erit $\sin (s - \omega) = n \sin \omega$; seu quaeratur angulus ψ, ut sit $\sin \psi = n \sin \omega$, habebiturque $s = \omega + \psi$. Cum enim inde fiat $\sin s \cos \omega - \cos s \sin \omega = n \sin \omega$, erit

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{\sin s}{n + \cos s} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} \sigma = \frac{\sin s \sqrt{(1 - nn)}}{n + \cos s},$$

quae convenit cum formulis supra datis. Hinc denique erit aequatio centri $= s - \tau$ ad anomaliam mediam addenda, ut prodeat anomalia vera.

Ceterum notasse juvabit esse per formulas differentiales $ds = \frac{d\sigma \sqrt{(1 - nn)}}{1 - n \cos \sigma}$ et $d\sigma = \frac{ds \sqrt{(1 - nn)}}{1 + n \cos s}$. Quare cum sit $d\tau = d\sigma \, (1 - n \cos \sigma)$, erit

$$d\tau \, ds = d\sigma^2 \sqrt{(1 - nn)} = \frac{ds^2 (1 - nn)^{\frac{3}{2}}}{(1 + n \cos s)^2}, \quad \text{ideoque} \quad d\tau = \frac{ds \, (1 - nn)^{\frac{3}{2}}}{(1 + n \cos s)^2}.$$

Unde si aequatio centri $s - \tau$ dicatur $= \varepsilon$, erit

$$d\varepsilon = ds - \frac{ds \, (1 - nn)^{\frac{3}{2}}}{(1 + n \cos s)^2}.$$

84. **Coroll. 1.** Si anomalia media τ evanescit, etiam fit anomalia excentrica $\sigma = 0$, unde quoque anomalia vera s et aequatio centri evanescit. Simili modo si anomalia media τ ponatur $= 180^0$, erit etiam $\sigma = 180^0$ et $s = 180^0$, ita ut etiam hoc casu aequatio centri evanescat.

85. **Coroll. 2.** Si anomalia media τ fuerit valde parva, erit etiam excentrica σ valde parva et $\sigma = \frac{\tau}{1 - n}$, ob $\sin \sigma = \sigma$, hincque

$$ds = \frac{d\sigma \sqrt{(1 - nn)}}{1 - n} = \frac{d\tau \sqrt{(1 - nn)}}{(1 - n)^2}, \quad \text{unde} \quad s = \frac{\tau \sqrt{(1 + n)}}{(1 - n) \sqrt{(1 - n)}}$$

et aequatio centri $s - \tau = \tau \left(-1 + \frac{\sqrt{(1 + n)}}{(1 - n) \sqrt{(1 - n)}} \right)$, ideoque $s > \tau$.

86. **Coroll. 3.** Crescente anomalia media τ aequatio centri $s - \tau$ tamdiu crescit, quoad fiat

$$1 - \frac{(1 - nn)^{\frac{3}{2}}}{(1 + n \cos s)^2} = 0,$$

quo casu est maxima; tum iterum decrescit, donec posito $\tau = 180^0$ plane evanescat.

87. **Coroll. 4.** Aequatio centri ergo $s - \tau$ maxima evadit si

$$1 + n \cos s = (1 - nn)^{\frac{3}{4}} \quad \text{et} \quad \cos s = \frac{(1-nn)^{\frac{3}{4}} - 1}{n},$$

unde fit

$$\cos \sigma = \frac{1-(1-nn)^{\frac{1}{4}}}{n} \quad \text{et} \quad \tau = \sigma - n \sin \sigma,$$

quae erit anomalia media, cui maxima aequatio centri convenit. Pro ea ergo erit $s > 90^0$, $\sigma < 90$ multoque magis $\tau < 90$.

88. **Coroll. 5.** Sumta anomalia media τ negativa, fiunt quoque anomaliae σ et s negativae ejusdem valoris, unde binis anomaliis mediis τ et $360^0 - \tau$ par respondet aequatio centri, quae autem priori casu est addenda, posteriori subtrahenda.

89. **Scholion.** Dum ergo corpus ab abside ima ad summam progreditur, aequatio centri est positiva, seu anomaliae mediae addenda, et quidem ab ima usque ad certum terminum continuo crescit, unde ad absidem summam usque iterum decrescit, ubi evanescit. Tum vero ab abside summa ad imam progrediendo per pares aequationes anomalia media est minuenda, unde sufficit aequationes centri nosse pro transitu ab abside ima ad summam. Si enim anomaliae mediae τ conveniat aequatio centri ε, anomaliae mediae $360^0 - \tau$ conveniet aequatio centri $-\varepsilon$. Modus autem hic expositus ex data anomalia media computandi anomaliam veram commodior reddi potest, si excentricitas fuerit valde parva, id quod plerumque usu venit, unde hunc casum seorsim evolvisse juvabit.

90. **Problema.** Si excentricitas n fuerit valde parva, pro data anomalia media definire aequationem centri et anomaliam veram.

Solutio. Primo ex anomalia media τ colligitur anomalia excentrica σ ope aequationis $\tau = \sigma - n \sin \sigma$, unde erit

$$\sigma = \tau + n \sin (\tau + n \sin (\tau + n \sin (\tau + n \sin (\tau + \text{etc.},$$

vel etiam ope hujus formulae

$$\sigma = \tau + (n - \tfrac{1}{8} n^3) \sin \tau + (\tfrac{1}{2} nn - \tfrac{1}{6} n^4) \sin 2\tau + \tfrac{3}{8} n^3 \sin 3\tau + \tfrac{1}{3} n^4 \sin 4\tau,$$

ubi potestates ipsius n quarta altiores sunt neglectae. Inventa autem anomalia excentrica σ, anomalia vera s definitur hac aequatione $ds = \frac{d\sigma \sqrt{(1-nn)}}{1 - n \cos \sigma}$, unde fit

$$ds = d\sigma\,(1 + n \cos \sigma + n^2 \cos^2 \sigma + n^3 \cos^3 \sigma + n^4 \cos^4 \sigma + n^5 \cos^5 \sigma + \text{etc.}) \sqrt{(1 - nn)}.$$

Cum igitur sit

$$\cos \sigma = \cos \sigma$$

$$\cos^2 \sigma = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cos 2\sigma$$

$$\cos^3 \sigma = \tfrac{3}{4} \cos \sigma + \tfrac{1}{4} \cos 3\sigma$$

$$\cos^4 \sigma = \tfrac{3}{8} + \tfrac{4}{8} \cos 2\sigma + \tfrac{1}{8} \cos 4\sigma$$

$$\cos^5 \sigma = \tfrac{10}{16} \cos \sigma + \tfrac{5}{16} \cos 3\sigma + \tfrac{1}{16} \cos 5\sigma$$

etc.

... colligendis his terminis:

$$ds = (1 - nn)^{\frac{1}{2}} d\sigma \left\{ \begin{array}{l} + (1 + \frac{1}{2} nn + \frac{3}{8} n^4 + \text{etc.}) \\ + (n + \frac{3}{4} n^3 + \frac{10}{16} n^5 + \text{etc.}) \cos \sigma \\ + (\frac{1}{2} nn + \frac{4}{8} n^4 + \text{etc.}) \cos 2\sigma \\ + (\frac{1}{4} n^3 + \frac{5}{16} n^5 + \text{etc.}) \cos 3\sigma \\ + (\frac{1}{8} n^4 + \text{etc.}) \cos 4\sigma \\ + \text{etc.} \end{array} \right.$$

Est vero

$$1 + \frac{1}{2} nn + \frac{3}{8} n^4 + \text{etc.} = (1 - nn)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{et} \quad n + \frac{3}{4} n^3 + \frac{10}{16} n^5 + \text{etc.} = \frac{2}{n} \left((1 - nn)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right),$$

ita ut pro primis duobus terminis habeatur

$$ds = d\sigma \left(1 + \frac{2}{n} (1 - \sqrt{(1 - nn)}) \cos \sigma \right), \quad \text{ideoque} \quad s = \sigma + \frac{2}{n} (1 - \sqrt{(1 - nn)}) \sin \sigma.$$

Quo autem hanc seriem ulterius continuare queamus, ponamus

$$ds = d\sigma (1 + A \cos \sigma + B \cos 2\sigma + C \cos 3\sigma + D \cos 4\sigma + E \cos 5\sigma + \text{etc.})$$

et cum sit $\frac{ds}{d\sigma} - \frac{n ds}{d\sigma} \cos \sigma = \sqrt{(1 - nn)}$, ob $\cos \sigma \cos \nu\sigma = \frac{1}{2} \cos (\nu - 1) \sigma + \frac{1}{2} \cos (\nu + 1) \sigma$ fiet

$$\left. \begin{array}{llllll} 1 & + A \cos \sigma & + B \cos 2\sigma & + C \cos 3\sigma & + D \cos 4\sigma & + E \cos 5\sigma + \text{etc.} \\ - \frac{1}{2} nA & - n & - \frac{1}{2} nA & - \frac{1}{2} nB & - \frac{1}{2} nC & - \frac{1}{2} nD \\ & - \frac{1}{2} nB & - \frac{1}{2} nC & - \frac{1}{2} nD & - \frac{1}{2} nE & - \frac{1}{2} nF \end{array} \right\} = \sqrt{(1 - nn)}$$

unde coefficientes sequenti modo determinantur

$$A = \frac{2}{n} (1 - \sqrt{(1 - nn)}) \quad \text{seu} \quad A = 2 \left(\frac{1 - \sqrt{(1 - nn)}}{n} \right),$$

$$B = \frac{2}{n} (A - n) \quad \text{seu} \quad B = 2 \left(\frac{1 - \sqrt{(1 - nn)}}{n} \right)^2,$$

$$C = \frac{1}{n} (2B - nA) \quad \text{seu} \quad C = 2 \left(\frac{1 - \sqrt{(1 - nn)}}{n} \right)^3,$$

$$D = \frac{1}{n} (2C - nB) \quad \text{seu} \quad D = 2 \left(\frac{1 - \sqrt{(1 - nn)}}{n} \right)^4,$$

$$E = \frac{1}{n} (2D - nC) \quad \text{seu} \quad E = 2 \left(\frac{1 - \sqrt{(1 - nn)}}{n} \right)^5,$$

$$F = \frac{1}{n} (2E - nD) \quad \text{seu} \quad F = 2 \left(\frac{1 - \sqrt{(1 - nn)}}{n} \right)^6,$$

etc.

Ponatur brevitatis gratia $\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}=m$, erit

$$ds=d\sigma\,(1+2m\cos\sigma+2m^2\cos 2\sigma+2m^3\cos 3\sigma+2m^4\cos 4\sigma+\text{etc.})$$

hincque integrando

$$s=\sigma+\tfrac{2}{1}m\sin\sigma+\tfrac{2}{2}m^2\sin 2\sigma+\tfrac{2}{3}m^3\sin 3\sigma+\tfrac{2}{4}m^4\sin 4\sigma+\text{etc.}$$

Cum nunc sit $\sigma=\tau+n\sin\sigma$, erit aequatio centri

$$s-\tau=(2m+n)\sin\sigma+\tfrac{2}{2}m^2\sin 2\sigma+\tfrac{2}{3}m^3\sin 3\sigma+\tfrac{2}{4}m^4\sin 4\sigma+\text{etc.}$$

Potest etiam anomalia media τ per veram s simili modo exprimi; cum enim sit

$$d\tau=\frac{ds\,(1-nn)^{\frac{3}{2}}}{(1+n\cos s)^2},$$

erit $$d\tau=(1-nn)^{\frac{3}{2}}ds\,(1-2n\cos s+3n^2\cos^2 s-4n^3\cos^3 s+5n^4\cos^4 s-\text{etc.}),$$

cujus seriei, si potestates cosinus s ad cosinus multiplorum angulorum revocentur, prodit terminus constans

$$1+\tfrac{3}{2}n^2+\frac{3.5}{2.4}n^4+\text{etc.}=(1-nn)^{-\frac{3}{2}}$$

et coefficiens ipsius $\cos s$ fit

$$=-2n\,(1-nn)^{-\frac{3}{2}}.$$

Quare ponamus

$$d\tau=ds\,(1-A\cos s+B\cos 2s-C\cos 3s+D\cos 4s-\text{etc.}),$$

quae series per $(1+n\cos s)^2=1+\frac{1}{2}nn+2n\cos s+\frac{1}{2}nn\cos 2s$ multiplicata dat

$$\begin{array}{lllll}
1+\frac{1}{2}nn & -A(1+\frac{1}{2}nn)\cos s & +B(1+\frac{1}{2}nn)\cos 2s & -C(1+\frac{1}{2}nn)\cos 3s & +D(1+\frac{1}{2}nn)\cos 4s\ \text{etc.}\\
-An & +2n & -An & +Bn & -Cn\\
+\frac{1}{4}Bnn & +Bn & -Cn & +Dn & -En\\
 & -\frac{1}{4}Ann & +\frac{1}{2}nn & -\frac{1}{4}Ann & +\frac{1}{4}Bnn\\
 & -\frac{1}{4}Cnn & +\frac{1}{4}Dnn & -\frac{1}{4}Enn & +\frac{1}{4}Fnn
\end{array}$$

aequari debet ipsi $(1-nn)^{\frac{3}{2}}$. At est $A=2n$, unde fit primo

$$1+\tfrac{1}{2}nn-2nn+\tfrac{1}{4}Bnn=(1-nn)^{\frac{3}{2}},$$

ideoque

$$B = \frac{4(1-nn)^{\frac{3}{2}} - 4 + 6nn}{nn} = \tfrac{3}{2}nn + \tfrac{1}{4}n^4,$$

$$C = \frac{4Bn - 4A - 3Ann + 8n}{nn} = \frac{16(1-nn)^{\frac{3}{2}} - 16 + 24nn - 6n^4}{n^3},$$

$$D = \frac{4Cn - 4B - 2Bnn + 4An - 2nn}{nn} = \frac{8(6-nn)(1-nn)^{\frac{3}{2}} - 48 + 80nn - 30n^4}{n^4},$$

$$E = \frac{4Dn - 4C - 2Cnn + 4Bn - Ann}{nn},$$

$$F = \frac{4En - 4D - 2Dnn + 4Cn - Bnn}{nn}.$$

Alio autem modo reperitur

$$A = 2n; \quad B = 2(1 + 2\sqrt{(1-nn)})\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^2; \quad C = \frac{4B - 3An}{n}; \quad D = \frac{6C - 4Bn}{2n};$$

$$E = \frac{8D - 5Cn}{3n}; \quad F = \frac{10E - 6Dn}{4n}.$$

Hincque coefficientes quaesiti sequenti modo exprimi invenirentur:

$$A = 2(1 + \sqrt{(1-nn)})\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right),$$

$$B = 2(1 + 2\sqrt{(1-nn)})\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^2,$$

$$C = 2(1 + 3\sqrt{(1-nn)})\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^3,$$

$$D = 2(1 + 4\sqrt{(1-nn)})\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^4,$$

etc.

Quibus valoribus inventis erit

$$\tau = s - A\sin s + \tfrac{1}{2}B\sin 2s - \tfrac{1}{3}C\sin 3s + \tfrac{1}{4}D\sin 4s - \tfrac{1}{5}E\sin 5s + \text{etc.},$$

ita ut aequatio centri sit futura

$$s - \tau = A\sin s - \tfrac{1}{2}B\sin 2s + \tfrac{1}{3}C\sin 3s - \tfrac{1}{4}D\sin 4s + \tfrac{1}{5}E\sin 5s - \text{etc.}$$

91. **Coroll. 1.** Si n tam sit parvum, ut potestates omnes rejicere liceat, erit $\sigma = \tau + n\sin\tau$, et ob $m = \frac{1}{2}n$, fit $s = \sigma + n\sin\sigma = \tau + 2n\sin\tau$, ideoque aequatio centri $s - \tau = 2n\sin\tau$; quae ergo est maxima $= 2n$, sumta anomalia media $\tau = 90^0$.

92. **Coroll. 2.** Si tantum potestates secunda superiores rejicere liceat, ob $\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n} = \frac{1}{2}n$, erit $A = 2n$, $B = \frac{3}{2}nn$, $C = 0$ etc., unde fit $\tau = s - 2n\sin s + \frac{3}{4}nn\sin 2s$; hincque per conver-

*

sionem reperitur $s = \tau + 2n\sin\tau + \frac{5}{4}nn\sin 2\tau$, seu aequatio centri $s - \tau = 2n\sin\tau + \frac{5}{4}nn\sin 2\tau$, quae ergo est maxima si $\tau = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{4}n$, fitque $= 2n$.

93. **Coroll. 3.** Si potestates ipsius n quarta altiores tantum rejicere liceat, erit

$$A = 2n - \tfrac{1}{2}n^3, \quad B = \tfrac{3}{2}nn - \tfrac{1}{2}n^4, \quad C = n^3, \quad D = \tfrac{5}{8}n^4, \quad E = 0, \quad \text{etc.}$$

ideoque habebitur

$$\tau = s - (2n - \tfrac{1}{2}n^3)\sin s + (\tfrac{3}{4}nn - \tfrac{1}{4}n^4)\sin 2s - \tfrac{1}{3}n^3\sin 3s + \tfrac{5}{32}n^4\sin 4s,$$

unde per conversionem eruitur

$$s = \tau + (2n - \tfrac{3}{4}n^3)\sin\tau + (\tfrac{5}{4}nn - \tfrac{11}{12}n^4)\sin 2\tau + \tfrac{13}{12}n^3\sin 3\tau + \tfrac{103}{96}n^4\sin 4\tau.$$

94. **Coroll. 4.** Aequatio centri ergo fit maxima ubi est

$$(2n - \tfrac{3}{4}n^3)\cos\tau + (\tfrac{5}{2}nn - \tfrac{11}{6}n^4)\cos 2\tau + \tfrac{13}{4}n^3\cos 3\tau + \tfrac{103}{24}n^4\cos 4\tau = 0,$$

unde colligitur

$$\tau = \frac{\pi}{2} - \tfrac{5}{4}n - \tfrac{25}{384}n^3,$$

ita ut haec anomalia media minor sit angulo recto. Ipsa autem aequatio maxima ex formula generali supra data facilius eruetur.

95. **Scholion.** Scilicet cum ex § 87 pro aequatione maxima sit proxime

$$\cos\sigma = \frac{1 - (1 - nn)^{\frac{1}{4}}}{n} = \tfrac{1}{4}n + \tfrac{3}{32}n^3,$$

$$\text{erit} \quad \sigma = \frac{\pi}{2} - \tfrac{1}{4}n - \tfrac{37}{384}n^3 \quad \text{et} \quad \sin\sigma = 1 - \tfrac{1}{32}nn - \tfrac{49}{2048}n^4.$$

Deinde vero est

$$\cos s = \frac{(1 - nn)^{\frac{3}{4}} - 1}{n} = -\tfrac{3}{4}n - \tfrac{3}{32}n^3,$$

$$\text{unde} \quad s = \frac{\pi}{2} + \tfrac{3}{4}n + \tfrac{21}{128}n^3 \quad \text{et} \quad \tau = \frac{\pi}{2} - \tfrac{5}{4}n - \tfrac{25}{384}n^3,$$

ideoque aequatio maxima $\quad s - \tau = 2n + \tfrac{11}{48}n^3.$

Ceterum methodus priori loco exposita, qua primo anomaliam excentricam σ investigavimus, commodius adhiberi videtur, cum ejus ope appropinquatio facile longius extendi queat, quandoquidem series qua s per σ exprimitur, lex progressionis est manifesta; ac si accuratius σ per τ exprimere velimus reperiemus

$$\sigma = \tau + (n - \tfrac{1}{8}n^3 + \tfrac{1}{192}n^5)\sin\tau + (\tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{6}n^4)\sin 2\tau + (\tfrac{3}{8}n^3 - \tfrac{41}{192}n^5)\sin 3\tau + \tfrac{1}{3}n^4\sin 4\tau + \tfrac{21}{64}n^5\sin \ldots$$

ubi tamen legem progressionis perspicere non licet.

96. **Problema.** Si curva, in qua corpus B circa A moveri cernitur, fuerit parabola, ad datum tempus assignare locum, ubi corpus B versabitur.

Solutio. Denotante f semiparametrum parabolae, ut distantia absidis imae C a foco A sit $AC = f$; si tempore t corpus ex C in B usque progrediatur, confecta anomalia vera $CAB = s$, erit distantia $AB = v = \frac{f}{1+\cos s}$, et si A et B corporum massas denotent, invenimus

$$t = \frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{2g(A+B)}}\int\frac{ds}{(1+\cos s)^2} = \frac{f\sqrt{f}}{\sqrt{2g(A+B)}}\cdot\frac{(2+\cos s)\sin s}{3(1+\cos s)^2}.$$

Quo temporis rationem facilius tenere possimus, consideremus casum, quo corpus E circa aliud corpus F circulum uniformiter describit, cujus radius $= e$, atque tempore eodem t angulus descriptus sit $= \tau$, qui loco ipsius temporis t introducatur. Cum igitur sit $t = \frac{e\sqrt{e}}{\sqrt{2g(E+F)}}\cdot\tau$, statuamus brevitatis gratia $\frac{e\sqrt{e}}{f\sqrt{f}}\cdot\sqrt{\frac{A+B}{E+F}} = m$, ut obtineamus $m\tau = \frac{(2+\cos s)\sin s}{3(1+\cos s)^2}$, unde ex dato angulo τ definiri oportet angulum s, id quod resolutionem aequationis cubicae postulat. Praestabit autem tabulam computare, quae ad singulos gradus anguli s exhibeat valorem formulae $\frac{(2+\cos s)\sin s}{3(1+\cos s)^2}$, ex qua deinceps facile erit pro dato $m\tau$ respondentem anomaliam veram s colligere. Ad hunc calculum sublevandum notetur esse

$$m\tau = \frac{\left(1+2\cos^2\frac{1}{2}s\right)\sin\frac{1}{2}s}{6\cos^3\frac{1}{2}s} = \frac{\sin\frac{1}{2}s}{3\cos\frac{1}{2}s} + \frac{\sin\frac{1}{2}s}{6\cos^3\frac{1}{2}s},$$

seu $m\tau = \frac{1}{3}\operatorname{tang}\frac{1}{2}s + \frac{1}{6}\operatorname{tang}\frac{1}{2}s.\sec^2\frac{1}{2}s = \frac{1}{6}\operatorname{tang}\frac{1}{2}s\,(2+\sec^2\frac{1}{2}s) = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{1}{2}s + \frac{1}{6}\operatorname{tang}^3\frac{1}{2}s.$

Verumtamen etiam ex dato $m\tau$, modo hic angulus in partibus radii exponatur, angulus s definiri potest, nam ponatur $\operatorname{tang}\frac{1}{2}s = z$, erit $\sec^2\frac{1}{2}s = 1+zz$, unde fit $6m\tau = z(3+zz)$, ex cujus aequationis resolutione, si ponamus $3m\tau = u$, deducimus

$$z = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s = (\sqrt{(1+uu)}+u)^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{(1+uu)}-u)^{\frac{1}{3}},$$

vel quaeratur angulus ω, ut sit $\operatorname{tang}2\omega = 3m\tau$, tum vero erit

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s = \sqrt[3]{\operatorname{tang}(45^0+\omega)} - \sqrt[3]{\operatorname{tang}(45^0-\omega)},$$

sive $$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s = \sqrt[3]{\operatorname{tang}(45^0+\omega)} - \sqrt[3]{\cot.(45^0+\omega)},$$

cujus ope calculus per logarithmos haud difficulter instituitur, quoniam

$$\log.\sqrt[3]{\operatorname{tang}(45^0-\omega)} = -\log.\sqrt[3]{\operatorname{tang}(45^0+\omega)}.$$

Fortasse calculus adhuc facilior reddetur, si quaeratur angulus ψ, ut sit

$$\operatorname{tang}(45^0 + \psi) = \sqrt[3]{\operatorname{tang}(45^0 + \omega)},$$

eritque $$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s = 2\operatorname{tang}2\psi,$$

qui calculus ad logarithmorum usum maxime est accommodatus.

97. **Coroll. 1.** Elapso ergo tempore t post transitum corporis B per absidem imam, ipsius pro eodem tempore angulus τ definiatur, quem corpus quoddam E circa aliud F circulum radii $= e$ describens interea conficit, qui angulus loco temporis in calculum introducatur, tum vero capiatur numerus $m = \frac{e\sqrt{e}}{f\sqrt{f}}\sqrt{\frac{A+B}{E+F}}$, et factum $m\tau$ in partibus radii exprimatur eritque

$$m\tau = \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{6}\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}s.$$

98. **Coroll. 2.** Uti sumto $\tau = 0$, anomalia vera s evanescit, ita tempus usque ad absidem summam fit infinitum; sumta enim anomalia vera $s = 180^0$, ob $\operatorname{tang}\frac{1}{2}s = \infty$, evidens est quantitatem $m\tau$ in infinitum augeri, scilicet corpus in parabola motum nunquam ad absidem summam pertingit.

99. **Coroll. 3.** Si anomalia vera s fuerit valde parva, ob $\operatorname{tang}\frac{1}{2}s = \frac{1}{2}s + \frac{1}{24}s^3$ et $\operatorname{tang}^3\frac{1}{2}s = \frac{1}{8}s^3$, fiet $m\tau = \frac{1}{4}s + \frac{1}{24}s^3$. Sumta autem $s = 60^0$ ob $\operatorname{tang}30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ fit $m\tau = \frac{5}{9\sqrt{3}}$; at sumta $s = 90^0$, ob $\operatorname{tang}45^0 = 1$, fit $m\tau = \frac{2}{3}$. Sumta denique $s = 120^0$, ob $\operatorname{tang}60^0 = \sqrt{3}$ fit $m\tau = \sqrt{3}$.

100. **Coroll. 4.** Si ex dato tempore t seu angulo ipsi proportionali $m\tau$ anomaliam veram definire velimus, promptissime id praestabitur hoc modo: Primo quaeratur angulus ω, ut sit

$$\operatorname{tang}2\omega = 3m\tau,$$

tum angulus ψ ut sit

$$\operatorname{tang}(45^0 + \psi) = \sqrt[3]{\operatorname{tang}(45^0 + \omega)},$$

quo invento erit $\operatorname{tang}\frac{1}{2}s = 2\operatorname{tang}2\psi$.

101. **Scholion.** Quemadmodum hic aequationis cubicae $z^3 + 3z = 6m\tau$ resolutionem commode per tabulas sinuum docuimus, qui modus alias tantum in iis aequationibus cubicis usurpari solet, quae omnes radices habent reales, ita in genere aequationum unica radice reali praeditarum resolutio quoque ad tabulas sinuum revocari potest hoc modo: Sit sublato secundo termino proposita haec aequatio cubica $y^3 + 3by = 2c$, quaeratur angulus ω, ut sit

$$\operatorname{tang}2\omega = \frac{c}{b\sqrt{b}},$$

tum vero angulus ψ, ut sit

$$\operatorname{tang}(45^0 + \psi) = \sqrt[3]{\operatorname{tang}(45^0 + \omega)},$$

radix realis $y = 2\sqrt{b}\,\mathrm{tang}\,2\psi$. Hoc scilicet modo regula Cardani commodius ad calculum accommodatur. Vel etiam ex angulo ω statim est

$$y = \left(\sqrt[3]{\mathrm{tang}\,(45^0 + \omega)} - \sqrt[3]{\mathrm{tang}\,(45^0 - \omega)}\right)\sqrt{b}.$$

102. **Problema.** Si curva, quam corpus B circa A describit, proxime tantum ad parabolam accedat, ad quodvis tempus ab abside ima elapsum locum corporis in curva assignare.

Solutio. Excentricitas ergo n unitati proxime aequalis assumitur, unde si ut ante tempus t ex motu uniformi, quo corpus quodpiam E circa aliud F ad distantiam $= e$ circulum describit, definiamus, atque in hoc circulo tempore t absolvatur angulus $= \tau$, ponaturque

$$\frac{e\sqrt{e}}{f\sqrt{f}}\sqrt{\frac{A+B}{E+F}} = m;$$

ex superioribus habemus elapso tempore t ab abside ima C distantiam

$$AB = v = \frac{f}{1+n\cos s} \quad \text{et} \quad m\tau = \frac{1}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{Arc.cos}\,\frac{n+\cos s}{1+n\cos s} - \frac{n\sin s}{(1-nn)(1+n\cos s)}$$

denotante f semiparametrum orbitae et s anomaliam veram seu angulum CAB. Haec quidem formula pro casu, quo $n < 1$ et orbita est ellipsis, valet, unde patet pro tempore motus ab abside ima ad summam prodire

$$m\tau = \frac{\pi}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}}$$

id quod ex approximationibus minus liquet, quippe quae non ad absidem summam usque extenduntur. Nam cum sit

$$\mathrm{Arc.cos}\,\frac{n+\cos s}{1+n\cos s} = \mathrm{Arc.sin}\,\frac{\sin s\sqrt{(1-nn)}}{1+n\cos s},$$

hic sinus quidem est valde parvus, quamdiu anomalia vera s non proxime ad 180^0 accedit. Cum igitur existente sinu u minimo sit

$$\mathrm{Arc.sin}\,u = u + \tfrac{1}{6}u^3 + \tfrac{3}{40}u^5 + \tfrac{5}{112}u^7 \text{ etc.}$$

erit $$\mathrm{Arc.sin}\,\frac{\sin s\sqrt{(1-nn)}}{1+n\cos s} = \frac{\sin s\sqrt{(1-nn)}}{1+n\cos s} + \frac{(1-nn)^{\frac{3}{2}}\sin^3 s}{6(1+n\cos s)^3} + \frac{3(1-nn)^{\frac{5}{2}}\sin^5 s}{40(1+n\cos s)^5},$$

ideoque nostra aequatio fiet

$$m\tau = \frac{\sin s}{(1+n)(1+n\cos s)} + \frac{\sin^3 s}{6(1+n\cos s)^3} + \frac{3(1-nn)\sin^5 s}{40(1+n\cos s)^5}.$$

Quoniam igitur n proxime ad unitatem accedit, sive sit $n < 1$ sive $n > 1$, formula inventa aeque locum habet, neque tamen eousque progredi licet, ut denominator $1 + n\cos s$ proxime evanescat. Ponamus ergo $n = 1 - \delta$ et $\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}s = z$, ac reperiemus

$$m\tau = \frac{2z}{(2-\delta)(2-\delta+\delta zz)} + \frac{4z^3}{3(2-\delta+\delta zz)^3} + \frac{24\delta z^5}{5(2-\delta+\delta zz)^5}$$

neglectis terminis ubi δ plus una dimensione adipiscitur. Pro data ergo anomalia vera s, tempus ejusve loco $m\tau$ facillime colligetur hoc modo: Statuatur $\frac{\sin s}{1+n\cos s}=u$, eritque

$$m\tau=\frac{u}{1+n}+\tfrac{1}{6}u^3+\tfrac{3}{40}(1-nn)u^5.$$

At si discrimen a particula δ oriundum noscere velimus, ex $z=\operatorname{tang}\frac{1}{2}s$ obtinebimus

$$m\tau=\tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{6}z^3+\delta\left(\tfrac{1}{2}z-\tfrac{1}{10}z^5\right),$$

unde si neglecta particula δ pro dato $m\tau$ invenerimus $z=q$, erit ratione ipsius δ habita

$$z=q-\frac{\delta q(5-q^4)}{5(1+qq)}=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s.$$

103. **Coroll. 1.** Si ergo particula minima δ fuerit positiva, curva erit ellipsis perquam longa, cujus semiaxis transversus $=\frac{f}{1-nn}=\frac{f}{2\delta}$, et semiaxis conjugatus $=\frac{f}{\sqrt{2\delta}}$, atque distantia absidis imae a foco $=\frac{f}{2-\delta}=\frac{1}{2}f+\frac{\delta}{4}f$.

104. **Coroll. 2.** Sin autem particula δ fuerit negativa, curva erit hyperbola minime a parabola ejusdem parametri discrepans, cujus asymtotae ad axem erunt inclinatae angulo cujus cosinus $=\frac{1}{1+\delta}$ vel sinus $=\sqrt{2\delta}$.

105. **Coroll. 3.** Ceterum calculus, quo tam ex data anomalia vera s quaeritur quantitas tempori proportionalis $m\tau$, quam vicissim haec ex illa, non multo onerosior est illo, quem ante pro parabola docuimus, unde ad motum in hyperbola scrutandum procedamus.

106. **Problema.** Si curva, in qua corpus B circa A moveri videtur, fuerit hyperbola, ad quodvis tempus ejus locum assignare.

Solutio. Loco temporis t introducamus et hic quantitatem ipsi proportionalem $m\tau$ modo ante expositam, et cum numerus n excentricitatem referens sit unitate major, ex § 68 habebimus

$$m\tau=\frac{n\sin s}{(nn-1)(1+n\cos s)}-\frac{1}{(nn-1)^{\frac{3}{2}}}\log.\frac{n+\cos s+\sin s\sqrt{(nn-1)}}{1+n\cos s},$$

qua aequatione relatio inter tempus et anomaliam veram $CAB=s$ exprimitur. Hic autem logarithmus ex canone logarithmorum hyperbolicorum sumi debet, vel si logarithmum vulgarem capiamus, eum per numerum 2.30258509299 multiplicari, hujusve reciprocum 0,4342944819 dividi oportet. Statuamus $\frac{n+\cos s}{1+n\cos s}=u$, ut sit $\cos s=\frac{n-u}{nu-1}$, et quia $\sqrt{(uu-1)}=\frac{\sin s\sqrt{(nn-1)}}{1+n\cos s}$, nostra aequatio erit

$$m\tau=\frac{n}{(nn-1)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{(uu-1)}-\frac{1}{(nn-1)^{\frac{3}{2}}}\log.(u+\sqrt{(uu-1)}),$$

quae aequatio adhuc simplicior reddi potest ponendo $u=\sec 2\omega=\frac{1}{\cos 2\omega}$, seu $\sqrt{(uu-1)}=\operatorname{tang}2\omega$

[illegible] $\frac{\ldots n \cos s}{n + \cos s} = \cos 2\omega$, hincque $\cos s = \frac{n \cos 2\omega - 1}{n - \cos 2\omega}$ et $\sin s = \frac{\sin 2\omega \sqrt{(nn-1)}}{n - \cos 2\omega}$; tum enim erit [illegible] $\sqrt{(nn-1)} = \operatorname{tang}(45^0 + \omega)$, ideoque

$$m\tau = \frac{n \operatorname{tang} 2\omega - \log . \operatorname{tang}(45^0 + \omega)}{(nn-1)\sqrt{(nn-1)}}.$$

Quodsi ergo ad singulos gradus anomaliae verae s valores quantitatis $m\tau$ computentur, inde vicissim pro dato $m\tau$ ipsa anomalia vera s simulque distantia $AB = \varrho = \frac{f}{1 + n \cos s}$ facile colligitur.

107. **Coroll. 1.** Crescente ergo tempore t seu quantitate ipsi proportionali $m\tau$, crescit etiam anomalia vera $CAB = s$, atque elapso tempore infinito fit $\cos s = -\frac{1}{n}$ et $\sin s = \frac{\sqrt{(nn-1)}}{n}$, eodemque casu evadit distantia $AB = \varrho$ infinita.

108. **Coroll. 2.** Elapso tempore infinito locus corporis in asymtotam incidet, et asymtotae utrinque ad axem hyperbolae inclinantur angulo, cujus cosinus est $= \frac{1}{n}$ et tangens $= \sqrt{(nn-1)}$. Est vero $\frac{f}{nn-1}$ semiaxis transversus hyperbolae et $\frac{f}{\sqrt{(nn-1)}}$ semiaxis conjugatus.

109. **Scholion.** Evolvimus ergo omnes species motuum, quibus duo corpora se mutuo attrahentia, siquidem fuerint sphaerica circumferri possunt; vidimus orbitam, quam alterum circa alterum describere spectatur, esse sectionem conicam. Huc quidem proxime accedunt orbitae, quas planetae primarii et cometae circa solem describere videntur, dum illi in ellipsibus circumferuntur, hi vero quasi in parabolis, etsi adhuc incertum est, utrum hyperbola penitus sit excludenda. Verumtamen planetas non exacte in orbitis ellipticis circa solem circumferri vel exinde patet, quod lineae absidum in coelo non quietae deprehenduntur. Duplex scilicet perturbatio eorum motum afficit, quarum altera a figura planetarum non sphaerica, altera ab attractione reliquorum corporum coelestium proficiscitur, quam investigationem deinceps sumus suscepturi. Ante autem juvabit hoc idem argumentum de motu duorum corporum sphaericorum per calculos variatos pertractasse. Cum enim totum negotium resolutione aequationum differentio-differentialium innitatur, plurimum intererit hujusmodi aequationes variis methodis tentari, quandoquidem hoc casu de successu certi sumus, quacunque methodo utamur, etiamsi forte, nisi solutio jam ante esset cognita, calculi evolutio nimis ardua videretur. His autem difficultatibus superatis, aditus ad sublimiores investigationes, quando plura duobus corpora proponuntur, facilior forsitan redderetur. In sequente ergo capite aliis quibusdam methodis determinationem motus duorum corporum sphaericorum aggrediamur.

Caput III.

Aliae investigationes motus duorum corporum sphaericorum.

110. **Problema.** (Fig. 179.) Dum corpora sphaerica A et B se mutuo attrahunt, hujus motum, qualis ex illo spectatur, referre ad planum quodcunque per corpus A ductum.

Solutio. Repraesentet tabula planum, ad quod motum corporis B referri oportet, quod jam tempore elapso $= t$ versetur in B, unde demisso ad planum propositum perpendiculo BY, et ex Y