Caput IV.

De motu duorum corporum, quorum alterum tantum est sphaericum.

128. **Problema.** Si corpus sphaericum moveatur circa corpus figura quacunque praed... quod omni motu rotatorio careat, invenire aequationes, quibus ejus motus determi...

Solutio. Cum quaestio sit de motu respectivo corporis sphaerici, alterum corpus non sph...ricum in quiete considerabimus, quoniam ipsi etiam omnem motum rotatorium adimimus. Sit hujus corporis centrum inertiae in J (fig. 172), ejusque axes principales JA, JB, JC, quorum re...spectu sint momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc, denotante M massam hujus corporis, quod tanqu... quiescens spectamus. Nunc autem elapso tempore $=t$, alterius corporis sphaerici centrum ver... in H, ejusque massa vocetur $=N$, unde ad planum binis axibus principalibus prioris corporis JA, JB contentum demittatur perpendiculum HG, et ex G ad axem JA ducatur normalis GF, ut habea...tur pro ejus loco ternae coordinatae $JF=x$, $FG=y$ et $GH=z$; distantia autem ipsa JH vocet...ur $=v$. Quodsi jam huc denominationes § 38 accommodemus, erit $h=v$, $\cos\alpha=\frac{x}{v}$, $\cos\beta=\frac{y}{v}$, $\cos\gamma=\frac{z}{v}$, unde corpus N in H sequentibus tribus viribus secundum directiones $H\alpha$, $H\beta$, $H\gamma$ ... axi...bus principalibus parallelas sollicitatur

$$\text{secundum } H\alpha=\frac{MNx}{v^3}\left(1+\frac{3aa}{2vv}\left(3-\frac{5xx}{vv}\right)+\frac{3bb}{2vv}\left(1-\frac{5yy}{vv}\right)+\frac{3cc}{2vv}\left(1-\frac{5zz}{vv}\right)\right),$$

$$H\beta=\frac{MNy}{v^3}\left(1+\frac{3bb}{2vv}\left(3-\frac{5yy}{vv}\right)+\frac{3cc}{2vv}\left(1-\frac{5zz}{vv}\right)+\frac{3aa}{2vv}\left(1-\frac{5xx}{vv}\right)\right),$$

$$H\gamma=\frac{MNz}{v^3}\left(1+\frac{3cc}{2vv}\left(3-\frac{5zz}{vv}\right)+\frac{3aa}{2vv}\left(1-\frac{5xx}{vv}\right)+\frac{3bb}{2vv}\left(1-\frac{5yy}{vv}\right)\right).$$

A paribus autem viribus, sed contrario modo applicatis corpus M ad corpus in H sollicitatur, quae cum denuo, ob motum respectivum, contrario modo ad corpus in H sint transferendae et in ratione massarum M ad N mutandae, motus respectivus corporis in H sequentibus tribus aequationibus differentio-differentialibus exprimetur, sumto elemento temporis dt constante:

$$ddx=\frac{-2g(M+N)x\,dt^2}{v^3}\left(1+\frac{3(3aa+bb+cc)}{2vv}-\frac{15(aaxx+bbyy+cczz)}{2v^4}\right),$$

$$ddy=\frac{-2g(M+N)y\,dt^2}{v^3}\left(1+\frac{3(aa+3bb+cc)}{2vv}-\frac{15(aaxx+bbyy+cczz)}{2v^4}\right),$$

$$ddz=\frac{-2g(M+N)z\,dt^2}{v^3}\left(1+\frac{3(aa+bb+3cc)}{2vv}-\frac{15(aaxx+bbyy+cczz)}{2v^4}\right),$$

ubi notandum esse $vv=xx+yy+zz$. Hinc autem primo colligimus

$$\frac{ddx}{x}-\frac{ddy}{y}=\frac{-2g(M+N)dt^2}{v^3}\cdot\frac{3(aa-bb)}{vv},$$

$$\frac{ddy}{y}-\frac{ddz}{z}=\frac{-2g(M+N)dt^2}{v^3}\cdot\frac{3(bb-cc)}{vv},$$

$$\frac{ddz}{z}-\frac{ddx}{x}=\frac{-2g(M+N)dt^2}{v^3}\cdot\frac{3(cc-aa)}{vv},$$

Hincque porro
$$\frac{yddx - xddy}{(aa - bb)xy} = \frac{zddy - yddz}{(bb - cc)yz} = \frac{xddz - zddx}{(cc - aa)xz},$$
seu $(aa - bb)\,xyddz + (bb - cc)\,yzddx + (cc - aa)\,xzddy = 0,$

quam autem immediate ulterius reducere non licet.

Verum ex tribus illis primis formulis, si brevitatis gratia ponamus $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = f^2u^2$, obtinebimus hanc aequationem integrabilem
$$dxddx + dyddy + dzddz = \frac{-2g\,(M+N)\,dt^2}{v^3}\left(vdv + \frac{3\,(aa+bb+cc)\,dv}{2v} + \frac{3ffudu}{vv} - \frac{15ffuudv}{2v^3}\right)$$
$$= -2g(M+N)\,dt^2\left(\frac{dv}{vv} + \frac{3\,(aa+bb+cc)\,dv}{2v^4} + \frac{3ffudu}{v^5} - \frac{15ffuudv}{2v^6}\right).$$

Hujus enim integrale est
$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = Ddt^2 + 4g\,(M+N)\,dt^2\left(\frac{1}{v} + \frac{aa+bb+cc}{2v^3} - \frac{3ffuu}{2v^5}\right).$$

Cum autem praeterea aliae integrationes non adsint, hinc solutionem in quantitatibus finitis expressam deducere non licet.

129. **Coroll. 1.** Ob tres variabiles x, y, z per tempus t determinandas requiruntur tres aequationes, unde cum integrali postremo loco inventa adhuc duas conjungi oportet, ac perinde est quaenam ad hunc finem eligantur.

130. **Coroll. 2.** Loco alterius harum commodissime accipi videtur haec, in quam ternae variabiles x, y et z aequaliter ingrediuntur
$$(aa - bb)\,xyddz + (bb - cc)\,yzddx + (cc - aa)\,xzddy = 0,$$
quae etiam ad hanc formam reducitur
$$aax\,(yddz - zddy) + bby\,(zddx - xddz) + ccz\,(xddy - yddx) = 0.$$

131. **Coroll. 3.** Loco tertiae vero aequationis pro lubitu una ex his tribus accipietur
$$yddx - xddy = \frac{-6g\,(aa-bb)\,(M+N)\,xydt^2}{v^5},$$
$$zddy - yddz = \frac{-6g\,(bb-cc)\,(M+N)\,yzdt^2}{v^5},$$
$$xddz - zddx = \frac{-6g\,(cc-aa)\,(M+N)\,xzdt^2}{v^5}.$$

132. **Scholion 1.** Quomodocunque autem hae aequationes cum ista
$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = Ddt^2 + 4g\,(M+N)\,dt^2\left(\frac{1}{v} + \frac{aa+bb+cc}{2v^3} - \frac{3ffuu}{2v^5}\right)$$
posito brevitatis gratia $aaxx + bbyy + cczz = ffuu$ combinentur, solutio problematis maximis difficultatibus involvitur. Quare cum problema latissime pateat ob figuram quamcunque, quam corpori quiescenti tribuimus, casus magis particulares contemplemur; ac primo quidem statim patet, si duo

corporis M momenta principalia fuerint inter se aequalia, difficultates illas maximam partem [illegible]cere. Statuamus ergo momenta inertiae respectu axium JA et JB inter se aequalia, seu bb [illegible] atque evidens est in hac hypothesi perinde esse, sive corpus M quiescat, sive ei motus gyr[illegible] quicunque circa axem tertium JC tribuatur, quoniam omnia momenta respectu axium in plano quod tanquam quiescens spectamus, sumtorum, sunt inter se aequalia. Pro hoc ergo casu motum respectivum alterius corporis sphaerici N investigemus.

133. **Scholion 2.** Interim tamen conatus exposuisse juvabit, qui forte aliquando ad solutionem producere valeant. Faciamus statim has substitutiones

$$x = pv, \quad ydx - xdy = ldt, \quad 2g(aa - bb)(M + N) = A,$$
$$y = qv, \quad zdy - ydz = mdt, \quad 2g(bb - cc)(M + N) = B,$$
$$z = rv, \quad xdz - zdx = ndt, \quad 2g(cc - aa)(M + N) = C,$$

ex quibus pro novis litteris concludimus has relationes

$$pp + qq + rr = 1, \quad lz + mx + ny = 0, \quad \text{seu} \quad lr + mp + nq = 0,$$

tum $A + B + C = 0$, item $Acc + Baa + Cbb = 0$. Porro ob $yddx - xddy = dldt$, habebimus

$$dl = \frac{-3Apqdt}{v^3}, \quad dm = \frac{-3Bqrdt}{v^3}, \quad dn = \frac{-3Cprdt}{v^3}.$$

Deinde cum sit $ydx - xdy = vv(qdp - pdq)$ nanciscimur

$$qdp - pdq = \frac{ldt}{vv}, \quad rdq - qdr = \frac{mdt}{vv}, \quad pdr - rdp = \frac{ndt}{vv},$$

unde fit $\frac{(lq - nr)dt}{vv} = qqdp - pqdq - prdr + rrdp = dp$, quia est $-qdq - rdr = pdp$ [illegible] $pp + qq + rr = 1$. Sicque erit

$$dp = \frac{(lq - nr)dt}{vv}, \quad dq = \frac{(mr - lp)dt}{vv}, \quad dr = \frac{(np - mq)dt}{vv};$$

atque hinc porro colligitur $rdl + pdm + qdn = 0$, $mdp + ndq + ldr = 0$; tum vero etiam

$$ccrdl + aapdm + bbqdn = 0, \quad \text{ideoque} \quad Cpdm = Bqdn, \quad Crdl = Aqdn, \quad Brdl = Apdm$$

$$\text{sive} \quad \frac{rdl}{A} = \frac{pdm}{B} = \frac{qdn}{C} = \frac{-3pqrdt}{v^3}.$$

Ex assumtis autem aequationibus obtinemus

$$dt^2(ll + mm + nn) = vv(dx^2 + dy^2 + dz^2) - vvdv^2,$$

ita ut nostra aequatio integralis futura sit

$$dv^2 + \frac{(ll + mm + nn)dt^2}{vv} = Ddt^2 + 2g(M + N)dt^2\left(\frac{2}{v} + \frac{aa + bb + cc}{v^3} - \frac{3(aapp + bbqq + ccrr)}{v^3}\right)$$

in qua, quia quantitates $ll + mm + nn$ et $aapp + bbqq + ccrr$ ....., investigemus per formulas superiores earum differentialia. Reperiemus ergo

$$ldl + mdm + ndn = \frac{-3dt}{v^3}(Alpq + Bmqr + Cnpr) \quad \text{et}$$

$$aapdp + bbqdq + ccrdr = \frac{dt}{vv}\left((aa - bb)\,lpq + (bb - cc)\,mqr + (cc - aa)\,npr\right),$$

Jam ob $aa - bb = \frac{A}{2g(M+N)}$ erit

$$aapdp + bbqdq + ccrdr = \frac{dt}{2g(M+N)\,v^2}(Alpq + Bmqr + Cnpr),$$

Ita ut sit

$$aapdp + bbqdq + ccrdr = \frac{-v\,(ldl + mdm + ndn)}{6g(M+N)}.$$

Hinc etiam differentio-differentialia primitiva definire possumus, cum enim sit

$$dx = pdv + vdp = pdv + \frac{(lq - nr)\,dt}{v},$$

erit
$$ddx = pddv + \frac{(lq - nr)\,dt\,dv}{vv} - \frac{(lq - nr)\,dt\,dv}{vv} + \frac{dt}{v}\,d.(lq - nr).$$

Est vero
$$d\,(lq - nr) = \frac{-3\,Apqq\,dt + 3\,Cprr\,dt}{v^3} + \frac{dt}{vv}(lmr - llp - nnp + mnq);$$

quae ob $lr + nq = -mp$ abit in

$$d\,(lq - nr) = \frac{-3pdt}{v^3}(Aqq - Crr) - \frac{pdt}{vv}(ll + mm + nn),$$

Ita ut sit
$$ddx = pddv - \frac{pdt^2}{v^3}(ll + mm + nn) - \frac{3\,pdt^2}{v^4}(Aqq - Crr),$$

quae expressio aequalis est isti

$$\frac{-2g(M+N)\,pdt^2}{v^2}\left(1 + \frac{3\,(3aa + bb + cc)}{2vv} - \frac{15\,(aapp + bbqq + ccrr)}{2vv}\right).$$

Cum jam sit

$$Aqq - Crr = 2g\,(M+N)\,(aaqq - bbqq - ccrr + aarr) = 2g\,(M+N)\,(aa - aapp - bbqq - ccrr),$$

erit
$$ddv = \frac{dt^2\,(ll + mm + nn)}{v^3} - \frac{2g\,(M+N)\,dt^2}{v^2}\left(1 + \frac{3(aa + bb + cc) - 9\,(aapp + bbqq + ccrr)}{2vv}\right),$$

quae, aequationem integralem per dv multiplicando, facile reducitur.

En ergo octo variabiles t, v, l, m, n, p, q, r, quas determinari oportet ope harum aequationum:

1. $pp + qq + rr = 1$, 2. $lr + mp + nq = 0$

3. $dp = \frac{(lq - nr)\,dt}{vv}$, 6. $dl = \frac{-6g\,(aa - bb)\,(M+N)\,pq\,dt}{v^3}$

4. $dq = \frac{(mr - lp)\,dt}{vv}$, 7. $dm = \frac{-6g\,(bb - cc)\,(M+N)\,qr\,dt}{v^3}$

5. $dr = \frac{(np - mq)\,dt}{vv}$, 8. $dn = \frac{-6g\,(cc - aa)\,(M+N)\,pr\,dt}{v^3}$

9. $rdl + pdm + qdn = 0$, 10. $ldr + mdp + ndq = 0$

11. $ccrdl + aapdm + bbqdn = 0$,

cum quibus aequationem vel differentio-differentialem $dd\varphi$, vel integralem inde natam combi... oportet.

134. **Problema.** (Fig. 172). Si corpus M, quod ut quiescens spectatur, habeat mom... inertiae principalia respectu axium JA et JB aequalia, idque sive quiescat, sive ci... axem tertium JC gyretur, definire ejus respectu motum alterius corporis sphaerici N...

Solutio. Retentis omnibus denominationibus, quas in problemate praecedente constituimus ... $bb = aa$, aequatio nostra integralis erit

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = Ddt^2 + 4g(M+N)\,dt^2\left(\frac{1}{\varphi} + \frac{2aa+cc}{2\varphi^3} - \frac{3aa(xx+yy) - 3cczz}{2\varphi^5}\right).$$

Praeterea vero habebimus has duas

$$yddx - xddy = 0 \quad \text{et} \quad xddz - zddx = \frac{-6g(cc-aa)(M+N)\,xz\,dt^2}{\varphi^5}$$

existente $xx + yy + zz = \varphi\varphi$, quarum illa integrata praebet $ydx - xdy = Edt$. Statuamus praeter... $zdy - ydz = qdt$ et $xdz - zdx = rdt$, eritque

$$dq = \frac{6g(cc-aa)(M+N)\,yz\,dt}{\varphi^5} \quad \text{et} \quad dr = \frac{-6g(cc-aa)(M+N)\,xz\,dt}{\varphi^5},$$

ita ut sit $xdq + ydr = 0$. Tum vero ex illis tribus formulis colligimus $Ez + qx + ry = 0$, atque insuper $(EE + qq + rr)\,dt^2 = \varphi\varphi(dx^2 + dy^2 + dz^2) - \varphi\varphi\,d\varphi^2$, hincque

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\varphi^2 + \frac{(EE+qq+rr)\,dt^2}{\varphi\varphi}.$$

Ex aequationibus $Ez + qx + ry = 0$ et $xx + yy + zz = \varphi\varphi$ concludimus

$$x = \frac{-Eqz + r\sqrt{((qq+rr)\varphi\varphi - (EE+qq+rr)zz)}}{qq+rr}, \quad y = \frac{-Erz - q\sqrt{((qq+rr)\varphi\varphi - (EE+qq+rr)zz)}}{qq+rr}.$$

Deinde vero habemus $dz = \frac{zd\varphi}{\varphi} - \frac{(qy - rx)dt}{\varphi\varphi}$, ideoque

$$dz = \frac{zd\varphi}{\varphi} + \frac{dt}{\varphi\varphi}\sqrt{((qq+rr)\varphi\varphi - (EE+qq+rr)zz)} \quad \text{et} \quad d\cdot\frac{z}{\varphi} = \frac{dt}{\varphi\varphi}\sqrt{\left(qq + rr - \frac{(EE+qq+rr)z...}{\varphi\varphi}\right.}$$

Aequatio autem prima hinc reducitur ad hanc formam

$$d\varphi^2 = Ddt^2 - \frac{(EE+qq+rr)\,dt^2}{\varphi\varphi} + 4g(M+N)\,dt^2\left(\frac{1}{\varphi} + \frac{(cc-aa)(\varphi\varphi - 3zz)}{2\varphi^5}\right).$$

Ponamus $z = u\varphi$, $q = s\cos\omega$ et $r = s\sin\omega$, eritque

$$d\varphi^2 = Ddt^2 - \frac{(EE+ss)\,dt^2}{\varphi\varphi} + 4g(M+N)\,dt^2\left(\frac{1}{\varphi} + \frac{(cc-aa)(1-3uu)}{2\varphi^3}\right)$$

atque $du = \frac{dt}{\varphi\varphi}\sqrt{(ss - (EE+ss)uu)}$; tum vero

$$x = \frac{-E\cos\omega + \sin\omega\sqrt{(ss - (EE+ss)uu)}}{s}\cdot\varphi, \quad y = \frac{-E\sin\ \ -\cos\omega\sqrt{(ss - (EE+ss)uu)}}{s}\cdot\varphi,$$

unde differentialia dq et dr supra definita dant

$$ds = -6g\,(cc-aa)\,(M+N)\cdot\frac{udt}{sv^3}\sqrt{(ss-(EE+ss)\,uu)},$$

$$sd\omega = +6g\,(cc-aa)\,(M+N)\cdot\frac{Eudt}{sv^3}.$$

Eliminato ergo dt primo pro determinatione harum trium quantitatum v, u, s hae duae aequationes oriuntur

$$dv^2\,(ss-(EE+ss)\,uu) = du^2\left(Dv^4-(EE+ss)\,vv+4g\,(M+N)\,v\,\left(v^2+\tfrac{1}{2}(cc-aa)\,(1-3uu)\right)\right)$$

$$\text{et}\quad sds = -6g\,(cc-aa)\,(M+N)\,\frac{udu}{v},$$

quae si resolvi possent, ex iis deinceps angulus ω et tempus t facile determinaretur. Sed vereor ne [illegible] labor hic nequicquam consumatur.

135. Scholion. Neque ergo hunc casum, etiamsi in suo genere facilis videatur, calculus expedire sinit. Verum si ponamus corpus B in ipso plano AJB, in quod axes principales aequalia momenta inertiae habentes incidunt, moveri, calculi difficultates superare licet, qui casus propterea meretur, ut omni cura evolvatur. Cum autem corpus M ita comparatum accipiatur, ut bina momenta inertiae, quae axibus JA et JB respondent, sint inter se aequalia, ei quasi unicus axis JC relinquitur, quoniam omnes axes in plano AJB assumti pari proprietate sunt praediti, sectionem per hoc planum factam tanquam aequatorem corporis spectare poterimus, praecipue cum corpori motum rotatorium quemcunque circa axem JC tribuere liceat. Quomodocunque scilicet corpus M circa axem JC gyretur, si alterum corpus B in ipso ejus aequatoris plano AJB moveatur, motum ejus calculo definire poterimus, id quod in sequente problemate praestabimus.

136. Problema. (Fig. 182.) Si corpus M, momenta inertiae respectu axium JA et JB aequalia habens, utcunque gyretur circa axem JC, alterumque corpus N in ipso illius plano aequatoris AJB moveatur, hujus motum respectivum definire.

Solutio. Cum sit $bb = aa$, omnia momenta inertiae ad axes in plano aequatoris sumtos relata sunt $= Maa$, momentum inertiae autem respectu axis $JC = Mcc$, circa quem corpus gyratur. Deinde ob applicatam $z = 0$, si corpus N in plano aequatoris tempore $= t$ confecerit arcum AN, ponamusque coordinatas $JX = x$, $XN = y$ et distantiam $JN = v$, ut sit $xx + yy = vv$, motus quaesitus his duabus aequationibus continetur

$$dx^2+dy^2 = Ddt^2+4g\,(M+N)\,dt^2\left(\frac{1}{v}+\frac{2aa+cc}{2v^3}-\frac{3aa}{2v^3}\right)\quad\text{et}\quad ydx-xdy = Edt.$$

Cum ergo sit $ydy+xdx = vdv$, erit $EEdt^2+vvdv^2 = (yy+xx)\,(dx^2+dy^2) = vv\,(dx^2+dy^2)$, ideoque

$$dv^2+\frac{EEdt^2}{vv} = Ddt^2+4g\,(M+N)\,dt^2\left(\frac{1}{v}+\frac{cc-aa}{2v^3}\right)\quad\text{et}$$

$$dt = \frac{vdv}{\sqrt{\left(Dvv+4g\,(M+N)\,v-EE+\frac{2g\,(cc-aa)\,(M+N)}{v}\right)}}.$$

Praeterea vero posito angulo $AJN = \varphi$, ut sit $x = \rho\cos\varphi$ et $y = \rho\sin\varphi$, erit $ydx - xdy = -\rho\rho d\varphi$ hincque sumto E negativo, $d\varphi = \frac{Edt}{\rho\rho}$, ac propterea

$$d\varphi = \frac{Ed\rho}{\rho\sqrt{\left(D\rho\rho + 4g(M+N)\rho - EE + \frac{2g(cc-aa)}{\rho}(M+N)\right)}}.$$

Statuamus $\rho = \frac{f}{u}$, ut obtineamus $dt = \frac{ffd\varphi}{Euu}$ et

$$d\varphi = \frac{-Edu}{\sqrt{\left(Dff + 4g(M+N)fu - EEuu + \frac{2g}{f}(cc-aa)(M+N)u^3\right)}}.$$

Ponamus $u = 1 + n\cos s$, ut ob $du = -nds\sin s$, differentiale du et propterea etiam $d\rho$ duobus casibus evanescat: $s = 0$ et $s = 180^0$, ac necesse est, ut quoque denominator seu formula irrationalis evanescat iisdem casibus, quod fieri nequit, nisi ea factorem habeat $\sin s$. Facta autem substitutione $u = 1 + n\cos s$, quantitas signo radicali involuta abit in hanc formam, posito brevitatis causa $\frac{2g}{f}(cc-aa)(M+N) = L$

$$\begin{array}{llll}
Dff & & & \\
+4g(M+N)f & +4ng(M+N)f\cos s & & \\
-EE & -2nEE\cos s & -nnEE\cos^2 s & \\
+L & +3nL\cos s & +3nnL\cos^2 s & +n^3L\cos^3 s
\end{array}$$

scribamus pro $\cos^2 s$ valorem $1 - \sin^2 s$, ut sit $\cos^3 s = \cos s - \sin^2 s\cos s$, fietque haec quantitas

$$\begin{array}{l}
+Dff + 4g(M+N)f - (1+nn)EE + (1+3nn)L \\
+(4ng(M+N)f - 2nEE + n(3+nn)L)\cos s \\
+nn(EE - 3L - nL\cos s)\sin^2 s
\end{array}$$

ac membra a $\sin^2 s$ immunia seorsim ad nihilum reducantur, ut constantes D et E per integrationes inductae per constantes novas assumtas f et n determinentur, quo pacto obtinebimus

$$EE = 2fg(M+N) + \tfrac{1}{2}(3+nn)L$$

$$\text{et}\quad Dff + 2(1-nn)fg(M+N) - \tfrac{1}{2}(1-nn)^2 L = 0,$$

$$\text{seu}\quad Dff = -2(1-nn)fg(M+N) + \tfrac{1}{2}(1-nn)^2 L,$$

unde denominator irrationalis prodit

$$n\sin s\sqrt{(2fg(M+N) - \tfrac{1}{2}(3-nn)L - nL\cos s)}$$

hincque

$$d\varphi = \frac{Eds}{\sqrt{(2fg(M+N) - \frac{1}{2}(3-nn)L - nL\cos s)}}$$

$$\text{et}\quad dt = \frac{ffds}{(1+n\cos s)^2\sqrt{(2fg(M+N) - \frac{1}{2}(3-nn)L - nL\cos s)}},$$

unde haud difficulter quantitates φ et t per variabilem s, ex eaque etiam $\rho = \frac{f}{1+n\cos s}$ definire licet.

137. **Coroll. 1.** Si $n = 0$, ob $v = f$ corpus N in circulo circa J revolvetur motu uniformi, atque celeritas angularis

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{E}{ff} = \frac{1}{ff} \sqrt{\left(2fg\,(M + N) + \frac{3g}{f}(cc - aa)(M + N)\right)}$$

posito pro L ejus valore, ex quo haec celeritas erit quoque

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{2g\,(M + N)}}{f\sqrt{f}} \sqrt{\left(1 + \frac{3\,(cc - aa)}{2ff}\right)}.$$

138. **Coroll. 2.** At si $n > 1$, corpus N ita movebitur, ut absolutis angulis $s = 0^0$, 360^0, 2.360^0, 3.360^0, etc. semper ad eandem distantiam minimam $v = \frac{f}{1 + n}$ revertatur, angulis autem $s = 180^0$, 3.180^0, 5.180^0, etc. absolutis, ad distantiam maximam $v = \frac{f}{1 - n}$ perveniat. Illis scilicet casibus in abside ima, his vero in abside summa versabitur.

139. **Coroll. 3.** Cum autem anguli s non sint angulis φ aequales, loca absidum non iisdem angulis $AJN = \varphi$ successive respondebunt, unde hoc motu linea absidum mobilis est censenda, numerus vero n, quo discrimen inter distantiam maximam et minimam definitur, haud incongrue excentricitas, angulus s vero anomalia vera dicetur.

140. **Coroll. 4.** Si pro L valorem assumtum restituamus, erit

$$d\varphi = \frac{ds \sqrt{1 + \frac{(3 + nn)\,(cc - aa)}{2ff}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{(3 - nn)\,(cc - aa)}{2ff} - \frac{n\,(cc - aa)\cos s}{ff}\right)}}$$

et

$$dt \sqrt{2fg\,(M + N)} = \frac{ffds}{(1 + n\cos s)^2 \sqrt{\left(1 - \frac{(3 - nn)\,(cc - aa)}{2ff} - \frac{n\,(cc - aa)\cos s}{ff}\right)}}.$$

Ab harum ergo duarum formularum integratione tota problematis solutio pendet.

141. **Scholion 1.** Fieri posse videtur, ut formulae hae irrationales adeo fiant imaginariae, id quod etiam in formula $\sqrt{\left(1 + \frac{3\,(cc - aa)}{2ff}\right)}$ locum haberet, si esset $2ff + 3cc < 3aa$, quo casu vis attractrix in distantia f, quae est $= \frac{MN}{ff}\left(1 + \frac{3\,(cc - aa)}{2ff}\right)$, fuerit negativa, quod utique est absurdum. Verum meminisse oportet formulas, quas supra pro vi attractrice invenimus, expressis verbis ex hac hypothesi esse deductas, quod distantia, quae hic est $= f$, fit praegrandis prae corporis attrahentis magnitudine, a qua litterae a et c pendent. Quare in omnibus his solutionibus hoc primarium est requisitum, ut quantitas f vehementer excedat a et c, hincque fractio $\frac{cc - aa}{ff}$ semper sit quam minima. Atque ob hanc causam formulae inventae semper realiter motum quaesitum pro nostro quidem instituto definire sunt censendae. Si enim motus ita esset comparatus, ut corpus N nimis prope ad alterum accederet, tum ne quidem ejus determinationem hic quidem suscipere liceret.

142. **Scholion 2.** Cum igitur quantitas $\frac{cc - aa}{ff}$ per hypothesin sit valde exigua, approximationibus adhibendis adipiscemur has formulas

$$d\varphi = ds\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2ff} + \frac{n(cc-aa)}{2ff}\cos s\right)$$

et $$dt\sqrt{2fg}\,(M+N) = \frac{ffds}{(1+n\cos s)^2}\left(1 + \frac{(3-nn)(cc-aa)}{4ff} + \frac{n(cc-aa)}{2ff}\cos s\right),$$

quarum illius integrale est

$$\varphi = \text{Const.} + \left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2ff}\right)s + \frac{n(cc-aa)}{2ff}\sin s,$$

altera vero, prout excentricitas n fuerit unitate vel minor vel major vel eidem aequalis, singulari modo integrari debet, pro quo negotio ea in hanc formam transfundatur

$$dt\sqrt{2fg}\,(M+N) = \frac{ffds}{(1+n\cos s)^2}\left(1 + \frac{(1-nn)(cc-aa)}{4ff} + \frac{(cc-aa)\,ds}{2(1+n\cos s)}\right).$$

Jam vero casu $n < 1$ supra ostendimus esse

$$\int\frac{ds}{1+n\cos s} = \frac{1}{\sqrt{(1-nn)}}\,\text{Arc.}\cos\frac{n+\cos s}{1+n\cos s}$$

et $$\int\frac{ds}{(1+n\cos s)^2} = \frac{1}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}}\,\text{Arc.}\cos\frac{n+\cos s}{1+n\cos s} - \frac{n\sin s}{(1-nn)(1+n\cos s)},$$

deinde casu, quo $n = 1$,

$$\int\frac{ds}{1+\cos s} = \frac{\sin s}{1+\cos s} \quad \text{et} \quad \int\frac{ds}{(1+\cos s)^2} = \frac{(2+\cos s)\sin s}{3(1+\cos s)^2}.$$

Tum vero casu, quo $n > 1$,

$$\int\frac{ds}{1+n\cos s} = \frac{1}{\sqrt{(nn-1)}}\log\cdot\frac{n+\cos s+\sin s\sqrt{(nn-1)}}{1+n\cos s},$$

$$\int\frac{ds}{(1+n\cos s)^2} = \frac{n\sin s}{(nn-1)(1+n\cos s)} - \frac{1}{(nn-1)^{\frac{3}{2}}}\log\cdot\frac{n+\cos s+\sin s\sqrt{(nn-1)}}{1+n\cos s}.$$

Hinc ergo pro casu $n < 1$ habebimus

$$t\sqrt{2fg}\,(M+N) = \frac{ff}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}}\text{Arc.}\cos\frac{n+\cos s}{1+n\cos s} - \frac{nff\sin s}{(1-nn)(1+n\cos s)}$$

$$+ \frac{3(cc-aa)}{4\sqrt{(1-nn)}}\text{Arc.}\cos\frac{n+\cos s}{1+n\cos s} - \frac{n(cc-aa)\sin s}{4(1+n\cos s)}.$$

Tum vero pro casu $n = 1$

$$t\sqrt{2fg}\,(M+N) = \frac{ff(2+\cos s)\sin s}{3(1+\cos s)^2} + \frac{(cc-aa)\sin s}{2(1+\cos s)}.$$

Ac denique pro casu $n > 1$

$$t\sqrt{2fg}\,(M+N) = \frac{nff\sin s}{(nn-1)(1+n\cos s)} - \frac{ff}{(nn-1)^{\frac{3}{2}}}\log\cdot\frac{n+\cos s+\sin s\sqrt{(nn-1)}}{1+n\cos s}$$

$$- \frac{n(cc-aa)\sin s}{4(1+n\cos s)} + \frac{3(cc-aa)}{4\sqrt{(nn-1)}}\log\cdot\frac{n+\cos s+\sin s\sqrt{(nn-1)}}{1+n\cos s}.$$

Hunc quidem casum, quo $n > 1$, quoniam in mundo nusquam locum habere videtur, relinquentes, alterum, quo $n < 1$ accuratius persequamur, et quo pacto motus commodissime definiri atque ad datum tempus assignari possit, videamus. Manifestum autem est hunc motum parum a motu in ellipsi facto, quem supra exposuimus, fore diversum.

143. **Problema.** Determinationem motus, quo corpus N in casu praecedentis problematis circa corpus M in plano aequatoris revolvitur, ad calculum revocare.

Solutio. Primo cum s exprimat anomaliam veram corporis N, hoc est ejus longitudinem ab abside ima computatam, littera vero φ longitudinem veram denotet a directione quapiam fixa computatam, ab eadem hac directione fixa longitudo absidis imae erit $= \varphi - s$, quae ergo ita definiatur, sit

$$\varphi - s = \text{Const.} + \frac{(cc - aa)(3s + n \sin s)}{2ff},$$

unde patet lineam absidum non quiescere, sed in consequentia proferri, si sit $cc > aa$; sin autem fuerit $cc < aa$, retro moveri. Corpus scilicet N ab abside ima egressum ad absidem summam appellet confecto angulo $\varphi = \left(1 + \frac{3(cc - aa)}{2ff}\right) 180^0$, hoc est majori quam 180^0 si $cc > aa$; contra autem minori si $cc < aa$. In genere autem inventa anomalia vera $= s$, erit longitudo

$$\varphi = \text{Const.} + \left(1 + \frac{3(cc - aa)}{2ff}\right) s + \frac{n(cc - aa)}{2ff} \sin s.$$

Sin autem anomaliam veram s spectemus ut datam, erit distantia $JN = v = \frac{f}{1 + n \cos s}$, ubi f contemplamur ut semiparametrum orbitae, et n ejus excentricitatem, etiamsi orbita non sit elliptica. Tum vero pro relatione inter tempus t et anomaliam veram s commode exprimenda introducatur anomalia excentrica σ, ita ut sit

$$\cos \sigma = \frac{n + \cos s}{1 + n \cos s} \quad \text{et} \quad \sin \sigma = \frac{\sin s \sqrt{(1 - nn)}}{1 + n \cos s},$$

unde vicissim ex data σ fit

$$\cos s = \frac{\cos \sigma - n}{1 - n \cos \sigma} \quad \text{et} \quad \sin s = \frac{\sin \sigma \sqrt{(1 - nn)}}{1 - n \cos \sigma}.$$

His positis habebimus

$$t \sqrt{2fg}\,(M + N) = \text{Const.} + \frac{ff(\sigma - n \sin \sigma)}{(1 - nn)\sqrt{(1 - nn)}} + \frac{(cc - aa)(3\sigma - n \sin \sigma)}{4\sqrt{(1 - nn)}},$$

unde vicissim pro dato tempore t primo anomalia excentrica σ, ex hacque porro vera s, hincque tam longitudo φ quam distantia $JN = v$ definiri poterit.

144. **Coroll. 1.** Cum fractio $\frac{cc - aa}{ff}$ sit quam minima, motus lineae absidum erit tardissimus, atque singulis revolutionibus corporis N tantum per angulum $\frac{3(cc - aa)}{2ff} \cdot 360^0 = \frac{cc - aa}{ff} \cdot 540^0$ progredietur.

145. **Coroll. 2.** Tempus porro integrae revolutionis, quo corpus ab abside vel ima vel summa egressum iterum ad eandem revertitur, confecto angulo $\varphi = \left(1 + \frac{3(cc - aa)}{2ff}\right) 360^0$, reperitur

ponendo $s=360^\circ$, unde fit quoque $\sigma=360^\circ=2\pi$. Ex quo tempus unius revolutionis erit

$$=\frac{2\pi ff}{(1-nn)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2fg(M+N)}}+\frac{3\pi(cc-aa)}{2(1-nn)^{\frac{1}{2}}\sqrt{2fg(M+N)}},$$

vel posito semiaxe transverso $\frac{f}{1-nn}=k$, fiet hoc tempus $=\frac{\pi}{\sqrt{2g(M+N)}}\left(2k\sqrt{k}+\frac{3(cc-aa)}{2(1-nn)\sqrt{k}}\right)$.

146. **Coroll. 3.** Si anomaliam mediam seu angulum tempori proportionalem, qui absoluta una revolutione evadat $=360^\circ$, introducamus, eamque ponamus $=\tau$, debet esse

$$t\sqrt{2fg(M+N)}=\tau\left(\frac{ff}{(1-nn)\sqrt{(1-nn)}}+\frac{3(cc-aa)}{4\sqrt{(1-nn)}}\right),$$

hincque fiet

$$\tau=\sigma-n\left(1-\frac{(1-nn)(cc-aa)}{2ff}\right)\sin\sigma,$$

unde, ut supra, facile ex data anomalia media τ anomalia excentrica σ colligitur.

147. **Scholion 1.** Ut intelligamus quanta hujusmodi perturbatio ob figuram corporum coelestium non sphaericam oriri debeat, tribuamus corpori M, quod ex materia constet homogenea, figuram sphaeroidis elliptici, revolutione ellipsis circa axem CJ geniti, cujus alter semiaxis JC, circa quem fit revolutio, sit $=C$, alter vero seu semidiameter aequatoris $=A$, ita ut hoc sphaeroides sit compressum si $A>C$, elongatum vero si $A<C$. Jam supra § 44 vidimus fore pro nostris momentis inertiae $aa=bb=\frac{1}{5}(AA+CC)$ et $cc=\frac{2}{5}AA$, unde fit $cc-aa=\frac{1}{5}(AA-CC)$. Corpus ergo sphaeroidicum compressum, cujusmodi est sol et terra ac sine dubio omnes planetae principales, efficit, ut lineae absidum progrediantur, quae regrederentur, si sphaeroides esset oblongum. Jam in terra est quasi $A=\frac{201}{200}C$ et $AA-CC=\frac{1}{100}CC$, ergo $cc-aa=\frac{1}{500}CC$. Hinc si statuatur $f=60C$, ut fere evenit in luna, erit $\frac{cc-aa}{ff}=\frac{1}{500.60.60}$. Quare hinc linea absidum orbitae lunaris singulis revolutionibus seu mensibus progrederetur per $\frac{1}{500.60.60}\cdot 540^\circ=1''\,5'''$, et unius anni intervallo per $14''$, qui effectus prae eo, qui ab aliis causis oritur, facile negligi potest. In sole autem $cc-aa$ multo minus est quam $\frac{1}{500}CC$, unde in planetis primariis hinc nulla perturbatio sensibilis oriri est censenda. In Jove autem, quia ob tam celerem motum vertiginis est circiter $A=\frac{11}{10}C$, erit $AA-CC=\frac{1}{5}CC$ hincque $cc-aa=\frac{1}{25}CC$. Cum jam pro primo satellite sit quasi $f=6C$, una revolutione hujus satellitis linea absidum progreditur per angulum $\frac{1}{25.6.6}\cdot 540^\circ=36'$, siquidem orbitam ejus in plano aequatoris Jovis statuamus, unde cum hic effectus producatur tempore 42 horarum, intervallo unius diei erit $20'$ et unius anni $121^\circ\,45'$, cujusmodi velox absidum motus nusquam alibi est observatus; in reliquis autem Jovis satellitibus multo minor esse debet, ob majorem eorum distantiam. At Saturnus, si annulum cum eo conjunctim spectemus, referet sphaeroides multo magis compressum, ex quo in ejus satellitibus multo velocior motus absidum generari debet. Hic certe maxime notatu est dignum in orbitis satellitum Jovis, ac praecipue primi, tam enormem

mobilium mutabilitatem inesse debere, quae tantum a figura Jovis non sphaerica proficiscatur; quod phaenomenon si per observationes confirmari posset, mirifice theoriae attractionis universalitatem confirmaret.

178. **Scholion 2.** Quanquam in hoc motu, quem hic definivimus, tam via a corpore descripta quam temporis ratio areis proportionalis maxime est transcendens, tamen calculum ita commode administrare licuit, ut determinatio motus vix difficilior, quam in casu ellipsis simplicis evaderet. Totum scilicet discrimen huc est perductum, ut linea absidum mobilis statueretur, dum reliqua omnia prorsus cum motu elliptico supra exposito conveniunt. Hoc compendio Astronomi jam dudum feliciter sunt usi, dum motus planetarum primariorum ita repraesentant, ac si in ellipsibus mobilibus circa solem revolverentur, in motu autem lunae insuper tam excentricitatem quam parametrum ellipsis variabilem statui oportere agnoverunt; quae idea eximium calculi alias intricatissimi compendium largitur. Atque non solum haec ita se habent, quando curva percursa sita est in eodem plano, sed etiam quando ejus planum est variabile; tum autem hujus variabilitatis rationem singulari modo ita ad quodpiam planum fixum referri convenit, ut ad quodvis tempus tam intersectio quam inclinatio planorum definiatur.

179. **Scholion 3.** Hoc modo approximationem institui conveniet, quando formulae analyticae, quibus motus determinatur, resolutionem non admittunt, quemadmodum in hoc capite usu venit, ubi hunc solum postremum casum, quo corpus M bina momenta inertiae respectu axium JA et JB aequalia habere, alterumque corpus N in ipso horum axium plano AJB moveri ponebatur, expedire licuit. Fundamentum autem hujus approximationis in hoc est situm, quod inter vires corpus N sollicitantes una prae ceteris eminet, quae ad punctum quasi fixum J dirigitur et quadratis distantiarum reciproce est proportionalis, reliquae autem vires prae hac sint valde exiguae. Tum enim motus corporis N non multum a ratione motus in sectione conica facti differet, cujus aberrationem autem ab ista lege definivisse sufficiet. Quemadmodum ergo his casibus ope approximationis ad solutionem pervenire liceat, in sequente capite generatim explicabimus, in quo duplex investigatio erit instituenda, prout motus corporis N vel in eodem plano absolvetur, vel secus.

Caput V.

Determinatio motus corporis, quando inter vires, quibus sollicitatur, una ad punctum fixum tendens, quadrato distantiae ab eo est reciproce proportionalis, reliquae vero vires prae illa sunt valde parvae.

180. **Problema.** (Fig. 182.) Si corpus N circa punctum quasi fixum J in eodem plano moveatur, atque ad id trahatur vi quadrato distantiae reciproce proportionali, praeterea vero a viribus quibuscunque illius respectu valde parvis, corporis motum definire.

Solutio. Elapso tempore T sit distantia $JN = \varrho$ et angulus $AJN = \varphi$, ut sint

$$JX = x = \varrho \cos\varphi \quad \text{et} \quad XN = y = \varrho \sin\varphi.$$