XIX.

Recherche des inégalités causées au mouvement des planètes par des forces quelconques.

---

1. Le plus difficile problème que la théorie de l'Astronomie offre de nos jours, est sans doute celui de déterminer les inégalités qui sont causées dans le mouvement des planètes par l'action des autres corps célestes. C'est de la solution de ce problème que dépend tant la détermination du vrai mouvement de la lune, que celle des inégalités qu'on observe dans les planètes de Jupiter et de Saturne. Or, bien qu'on ne remarque point des inégalités aussi sensibles dans les mouvements des autres planètes, il est cependant certain qu'elles n'en sont pas entièrement exemptes: le mouvement de leurs aphélies et de leurs noeuds, quelque lent qu'il soit, est une preuve suffisante que ces planètes aussi sont assujetties à des forces qui troublent les lois établies par Kepler.

2. Car si chaque planète n'était attirée que vers le soleil par une force réciproquement proportionnelle aux carrés de ses distances au soleil, il est demontré 1° que son mouvement se ferait toujours dans un même plan; 2° que son aphélie et son périhélie répondraient toujours aux mêmes points du ciel, et 3° que son orbite serait une ellipse parfaite dont l'un des foyers se trouverait dans le centre du soleil, ou bien, ce mouvement serait parfaitement conforme aux règles découvertes par Kepler. Par cette raison on dit, que le mouvement d'une planète présente des inégalités, en tant qu'il ne suit pas exactement ces règles, et qu'il s'en écarte ou par quelque mouvement de ses absides, ou de ses noeuds, ou par d'autres irrégularités dont son mouvement est affecté.

3. De là il est clair que le mouvement d'une planète sera irrégulier, lorsqu'elle est sollicitée ou vers le soleil, par une force qui ne suit pas exactement la raison réciproque des carrés des distances, ou encore par des forces qui ne sont pas dirigées vers le soleil. La même chose a aussi lieu dans la lune et les autres satellites, lorsque la force dont ils sont sollicités n'est pas dirigée vers le centre de leur planète principale, ou qu'elle n'est pas proportionnelle réciproquement au carré des distances. On aura donc, pour déterminer ces irrégularités, à résoudre le problème suivant.

Les forces dont un corps céleste est sollicité, étant données, trouver le mouvement de ce corps.

Suivant la théorie de Newton, on peut regarder ces forces comme connues, puisqu'on ne saurait plus douter, que tous les corps célestes ne s'attirent mutuellement en raison réciproque des carrés de leurs distances.

Pour résoudre cette question, il conviendra de considérer deux cas: l'un, où le mouvement du corps se fait toujours dans le même plan, ce qui arrive lorsque les forces sollicitantes se trouvent dans ce même plan. L'autre cas est plus général et comprend les mouvements qui ne s'effectuent point dans un même plan; ce qui arrive lorsque les forces sollicitantes ont des directions quelconques, dont la moyenne ne tombe pas dans le plan où le corps se meut à chaque instant. Or quel que soit le mouvement du corps, on peut toujours concevoir un plan dans lequel le mouvement ait lieu pendant un temps infiniment petit, et c'est à cette variation du plan, qu'il faut avoir égard dans la détermination du mouvement du second cas. Je tâcherai donc de développer les règles les plus sûres pour déterminer le mouvement dans l'un et l'autre cas, et je commencerai par le premier cas, puisqu'il est le plus simple et qu'il servira de guide pour la résolution de l'autre.

5. **Problème 1.** (Fig. 218) Le corps étant sollicité par des forces quelconques données qui le font décrire la ligne courbe AQ située dans le même plan, trouver les changements instantanés de ce mouvement.

Solution. Qu'on choisisse dans le plan où le mouvement se fait, un point fixe C auquel on rapporte le mouvement du corps. Pour cet effet, l'on tirera par le point C une ligne droite fixe CA, et l'on connaîtra pour chaque temps proposé, le vrai lieu du corps Q, lorsqu'on pourra assigner tant sa distance CQ au point fixe C, que l'angle ACQ qui exprimera en astronomie la longitude du corps Q. Soit donc la distance $CQ = x$ et l'angle $ACQ = \varphi$, et que t marque le temps écoulé depuis une certaine époque où cela arrive.

Ensuite, quelles que soient les forces qui sollicitent le corps en Q, puisque le mouvement se fait dans le plan ACQ, elles se pourront toujours réduire à deux forces, dirigées dans le même plan, dont l'une tend directement vers le point C selon QC, et l'autre selon la direction QV, perpendiculaire à QC. Comme il ne s'agit ici que de forces accélératrices, soit la force accélératrice

$$\text{selon } QC = P$$
$$\text{et celle qui agit selon } QV = Q$$

et ce sera de ces deux forces qu'il faudra déduire le mouvement du corps, ou les valeurs des lettres x et φ pour un temps quelconque.

Pour ramener cette recherche aux premiers principes de la Mécanique, on doit rapporter le mouvement à des coordonnées orthogonales: Qu'on tire à cet effet, du point Q sur la droite fixe CA, la perpendiculaire QP, et à cause de $CQ = x$ et l'angle $ACQ = \varphi$, on aura $CP = x \cos\varphi$ et $PQ = x \sin\varphi$, valeurs que nous désignerons, pour abréger,

$$\text{l'abscisse } CP = x\cos\varphi \text{ par } p$$
$$\text{l'ordonnée } PQ = x\sin\varphi \text{ par } q.$$

Qu'on décompose ensuite aussi les forces P et Q selon ces mêmes directions, et la force P suivant QC donnera une force selon QT parallèle à PC, $= P\cos\varphi$, et selon QP, $= P\sin\varphi$. De même l'autre force Q suivant QV donnera pour la direction QT la force négative $-Q\sin\varphi$, et pour la direction QP, la force $Q\cos\varphi$, à cause de l'angle $PQV = PCQ$. Donc le corps en Q sera sollicité

$$\text{selon } QT, \text{ par une force } = P\cos\varphi - Q\sin\varphi$$
$$\text{et selon } QP, \text{ par une force } = P\sin\varphi + Q\cos\varphi.$$

Maintenant, sachant ces forces accélératrices, ou plutôt retardatrices, puisqu'elles tendent à diminuer les coordonnées p et q, les principes de Mécanique nous fourniront, en prenant l'élément du temps pour constant, les deux formules suivantes:

$$\frac{2ddp}{dt^2} = -P\cos\varphi + Q\sin\varphi \quad \text{et} \quad \frac{2ddq}{dt^2} = -P\sin\varphi - Q\cos\varphi,$$

d'où nous tirons

$$ddq\cos\varphi - ddp\sin\varphi = -\tfrac{1}{2}Qdt^2 \quad \text{et} \quad ddq\sin\varphi + ddp\cos\varphi = -\tfrac{1}{2}Pdt^2.$$

Mais ayant $p = x\cos\varphi$ et $q = x\sin\varphi$, l'on aura

$$q\cos\varphi - p\sin\varphi = 0 \quad \text{et} \quad q\sin\varphi + p\cos\varphi = x;$$

donc en prenant les différentielles

$$dq\cos\varphi - dp\sin\varphi - qd\varphi\sin\varphi - pd\varphi\cos\varphi = dq\cos\varphi - dp\sin\varphi - xd\varphi = 0$$
$$dq\sin\varphi + dp\cos\varphi + qd\varphi\cos\varphi - pd\varphi\sin\varphi = dq\sin\varphi + dp\cos\varphi = dx,$$

on obtiendra les formules suivantes

$$dq\cos\varphi - dp\sin\varphi = xd\varphi \quad \text{et} \quad dq\sin\varphi + dp\cos\varphi = dx.$$

Prenons encore les différentielles, pour avoir

$$ddq\cos\varphi - ddp\sin\varphi - dqd\varphi\sin\varphi - dpd\varphi\cos\varphi = dxd\varphi + xdd\varphi$$

qui, à cause de $dq\sin\varphi + dp\cos\varphi = dx$, se change en

$$ddq\cos\varphi - ddp\sin\varphi = 2dxd\varphi + xdd\varphi.$$

De même, l'autre équation différentiée donne

$$ddq\sin\varphi + ddp\cos\varphi + dqd\varphi\cos\varphi - dpd\varphi\sin\varphi = ddx$$

qui, à cause de $dq\cos\varphi - dp\sin\varphi = xd\varphi$, se change en

$$ddq\sin\varphi + ddp\cos\varphi = ddx - xd\varphi^2.$$

Et partant nous aurons les deux équations différentio-différentielles suivantes, qui détermineront le mouvement du corps par les variables x et φ:

$$2dxd\varphi + xdd\varphi = -\tfrac{1}{2}Qdt^2$$

$$ddx - xd\varphi^2 = -\tfrac{1}{2}Pdt^2.$$

Il faut tâcher d'en tirer des équations simplement différentielles, ce qui pourra se faire de la manière suivante: Je multiplie d'abord la première par $2x^3d\varphi$, pour avoir

$$4x^3dxd\varphi^2 + 2x^4d\varphi dd\varphi = -dt^2. \quad Qx^3d\varphi$$

dont l'intégrale est

$$x^4d\varphi^2 = -dt^2 \int Qx^3d\varphi.$$

Ensuite, multipliant la première par $2xd\varphi$, et l'autre par $2dx$, leur somme sera:

$$4xdxd\varphi^2 + 2xxd\varphi dd\varphi + 2dxddx - 2xdxd\varphi^2 = -dt^2\,(Qxd\varphi + Pdx)$$

dont l'intégrale est:

$$dx^2 + xxd\varphi^2 = -dt^2 \int (Pdx + Qxd\varphi).$$

Posons pour abréger $-\int Qx^3d\varphi = X$ et $-\int (Pdx + Qxd\varphi) = Y$, et nous aurons

$$x^4d\varphi^2 = Xdt^2 \quad \text{et} \quad dx^2 + xxd\varphi^2 = Ydt^2$$

d'où nous tirons

$$Xdx^2 + Xxxd\varphi^2 = Yx^4d\varphi^2$$

et partant

$$d\varphi = \frac{dx\sqrt{X}}{x\sqrt{(Yxx - X)}} \quad \text{et} \quad dt = \frac{xxd\varphi}{\sqrt{X}} = \frac{xdx}{\sqrt{(Yxx - X)}}$$

ou bien

$$d\varphi = \frac{dt\sqrt{X}}{xx} \quad \text{et} \quad dx = \frac{dt}{x}\sqrt{(Yxx - X)}.$$

Par conséquent, nous connaissons, pour chaque élément dt du temps, les changements que subissent tant la longitude ou l'angle φ que la distance $CQ = x$.

6. **Coroll. 1.** Si l'on considère l'élément de la courbe Qq, décrit dans le temps dt, l'élément de l'aire ou le triangle QCq est $= \frac{1}{2}xxd\varphi$. Donc posant l'aire $ACQ = S$, on aura $xxd\varphi = 2dS = dt\sqrt{X}$ et $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{X}$. D'où l'on voit que si la force $QV = Q$ est évanouissante, à cause de $X = \text{const.} = C$, on aura $dS = \frac{1}{2}dt\sqrt{C}$, et partant $S = \frac{1}{2}t\sqrt{C}$, ou bien les aires ACQ seront proportionnelles aux temps pendant lesquels elles sont décrites.

7. **Coroll. 2.** On peut nommer $\frac{dS}{dt}$ la vitesse dont l'aire ACQ croît, ou bien la vitesse de la description des aires; donc cette vitesse sera $= \frac{1}{2}\sqrt{X}$ et le carré de cette vitesse $= \frac{1}{4}X$. Et partant, lorsque X n'est pas une quantité constante, ce qui arrive lorsque la force Q n'est pas $= 0$, la vitesse de la description des aires n'est pas constante, ou bien les aires ne seront pas proportionnelles aux temps.

8. **Coroll. 3.** Ensuite, l'élément de la courbe même étant $Qq = \sqrt{(dx^2 + xxd\varphi^2)}$, la vitesse du corps en Q sera

$$= \frac{\sqrt{(dx^2 + xxd\varphi^2)}}{dt} = \sqrt{Y},$$

donc la racine carrée de la quantité $Y = -\int (Pdx + Qxd\varphi)$ exprime la vitesse du corps en Q, et partant la quantité Y même le carré de cette vitesse.

*

9. **Coroll. 4.** Je remarque de plus, que la longitude $ACQ = \varphi$ va toujours en augmentant avec le temps t, à moins que ni x ne devienne infinie, ni la quantité X n'évanouisse. Cependant il peut arriver, que $\sqrt{X}$ étant devenue $= 0$, prenne ensuite une valeur négative, et alors le mouvement du corps sera rétrograde.

10. **Coroll. 5.** Ayant pour la différentielle de la distance $dx = \frac{dt}{x}\sqrt{(Yxx - X)}$, la distance ira en croissant, tandis que la valeur de la quantité $\sqrt{(Yxx - X)}$ demeure affirmative et jusqu'à ce qu'elle évanouisse. Ensuite, elle pourra devenir négative, et le corps se rapprochera du centre C. Dans ce cas, la distance x croîtra et décroîtra alternativement.

11. **Coroll. 6.** Il faut donc principalement avoir égard à la formule irrationelle $\sqrt{(Yxx - X)}$ en tant que sa valeur est tantôt affirmative, tantôt négative, et aux changements mêmes $= 0$. Or puisque le signe radical porte en soi l'ambigüité du signe $\pm$, et que les deux signes ne sauraient avoir lieu à la fois, il est absolument nécessaire de délivrer cette expression de toute ambiguité de signe.

12. **Scholie 1.** Le moyen le plus sûr pour fixer le signe de la quantité $\sqrt{(Yxx - X)}$ est sans doute, de la réduire au sinus d'un certain angle, puisque le sinus d'un angle variable peut subir les mêmes variations auxquelles cette formule est assujettie. Car posant $\sqrt{(Yxx - X)} = Z \sin v$, de sorte que $dx = \frac{Z \sin v}{x}\, dt$, on voit que tandis que l'angle v subsiste entre 0^0 et 180^0, la distance x va en croissant, et qu'elle diminue, lorsque l'angle v passe de 180 à 360^0. Donc quand l'angle v est $= 0$, la distance $CQ = x$ sera la plus petite; elle sera la plus grande lorsque v est de 180^0, c'est à dire qu'alors le corps passe par ses absides à l'égard du point C. De sorte que, si le point C est pris au centre du soleil, le corps Q se trouvera dans son périhélie lorsque $v = 0$, et dans son aphélie lorsque $v = 180^0$. Ainsi l'angle v est dans un certain rapport avec l'élongation du corps de ses absides, et exprime, par conséquent, ce qu'on nomme en Astronomie l'anomalie d'une planète. Car quoiqu'on ait plusieurs espèces d'anomalies, comme l'anomalie moyenne, l'anomalie excentrique et l'anomalie vraie, toutes conviennent en ce qu'elles évanouissent ou deviennent 180^0, lorsque le corps se trouve dans ses absides. C'est donc de la formule irrationelle $\sqrt{(Yxx - X)}$ qu'il faut tirer la détermination de l'anomalie du corps, de même que de la variabilité de la ligne des absides, s'il y en a.

13. **Scholie 2.** Mais il n'est presque pas possible de tirer en général de ces formules quelques conclusions d'où l'on puisse connaître le mouvement du corps. Car regardant les quantités P et Q qui expriment les forces, comme des fonctions quelconques de nos variables x, φ et t, les formules intégrales X et Y renferment déjà ce qui est en question, c'est à dire le rapport entre nos variables. Mais lorsque la force Q s'évanouit, et que la force P dépend uniquement de la distance x, la valeur de X deviendra constante, et Y marquera une fonction de x, de sorte que la formule irrationelle $\sqrt{(Yxx - X)}$ sera aussi fonction de x. En l'égalant donc à $Z \sin v$, on obtiendra la distance x exprimée par l'anomalie v, ce qui pourra se faire d'une infinité de manières différentes, puisque Z peut être prise à volonté; il sera donc aisé de choisir la manière qui

la plus convenable pour le calcul. Or quoique le corps Q, en tant qu'il représente une planète, soit sollicité par plusieurs forces, il s'en trouvera toujours une, dirigée selon QC et exprimée par une fonction de x, par rapport à laquelle les autres soient très petites; et c'est dans ce cas que nos formules pourront fournir des approximations assez propres pour nous représenter le vrai mouvement du corps.

Problème 2. Le corps étant d'abord attiré au point C par une force qui est réciproquement proportionnelle aux carrés de ses distances à ce point, et ensuite, par d'autres forces quelconques, très petites à l'égard de la première, et situées dans le plan du mouvement du corps, trouver la nature de ce mouvement.

Solution. Posant, comme auparavant, la distance $CQ = x$ et l'angle $ACQ = \varphi$, soit la première force agissant selon $QC = \frac{A}{xx}$, et, que les petites forces se réduisent à deux, P et Q, dont la première P soit dirigée vers QC, et l'autre Q vers QV, perpendiculaire à QC. Ainsi la force exprimée dans le problème précédent par P, sera ici $\frac{A}{xx} + P$, et la force Q sera Q. Nous aurons donc, comme auparavant, $X = -\int Qx^3 d\varphi$, et à cause de $\int \frac{-Adx}{xx} = \frac{A}{x}$, si nous posons $Y = -\int (Pdx + Qxd\varphi)$, ce que Y était ci-dessus, sera ici $Y + \frac{A}{x}$, X et Y renfermant les constantes qui entrent dans le calcul par ces deux intégrations. Mais on voit que les parties variables renfermées dans les lettres X et Y seront fort petites, puisqu'elles résultent des petites forces P et Q. Cela posé, nos deux équations différentielles, qui contiennent le mouvement du corps, seront

$$d\varphi = \frac{dt\sqrt{X}}{xx} \quad \text{et} \quad dx = \frac{dt}{x}\sqrt{(Yxx + Ax - X)}$$

où il faut remarquer, que si les petites forces P et Q étaient $= 0$, les quantités X et Y seraient constantes, et le corps décrirait une section conique autour du foyer C, selon les règles de Kepler. On aurait donc, dans ce cas,

$$x = \frac{b}{1 - g\cos v}$$

où b marquerait le demi-paramètre de la section, g l'excentricité, et v l'anomalie vraie, ou l'élongation de la plus haute abside. Gardons donc pour le cas proposé la même formule avec cette différence, que les quantités b et g ne soient plus constantes, mais variables; et il est évident, que leur variabilité dépendra des forces P et Q. Soit donc

$$x = \frac{p}{1 - q\cos v}$$

et par là nous introduisons, au lieu d'une variable x, trois nouvelles variables p, q et v, mais dont deux seront déterminées par cette condition, que la valeur de dx doit être exprimée par une telle formule $Zdt \sin v$, ou plutôt par $-Zdt\sin v$, parce que depuis l'angle $v = 0$, la distance x va en diminuant. Ayant donc

$$dx = \frac{dt}{x}\sqrt{(Yxx + Ax - X)}, \quad \text{ou} \quad dx = dt\sqrt{\left(Y + \frac{A}{x} - \frac{X}{xx}\right)}$$

et substituant pour x sa valeur $\frac{p}{1 - q\cos\varphi}$, nous aurons

$$dx = \frac{dt}{p}\sqrt{(ppY + Ap(1 - q\cos\varphi) - X(1 - q\cos\varphi)^2)}$$

Développons la quantité qui se trouve sous le signe radical, nous aurons

$$ppY + Ap - X - Apq\cos\varphi + 2qX\cos\varphi - qqX\cos^2\varphi$$

et faisons d'abord évanouir les termes qui contiennent $\cos\varphi$; nous aurons $Ap = 2X$, partant $p = \frac{2X}{A}$. Donc notre quantité sera

$$ppY + X - qqX\cos^2\varphi = ppY + X(1 - qq) + qqX\sin^2\varphi$$

et partant, afin que le seul terme $qqX\sin^2\varphi$ reste, posons

$$ppY + X(1 - qq) = 0, \quad \text{ou} \quad qq = 1 + \frac{Y}{X}pp$$

et ainsi nous aurons pour p et q les valeurs suivantes

$$p = \frac{2X}{A} \quad \text{et} \quad qq = 1 + \frac{4XY}{AA}$$

et pour dx nous aurons cette valeur

$$dx = -\frac{dt}{p}\sqrt{qqX\sin^2\varphi} = \frac{-qdt\sin\varphi}{p}\sqrt{X}$$

$$\text{et} \quad d\varphi = \frac{dt}{xx}\sqrt{X} = \frac{dt(1 - q\cos\varphi)^2}{pp}\sqrt{X}.$$

Mais puisque $x = \frac{p}{1 - q\cos\varphi}$, nous en tirons $q\cos\varphi = 1 - \frac{p}{x}$, et par la différentiation

$$dq\cos\varphi - qd\varphi\sin\varphi = \frac{-dp}{x} + \frac{pdx}{xx}; \quad \text{donc} \quad qd\varphi\sin\varphi = dq\cos\varphi + \frac{dp}{x} - \frac{pdx}{xx}$$

équation qui sert à déterminer l'anomalie φ. Pour cet effet, ayant déjà $dx = -\frac{qdt\sin\varphi}{p}\sqrt{X}$, il faut aussi chercher les valeurs des différentielles dp et dq. Or à cause de

$$dX = -Qx^3d\varphi = -Qxdt\sqrt{X}$$

$$\text{et} \quad dY = -Pdx - Qxd\varphi = \frac{Pqdt\sin\varphi}{p}\sqrt{X} - \frac{Qdt}{x}\sqrt{X}$$

nous aurons

$$dp = -\frac{2Qxdt}{A}\sqrt{X}.$$

Ensuite puisque $qq = 1 + \frac{4XY}{AA} = 1 + \frac{2pY}{A}$ et partant $\frac{2Y}{A} = \frac{qq}{p} - \frac{1}{p}$, nous aurons

$$\frac{2Pqdt\sin\varphi}{Ap}\sqrt{X} - \frac{2Qdt}{Ax}\sqrt{X} = \frac{dp}{pp}(1 - qq) + \frac{2qdq}{p}$$

et en resubstituant pour dp sa valeur trouvée

$$\frac{Pqdt\sin\varphi}{Ap}\sqrt{X} - \frac{Qdt}{Ax}\sqrt{X} = -\frac{Q(1 - qq)xdt}{App}\sqrt{X} + \frac{qdq}{p}$$

donc

$$dq = \frac{Pdt \sin v}{A}\sqrt{X} - \frac{Qxdt\sqrt{X}}{Aq}\left(\frac{p}{xx} - \frac{(1-qq)}{p}\right).$$

Or, à cause de $x = \frac{p}{1 - q\cos v}$ on aura

$$\frac{p}{xx} - \frac{1+qq}{p} = \frac{1 - 2q\cos v + qq\cos^2 v - 1 + qq}{p} = \frac{-2q\cos v + qq(1+\cos^2 v)}{p}$$

et partant

$$dq = \frac{Pdt\sin v}{A}\sqrt{X} + \frac{Qdt\sqrt{X}}{A}\left(\frac{2\cos v - q - q\cos^2 v}{1 - q\cos v}\right)$$

donc

$$dq\cos v + \frac{dp}{x} = \frac{Pdt\sin v\cos v}{A}\sqrt{X} - \frac{Qdt\sin^2 v\sqrt{X}}{A}\left(\frac{2 - q\cos v}{1 - q\cos v}\right).$$

Ces valeurs étant substituées pour dv, à cause de $\frac{-pdx}{xx} = \frac{qdt\sin v}{xx}\sqrt{X}$ donneront

$$dv = \frac{dt\sqrt{X}}{xx} + \frac{dt\sqrt{X}}{Aq}\left(P\cos v - Q\sin v\left(\frac{2 - q\cos v}{1 - q\cos v}\right)\right).$$

Donc posant $x = \frac{p}{1 - q\cos v}$, on aura les changements de toutes les quantités qui se rencontrent dans l'élément dt du temps, savoir

$$dx = -\frac{qdt\sin v}{p}\sqrt{X}, \qquad d\varphi = \frac{dt}{xx}\sqrt{X} = \frac{dt(1 - q\cos v)^2}{pp}\sqrt{X}$$

$$dp = -\frac{2Qxdt}{A}\sqrt{X}, \text{ ou } p = \frac{2X}{A}, \qquad dq = \frac{dt\sqrt{X}}{A}\left(P\sin v + 2Q\cos v - \frac{Qq\sin^2 v}{1 - q\cos v}\right)$$

$$dv = \frac{dt\sqrt{X}}{xx} + \frac{dt\sqrt{X}}{Aq}\left(P\cos v - 2Q\sin v - \frac{Qq\sin v\cos v}{1 - q\cos v}\right).$$

Si l'on met pour X sa valeur $\frac{1}{2}Ap$, on aura

$$dp = -\frac{2Q\,pdt}{A(1 - q\cos v)}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap}$$

et dans les autres formules on éliminera la quantité X.

15. **Coroll. 1.** Si les petites forces P et Q étaient $= 0$, on aurait tant $dp = 0$ que $dq = 0$, et partant le paramètre p et l'excentricité q seraient constants. De plus, on aurait $dv = d\varphi = \frac{dt}{xx}\sqrt{\frac{1}{2}Ap}$, et l'anomalie v croîtrait également avec la longitude φ, ou bien, la longitude φ serait égale à l'anomalie v, plus une quantité constante. Ce qui s'accorde parfaitement avec les lois du mouvement de Kepler.

16. **Coroll. 2.** Mais si les forces P et Q ne sont pas évanouissantes, ni le paramètre p, ni l'excentricité q ne sera constante. Le paramètre p se trouvera alors par l'intégration de cette équation

$$dp = -\frac{2Qpdt}{A(1 - q\cos v)}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap}$$

et l'excentricité q par l'intégration de celle-ci

$$dq = \frac{dt \sqrt{\frac{1}{2} Ap}}{A} \left(P \sin v + 2Q \cos v - \frac{Qq \sin^2 v}{1 - q \cos v}\right).$$

17. **Coroll. 3.** Pour l'anomalie v, elle se trouvera par l'intégration de cette équation

$$d v = \frac{dt\,(1 - q \cos v)^2}{pp} \sqrt{\tfrac{1}{2} Ap} + \frac{dt \sqrt{\frac{1}{2} Ap}}{Aq} \left(P \cos v - 2Q \sin v - \frac{Qq \sin v \cos v}{1 - q \cos v}\right).$$

Or ayant trouvé l'anomalie vraie v, avec le paramètre p et l'excentricité q, on aura de suite la vraie distance de Q au point fixe C, savoir $x = \frac{p}{1 - q \cos v}$.

18. **Coroll. 4.** Pour la longitude du corps, ou l'angle $ACQ = \varphi$, on la tirera de cette équation

$$d\varphi = \frac{dt\,(1 - q \cos v)^2}{pp} \sqrt{\tfrac{1}{2} Ap}.$$

Or quoique les variables p, q, v soient mêlées entre elles, on trouvera moyen de déterminer chacune puisqu'on sait le rapport de la différentielle de chacune à l'élément dt du temps.

19. **Coroll. 5.** Puisque l'angle v représente l'élongation du corps de l'aphélie (supposant en C le centre du soleil), si l'on prend $QC\alpha = v$, la droite $C\alpha$ passera par l'aphélie, et l'angle $AC\alpha = \varphi - v$ donnera la longitude de l'aphélie, pour laquelle on aura par conséquent

$$AC\alpha = \varphi - v = -\int \frac{dt \sqrt{\frac{1}{2} Ap}}{Aq} \left(P \cos v - 2Q \sin v - \frac{Qq \sin v \cos v}{1 - q \cos v}\right)$$

d'où l'on connaîtra les changements de l'aphélie, s'il y en a. Car si les forces P et Q étaient $= 0$, on aurait $\varphi - v = \text{const.}$, ou le lieu de l'aphélie α serait fixe.

20. **Coroll. 6.** Si le corps n'était sollicité que par la seule force $\frac{A}{xx}$, on aurait $p = b$ et $q = g$, et partant pour l'anomalie vraie v au temps donné $= t$, cette équation

$$dv = \frac{dt\,(1 - g \cos v)^2}{bb} \sqrt{\tfrac{1}{2} Ab}, \quad \text{ou} \quad dt \sqrt{\frac{A}{2b^3}} = \frac{dv}{(1 - g \cos v)^2}$$

dont l'intégrale est

$$t \sqrt{\frac{A}{2b^3}} = \frac{g}{1 - gg} \cdot \frac{\sin v}{1 - g \cos v} + \frac{1}{(1 - gg)^{\frac{3}{2}}} \text{arc.} \cdot \cos \frac{g - \cos v}{1 - g \cos v}.$$

Or si l'excentricité g est fort petite, il vaudra mieux se servir de cette intégrale

$$t \sqrt{\frac{A}{2b^3}} = (1 + \tfrac{3}{2} gg)\, v + 2g\,(1 + \tfrac{3}{2} gg) \sin v + \tfrac{3}{4} gg \sin 2v + \tfrac{1}{3} g^3 \sin 3v$$

et alors on aura $\varphi = \text{Const.} + v$ et $x = \frac{b}{1 - g \cos v}$.

21. **Scholie 1.** Si nous ajoutons à la force principale $\frac{A}{xx}$ encore la force $\frac{2\alpha}{x^3}$, et que nous retranchions cette même force de P, pour conserver le même cas que nous avons développé dans

le problème, nous obtiendrons des formules plus générales pour la résolution du même problème. Car ayant comme auparavant

$$d\varphi = \frac{dt\sqrt{X}}{xx} \quad \text{et} \quad dx = dt\sqrt{\left(Y + \frac{A}{x} + \frac{\alpha}{xx} - \frac{X}{xx}\right)},$$

nous n'avons qu'à écrire $P - \frac{2\alpha}{x^3}$ au lieu de P. Posant donc $x = \frac{p}{1 - q\cos\nu}$, la formule irrationelle nous fournit $X = \alpha + \frac{1}{2}Ap$ et $Y = \frac{-A(1-qq)}{2p}$, pour avoir

$$dx = \frac{-qdt\sin\nu}{p}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap} \quad \text{et} \quad d\varphi = \frac{dt(1-q\cos\nu)^2}{pp}\sqrt{(\alpha + \tfrac{1}{2}Ap)}.$$

Ensuite différentions les valeurs X et Y, et nous aurons

$$dX = -Qx^3 d\varphi = -\frac{Qpdt}{1-q\cos\nu}\sqrt{(\alpha + \tfrac{1}{2}Ap)} = \tfrac{1}{2}Adp$$

$$dY = -Pdx + \frac{2\alpha dx}{x^3} - Qxd\varphi = \frac{Pqdt\sin\nu}{p}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap} - \frac{2\alpha qdt\sin\nu}{px^3}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap} - \frac{Qdt(1-q\cos\nu)}{p}\sqrt{(\alpha + \tfrac{1}{2}Ap)}$$

Or $$dY = \frac{Adp(1-qq)}{2pp} + \frac{Aqdq}{p} = -\frac{Qdt(1-qq)}{p(1-q\cos\nu)}\sqrt{(\alpha + \tfrac{1}{2}Ap)} + \frac{Aqdq}{p}$$

à cause de $\frac{1}{2}Adp = -\frac{Qpdt}{1-q\cos\nu}\sqrt{(\alpha + \frac{1}{2}Ap)}$. Donc

$$\frac{Aqdq}{p} = \frac{qdt\sin\nu}{p}\left(P - \frac{2\alpha}{x^3}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap} + \frac{Qdt\sqrt{(\alpha + \frac{1}{2}Ap)}}{p(1-q\cos\nu)}\left(1 - qq - (1-q\cos\nu)^2\right)$$

ou bien

$$dp = \frac{-2Qpdt\sqrt{(\alpha + \frac{1}{2}Ap)}}{A(1-q\cos\nu)}$$

$$dq = \frac{dt\sin\nu}{A}\left(P - \frac{2\alpha}{x^3}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap} + \frac{Qdt}{A}\left(2\cos\nu - \frac{q\sin^2\nu}{1-q\cos\nu}\right)\sqrt{(\alpha + \tfrac{1}{2}Ap)}.$$

Enfin, parce que $qd\nu\sin\nu = dq\cos\nu + \frac{dp}{x} - \frac{pdx}{xx}$, nous aurons en substituant pour dq, dp et dx les valeurs trouvées

$$d\nu = \frac{dt(1-q\cos\nu)^2}{pp}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap} + \frac{dt\cos\nu}{Aq}\left(P - \frac{2\alpha}{x^3}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap} - \frac{Qdt}{Aq}\left(2\sin\nu + \frac{q\sin\nu\cos\nu}{1-q\cos\nu}\right)\sqrt{(\alpha + \tfrac{1}{2}Ap)}$$

où l'on peut prendre pour α une quantité constante quelconque, ce qui aura dans la suite un très grand avantage. Car, puisque l'excentricité q est à l'ordinaire fort petite, les termes dans l'expression de $d\nu$, qui sont divisés par q, pourraient devenir fort grands; alors on prendra pour α une telle valeur qui rende ces termes aussi petits qu'il sera possible.

22. **Scholie 2.** Il n'est pas même nécessaire que α soit une quantité constante; car posant $\frac{\alpha}{xx} = V$, ou $\alpha = Vxx$, on n'a qu'à mettre $\frac{-dV}{dx}$ pour $\frac{2\alpha}{x^3}$, et les formules trouvées seront

$$dx = -\frac{qdt\sin\sigma}{p}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap}, \quad d\varphi = \frac{dt}{xx}\sqrt{(\tfrac{1}{2}Ap + Vxx)}, \quad dp = -\frac{2Qxdt}{A}\sqrt{(\tfrac{1}{2}Ap + Vxx)}$$

$$dq = \frac{dt \sin \nu}{A}\left(P + \frac{dV}{dx}\right) \sqrt{\tfrac{1}{2} Ap} + \frac{Qdt}{A}\left(2 \cos \nu - \frac{q \sin^2 \nu}{1 - q \cos \nu}\right) \sqrt{(\tfrac{1}{2} Ap + Vxx)}$$

$$d\nu = \frac{dt}{xx} \sqrt{\tfrac{1}{2} Ap} + \frac{dt \cos \nu}{Aq}\left(P + \frac{dV}{dx}\right) \sqrt{\tfrac{1}{2} Ap} - \frac{Qdt}{Aq}\left(2 \sin \nu + \frac{q \sin \nu \cos \nu}{1 - q \cos \nu}\right) \sqrt{(\tfrac{1}{2} Ap + Vxx)}$$

Maintenant, s'il était possible de déterminer V en sorte, qu'il devienne

$$\cos \nu \left(P + \frac{dV}{dx}\right) \sqrt{\tfrac{1}{2} Ap} = Q \sin \nu \left(2 + \frac{q \cos \nu}{1 - q \cos \nu}\right) \sqrt{(\tfrac{1}{2} Ap + Vxx)}$$

$$\text{ou} \quad dV = - Pdx + Qdx \tang \nu \left(2 + \frac{q \cos \nu}{1 - q \cos \nu}\right) \sqrt{\left(1 + \frac{2Vxx}{Ap}\right)}$$

on aurait $$d\nu = \frac{dt}{xx} \sqrt{\tfrac{1}{2} Ap} \quad \text{et} \quad dq = \frac{2Qdt}{A \cos \nu} \sqrt{(\tfrac{1}{2} Ap + Vxx)}$$

et de là la détermination du mouvement de l'aphélie serait fort aisée; car la longitude de l'aphélie étant $= \varphi - \nu$, on aurait

$$d\varphi - d\nu = \frac{dt}{xx}\left(\sqrt{(\tfrac{1}{2} Ap + Vxx)} - \sqrt{\tfrac{1}{2} Ap}\right)$$

et si V, ainsi qu'il arrivera dans la plupart des cas, est fort petit par rapport à A, on aurait à très peu près

$$d\varphi - d\nu = \frac{Vdt}{\sqrt{2Ap}}.$$

Dans ce cas, le mouvement même du corps se déterminerait fort commodément. Mais cette discussion dépend de la nature des forces P et Q par lesquelles le corps est sollicité. Or comme on peut supposer, que les corps célestes s'attirent mutuellement en raison de leurs masses divisées par le carré de leurs distances, voyons quelles seront ces forces, lorsqu'il y a trois corps qui, en s'attirant mutuellement, se meuvent tous les trois dans le même plan.

23. **Problème 3.** Déterminer le mouvement de trois corps qui s'attirent mutuellement et se meuvent dans le même plan.

Solution. Le meilleur moyen est de regarder un de ces corps comme fixe, et de chercher le mouvement des deux autres tel qu'il devrait paraître à un spectateur placé dans le troisième. A cet effet, on n'aura qu'à transporter les forces qui agissent sur le troisième corps, suivant des directions contraires, sur les deux autres corps. Soit donc Fig. 219. C le corps qu'on veut regarder comme fixe, et E et F les deux autres corps. Représentons les masses respectivement par C, E, F. Soient ensuite les distances $CE = x$, $CF = y$ et $EF = z$. Ayant pris CA pour une ligne fixe, soient les angles $ACE = \varphi$, $ACF = \theta$ et $ECF = \varphi - \theta = \eta$, et l'on aura

$$z = \sqrt{(xx + yy - 2xy \cos \eta)}.$$

Maintenant le corps C étant attiré vers E par la force $= \frac{E}{xx}$, et vers F par la force $= \frac{F}{yy}$; qu'on transporte ces forces sur les corps E et F: alors, tirant les lignes EJ et FK parallèles à FC et EC, à cause du corps C, les deux autres corps seront sollicités par les forces suivantes le corps E par la force $EC=\frac{E}{xx}$, et par la force $EJ=\frac{F}{yy}$

le corps F par la force $FC=\frac{F}{yy}$, et par la force $FK=\frac{E}{xx}$.

Or le corps E étant actuellement sollicité par

$$\text{les forces } EC=\frac{C}{xx} \text{ et } EF=\frac{F}{zz}$$

et le corps F par les forces $FC=\frac{C}{yy}$ et $FE=\frac{E}{zz}$,

ces forces doivent être ajoutées aux précédentes qu'on réduira ensuite à deux, dont les unes soient dirigées vers C, et les autres leur seraient perpendiculaires. Qu'on mène, à cet effet, EM perpendiculaire à EC, et FN perpendiculaire à FC.

Pour le corps E on a d'abord, dans la direction EC, la force $\frac{C+E}{xx}$; et la force $EJ=\frac{F}{yy}$, à cause de l'angle $CEJ=\eta$, donnera

$$\text{une force } EC=\frac{F\cos\eta}{yy}, \text{ et une force } EM=\frac{-F\sin\eta}{yy}.$$

Or la force $EF=\frac{F}{zz}$ donnera

$$\text{pour la direction } EC, \text{ la force } \frac{F\cos CEF}{zz}=\frac{-F(y\cos\eta-x)}{z^3}$$

$$\text{pour la direction } EM, \text{ la force } \frac{F\sin CEF}{zz}=\frac{Fy\sin\eta}{z^3}$$

et ainsi les deux forces par lesquelles le corps E est sollicité, seront

$$\text{la force } EC=\frac{C+E}{xx}+\frac{F(x-y\cos\eta)}{z^3}+\frac{F\cos\eta}{yy}$$

$$\text{la force } EM=\frac{Fy\sin\eta}{z^3}-\frac{F\sin\eta}{yy}.$$

Pour l'autre corps F on a d'abord pour la direction FC, la force $\frac{C+F}{yy}$; et la force $FK=\frac{E}{xx}$, à cause de l'angle $CFK=\eta$, donnera

$$\text{une force } FC=\frac{E\cos\eta}{xx} \text{ et une force } FN=\frac{E\sin\eta}{xx}.$$

Enfin la force $FE=\frac{E}{zz}$ donne

$$\text{pour la direction } FC, \text{ la force } =\frac{E\cos EFC}{zz}=\frac{E(y-x\cos\eta)}{z^3}$$

$$\text{pour la direction } FN, \text{ la force } =\frac{-E\sin EFC}{zz}=\frac{-Ex\sin\eta}{z^3}$$

donc les deux forces qui agissent sur le corps F sont

$$\text{la force } FC = \frac{C+F}{yy} + \frac{E(y - x\cos\eta)}{z^3} + \frac{E\cos\eta}{xx}$$

$$\text{la force } FN = -\frac{Ex\sin\eta}{z^3} + \frac{E\sin\eta}{xx}.$$

Et partant, pour le mouvement du corps E, en y appliquant le problème précédent, nous aurons

$$A = C + E,\quad P = \frac{F(x - y\cos\eta)}{z^3} + \frac{F\cos\eta}{yy} \quad \text{et} \quad Q = F\sin\eta\left(\frac{y}{z^3} - \frac{1}{yy}\right);$$

donc, posant $x = \frac{p}{1 - q\cos v}$, il y aura

$$dp = -\frac{2Fpdt\sin\eta}{(C+E)(1-q\cos v)}\left(\frac{y}{z^3} - \frac{1}{yy}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+E)p}$$

$$dq = \frac{Fdt\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+E)p}}{C+E}\left(\frac{x\sin v}{z^3} - \left(\frac{y}{z^3} - \frac{1}{yy}\right)\left(\cos\eta\sin v - 2\sin\eta\cos v + \frac{q\sin\eta\sin^2 v}{1-q\cos v}\right)\right)$$

$$dv = \frac{dt(1-q\cos v)^2}{pp}\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+E)p} + \frac{Fdt\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+E)p}}{(C+E)q}\left(\frac{x\cos v}{z^3} - \left(\frac{y}{z^3} - \frac{1}{yy}\right)\left(\cos\eta\cos v + 2\sin\eta\sin v + \frac{q\sin\eta\sin v\cos v}{1-q\cos v}\right)\right)$$

$$\text{et enfin } d\varphi = \frac{dt(1-q\cos v)^2}{pp}\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+E)p}.$$

De la même manière, pour le mouvement de l'autre corps F, en supposant sa distance $y = \frac{r}{1-s\cos u}$, sa longitude étant $= \theta$, on aura

$$dr = \frac{2Erdt\sin\eta}{(C+F)(1-s\cos u)}\left(\frac{x}{z^3} - \frac{1}{xx}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+F)r}$$

$$ds = \frac{Edt\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+F)r}}{C+F}\left(\frac{y\sin u}{z^3} - \left(\frac{x}{z^3} - \frac{1}{xx}\right)\left(\cos\eta\sin u + 2\sin\eta\cos u - \frac{s\sin\eta\sin^2 u}{1-s\cos u}\right)\right)$$

$$du = \frac{dt(1-s\cos u)^2}{rr}\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+F)r} + \frac{Edt\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+F)r}}{(C+F)s}\left(\frac{y\cos u}{z^3} - \left(\frac{x}{z^3} - \frac{1}{xx}\right)\left(\cos\eta\cos u - 2\sin\eta\sin u - \frac{s\sin\eta\sin u\cos u}{1-s\cos u}\right)\right)$$

$$\text{et} \quad d\theta = \frac{dt(1-s\cos u)^2}{rr}\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+F)r}$$

d'où l'on aura

$$d\eta = d\varphi - d\theta = \frac{dt(1-q\cos v)^2}{pp}\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+E)p} - \frac{dt(1-s\cos u)^2}{rr}\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+F)r},$$

de sorte que les changements que subissent tous les éléments du mouvement de l'un et de l'autre corps pendant le temps dt sont connus.

24. **Coroll. 1.** Le mouvement des absides de l'un et de l'autre corps se trouvera par les formules suivantes. Pour le corps E on aura

$$d\varphi - dv = \frac{-Fdt\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+E)p}}{(C+E)q}\left(\frac{x\cos v}{z^3} - \left(\frac{y}{z^3} - \frac{1}{yy}\right)\left(\cos\eta\cos v + 2\sin\eta\sin v + \frac{q\sin\eta\sin v\cos v}{1-q\cos v}\right)\right)$$

et pour le corps F

$$d\theta - du = \frac{-Edt\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+F)r}}{(C+F)s}\left(\frac{y\cos u}{z^3} - \left(\frac{x}{z^3} - \frac{1}{xx}\right)\left(\cos\eta\cos u - 2\sin\eta\sin u - \frac{s\sin\eta\sin u\cos u}{1-s\cos u}\right)\right)$$

25. **Coroll. 2.** On pourra aussi chercher par le Scholie (22) la quantité V. Soit

$$dV = \frac{-Fxdx}{z^3} + Fdx\cos\eta\left(\frac{y}{z^3}-\frac{1}{yy}\right) + Fdx\sin\eta\,\mathrm{tang}\,v\left(\frac{y}{z^3}-\frac{1}{yy}\right)\left(2+\frac{q\cos v}{1-q\cos v}\right)\sqrt{\left(1+\frac{2Vxx}{Ap}\right)}$$

où $dx = -\frac{qdt\sin v}{p}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap}$ et $A = C + E$, et alors on aura

$$d\varphi = \frac{dt}{xx}\sqrt{(\tfrac{1}{2}Ap + Vxx)}, \qquad dv = \frac{dt}{xx}\sqrt{\tfrac{1}{2}Ap}$$

$$dp = \frac{-2Fxdt\sin\eta}{A}\left(\frac{y}{z^3}-\frac{1}{yy}\right)\sqrt{(\tfrac{1}{2}Ap + Vxx)}$$

$$\text{et}\quad dq = \frac{2Fdt\sin\eta}{A\cos v}\left(\frac{y}{z^3}-\frac{1}{yy}\right)\sqrt{(\tfrac{1}{2}Ap + Vxx)}.$$

26. **Coroll. 3.** De la même manière, pour l'autre corps F, on cherchera la quantité U. Soit

$$dU = \frac{-Eydy}{z^3} + Edy\cos\eta\left(\frac{x}{z^3}-\frac{1}{xx}\right) - Edy\sin\eta\,\mathrm{tang}\,u\left(\frac{x}{z^3}-\frac{1}{xx}\right)\left(2+\frac{s\cos u}{1-s\cos u}\right)\sqrt{\left(1+\frac{2Uyy}{Br}\right)}$$

où $dy = -\frac{sdt\sin u}{r}\sqrt{\tfrac{1}{2}Br}$ et $B = C + F$. Alors on aura

$$d\theta = \frac{dt}{yy}\sqrt{(\tfrac{1}{2}Br + Uyy)}, \qquad du = \frac{dt}{yy}\sqrt{\tfrac{1}{2}Br}$$

$$dr = \frac{2Eydt\sin\eta}{B}\left(\frac{x}{z^3}-\frac{1}{xx}\right)\sqrt{(\tfrac{1}{2}Br + Uyy)}$$

$$ds = \frac{-2Edt\sin\eta}{B\cos u}\left(\frac{x}{z^3}-\frac{1}{xx}\right)\sqrt{(\tfrac{1}{2}Br + Uyy)}.$$

27. **Scholie.** Jusqu'ici nous n'avons employé aucune approximation, et partant les formules trouvées sont toutes exactes à la rigueur. Mais dans cet état on n'en peut aussi tirer aucune conclusion pour la connaissance du mouvement. Or, j'ai déjà remarqué que, pour que cette méthode puisse réussir, il faut que le mouvement des corps qu'on cherche, ne s'écarte pas beaucoup des règles de Kepler, ce qui arrive lorsque les forces P et Q sont fort petites à l'égard de la force

Donc pour les corps E et F cette méthode sera applicable lorsque les quantités

$$\frac{Fxx}{C+E}\left(\frac{y}{z^3}-\frac{1}{yy}\right) \quad\text{et}\quad \frac{Eyy}{C+F}\left(\frac{x}{z^3}-\frac{1}{xx}\right), \quad\text{avec celles-ci}\quad \frac{Fx^3}{(C+E)z^3} \quad\text{et}\quad \frac{Ey^3}{(C+F)z^3}$$

seront fort petites, ou des fractions beaucoup moindres que l'unité.

A cet effet, considérons les forces P et Q au cas de leur maximum, et il suffira d'avoir égard à la seule force P: l'on voit d'abord que, dans le cas de $y = x$, cette force pourrait devenir infinie. C'est donc une condition absolument nécessaire, que les distances x et y soient toujours inégales entre elles. Posons donc $y > x$, et soit $y = \lambda x$ où λ sera un nombre plus grand que l'unité. Or nous admettrons pour λ le plus petit nombre possible qui puisse résulter de $\frac{y}{x}$. La plus petite valeur de z sera donc $(\lambda - 1)x$ qui a lieu lorsque $y = 0$, et alors la force P deviendra

$$= \frac{F(1-\lambda)}{(\lambda-1)^3 xx} + \frac{F}{\lambda\lambda xx} = \frac{-F(2\lambda-1)}{\lambda\lambda(\lambda-1)^2 xx}$$

laquelle étant divisée par la force

$$\frac{A}{xx} = \frac{C+E}{xx} \quad \text{donnera} \quad \frac{F(2\lambda-1)}{(C+E)\lambda\lambda(\lambda-1)^2}$$

dont la valeur doit être fort au dessous de l'unité. De même, pour le corps F, la force F

$$= \frac{E(y-x)}{x^3} + \frac{E}{xx} = \frac{E}{(\lambda-1)^2 xx} + \frac{E}{xx} = \frac{E(\lambda\lambda-2\lambda+2)}{(\lambda-1)^2 xx}$$

cette force divisée par

$$\frac{C+F}{yy} = \frac{C+F}{\lambda\lambda xx}, \quad \text{donne} \quad \frac{E\lambda\lambda(\lambda\lambda-2\lambda+2)}{(C+F)(\lambda-1)^2}$$

dont la valeur doit aussi être fort au-dessous de l'unité. Il faut donc qu'il y ait

$$\frac{F}{C+E} < \frac{\lambda\lambda(\lambda-1)^2}{2\lambda-1} \quad \text{et} \quad \frac{E}{C+F} < \frac{(\lambda-1)^2}{\lambda\lambda(\lambda\lambda-2\lambda+2)}$$

d'où l'on voit dans quels cas cette méthode peut être employée avec succès. Et d'abord, puisque $\lambda > 1$, il est clair que $C+F$ doit être beaucoup plus grand que E, puisque

$$\frac{C+F}{E} > \frac{\lambda\lambda(\lambda\lambda-2\lambda+2)}{(\lambda-1)^2},$$

ce qui nous fournit les deux cas que voici:

I. Si la masse C est extrêmement grande, supposant, par exemples que le soleil se trouvât en C; alors, puisque

$$\frac{F}{C+E} < \frac{\lambda\lambda(\lambda-1)^2}{2\lambda-1},$$

les inégalités causées dans le corps E seront assez petites, pourvu que $\lambda-1$ ne soit pas trop petit; mais les inégalités causées dans le corps F, qui est plus éloigné, seront d'autant plus considérables, plus la quantité

$$\frac{\lambda\lambda(\lambda\lambda-2\lambda+2)}{(\lambda-1)^2}$$

sera grande. Or, elle devient même infinie tant pour $\lambda = 1$ que pour $\lambda = \infty$, c'est à dire, soit que $x = y$, soit que $x = 0$, d'où l'on voit que les planètes plus voisines du soleil causent des dérangements plus considérables aux planètes plus éloignées, que celles-ci à celles-là, les masses étant égales. Ce cas sert donc à determiner les dérangements que les planètes principales se causent mutuellement.

II. Si le corps F est extrêmement grand par rapport aux autres C et E, ce qui arrive quand C marque une planète principale, E un satellite et F le soleil. Or, puisque alors λ est un nombre très grand, il faut qu'il y ait

$$\frac{F}{C+E} < \tfrac{1}{2}\lambda^3 \quad \text{et} \quad \frac{F+C}{E} > \lambda\lambda;$$

car si ces conditions n'avaient point lieu, ou le mouvement du satellite, ou celui de la planète deviendrait si irrégulier qu'il ne s'accorderait plus avec les règles de Kepler. Ce cas servira donc déterminer le mouvement des satellites, de même que les dérangements qu'ils peuvent opérer dans le mouvement de la planète principale.

Ce cas étant plus aisé à développer par le calcul que l'autre, — puisque le nombre λ est fort grand, ou la distance y incomparablement plus grande que la distance x, ce qui procure la facilité de convertir la quantité irrationnelle $z = \sqrt{(xx + yy - 2xy\cos\eta)}$ en une série fort convergente, je traiterai d'abord ce cas, et ensuite, je passerai à l'autre, celui de deux planètes principales.

28. **Problème 4.** Trouver les inégalités élémentaires dans le mouvement d'un satellite et de sa planète principale qui se meuvent dans le même plan.

Solution. Que C représente la planète principale, E son satellite et F le soleil; pour trouver le mouvement du satellite, tel qu'il doit paraître à un spectateur placé au centre de la planète C, en gardant les mêmes de nominations que dans le problème précédent, nous pourrons ici regarder la distance y comme incomparablement plus grande que la distance x; ce qui nous fournit l'avantage de convertir la distance $z = \sqrt{(yy + xx - 2xy\cos\eta)}$ en une série fort convergente dont il suffira de prendre quelques uns des premiers termes. Ayant donc

$$\frac{1}{z^3} = (yy + xx - 2xy\cos\eta)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{y^3} + \frac{3x\cos\eta}{y^4} + \frac{3xx}{2y^5}(5\cos^2\eta - 1)$$

nous obtiendrons

$$\frac{y}{z^3} - \frac{1}{yy} = \frac{3x\cos\eta}{y^3} + \frac{3xx}{2y^4}(5\cos^2\eta - 1) \quad \text{et} \quad \frac{x}{z^3} = \frac{x}{y^3} + \frac{3xx\cos\eta}{y^4}$$

en négligeant les termes divisés par des puissances de y supérieures à la quatrième.

Posant donc pour le mouvement du satellite $x = \frac{p}{1 - q\cos\nu}$, nous aurons

$$dp = \frac{-2Fxdt\sin\eta}{C+E}\left(\frac{3x\cos\eta}{y^3} + \frac{3xx}{2y^4}(5\cos^2\eta - 1)\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+E)p}$$

$$dq = \frac{Fdt\sqrt{\frac{1}{2}(C+E)p}}{C+E}\left\{\begin{array}{l} +\frac{x}{y^3}\left(\sin\nu - 3\cos\eta\left(\cos\eta\sin\nu - 2\sin\eta\cos\nu + \frac{q\sin\eta\sin^2\nu}{1 - q\cos\nu}\right)\right) \\ +\frac{3xx}{2y^4}\left(2\cos\eta\sin\nu - (5\cos^2\eta - 1)\left(\cos\eta\sin\nu - 2\sin\eta\cos\nu + \frac{q\sin\eta\sin^2\nu}{1 - q\cos\nu}\right)\right) \end{array}\right.$$

$$d\varphi = \frac{dt}{xx}\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+E)p} = \frac{dt(1 - q\cos\nu)^2}{pp}\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+E)p}$$

$$d\omega = d\varphi + \frac{Fdt\sqrt{\frac{1}{2}(C+E)p}}{(C+E)q}\left\{\begin{array}{l} +\frac{x}{y^3}\left(\cos\nu - 3\cos\eta\left(\cos\eta\cos\nu + 2\sin\eta\sin\nu + \frac{q\sin\eta\sin\nu\cos\nu}{1 - q\cos\nu}\right)\right) \\ +\frac{3xx}{2y^4}\left(2\cos\eta\cos\nu - (5\cos^2\eta - 1)\left(\cos\eta\cos\nu + 2\sin\eta\sin\nu + \frac{q\sin\eta\sin\nu\cos\nu}{1 - q\cos\nu}\right)\right). \end{array}\right.$$

Or pour le mouvement apparent du soleil, ou de la planète principale même, il suffira de poser $\frac{1}{[illegible]} = -\frac{1}{xx}$ et $\frac{y}{z^3} = \frac{1}{yy}$. Donc faisant $y = \frac{r}{1 - s\cos u}$ nous aurons

$$dr = \frac{-2Eydt \sin\eta}{(C+F)\,xx} \sqrt{\tfrac{1}{2}(C+F)\,r}$$

$$ds = \frac{Edt\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+F)\,r}}{C+F}\left(\frac{\sin u}{yy} + \frac{1}{xx}\left(\cos\eta \sin u + 2\sin\eta\cos u - \frac{s\sin\eta\sin^2 u}{1 - s\cos u}\right)\right)$$

$$d\theta = \frac{dt}{yy}\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+F)\,r} = \frac{dt\,(1 - s\cos u)^2}{rr}\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+F)\,r}$$

et $$du = d\theta + \frac{Edt\sqrt{\tfrac{1}{2}(C+F)\,r}}{(C+F)\,s}\left(\frac{\cos u}{yy} + \frac{1}{xx}\left(\cos\eta\cos u - 2\sin\eta\sin u - \frac{s\sin\eta\sin u\cos u}{1 - s\cos u}\right)\right)$$

où l'on voit qu'on pourrait encore omettre les termes divisés par yy par rapport à ceux qui sont divisés par xx.

Si nous considérons un corps qui décrirait autour du centre C un cercle dont le rayon $= a$ et que ce corps, attiré vers le point C par la force $\frac{A}{aa}$, parcourt dans le temps t un angle $= \omega$, nous aurons $d\omega = \frac{dt}{aa}\sqrt{\tfrac{1}{2}Aa}$, et partant $dt\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{aad\omega}{\sqrt{Aa}}$, et nous pourrons introduire ce mouvement uniforme au lieu du temps dont il nous servira de mesure. Soit donc pour abréger

$$\frac{F\sqrt{(C+E)}}{(C+E)\sqrt{A}} = \frac{F}{\sqrt{A(C+E)}} = m, \qquad \frac{E\sqrt{(C+F)}}{(C+F)\sqrt{A}} = \frac{E}{\sqrt{A(C+F)}} = n$$

et nous aurons pour le mouvement du satellite

$$x = \frac{p}{1 - q\cos v}, \qquad d\varphi = \frac{d\omega}{xx}\sqrt{\frac{(C+E)\,a^3 p}{A}}$$

$$dp = -2mxd\omega\sin\eta\left(\frac{3x\cos\eta}{y^3} + \frac{3xx}{2y^4}(5\cos^2\eta - 1)\right)\sqrt{a^3 p}$$

$$dq = md\omega\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{y^3}\left(\sin v - 3\cos\eta\left(\cos\eta\sin v - 2\sin\eta\cos v + \frac{q\sin\eta\sin^2 v}{1 - q\cos v}\right)\right) \\ + \frac{3xx}{2y^4}\left(2\cos\eta\sin v - (5\cos^2\eta - 1)\left(\cos\eta\sin v - 2\sin\eta\cos v + \frac{q\sin\eta\sin^2 v}{1 - q\cos v}\right)\right)\end{array}\right\}\sqrt{a^3 p}$$

$$dv = d\varphi + \frac{md\omega}{q}\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{y^3}\left(\cos v - 3\cos\eta\left(\cos\eta\cos v + 2\sin\eta\sin v + \frac{q\sin\eta\sin v\cos v}{1 - q\cos v}\right)\right) \\ + \frac{3xx}{2y^4}\left(2\cos\eta\cos v - (5\cos^2\eta - 1)\left(\cos\eta\cos v + 2\sin\eta\sin v + \frac{q\sin\eta\sin v\cos v}{1 - q\cos v}\right)\right)\end{array}\right\}\sqrt{a^3 p}$$

et pour le mouvement apparent du soleil, ou plutôt de la planète principale

$$y = \frac{r}{1 - s\cos u}, \qquad d\theta = \frac{d\omega}{yy}\sqrt{\frac{(C+F)\,a^3 r}{A}}$$

$$dr = -\frac{2nyd\omega\sin\eta}{xx}\sqrt{a^3 r}$$

$$ds = nd\omega\left(\frac{\sin u}{yy} + \frac{1}{xx}\left(\cos\eta\sin u + 2\sin\eta\cos u - \frac{s\sin\eta\sin^2 u}{1 - s\cos u}\right)\right)\sqrt{a^3 r}$$

$$du = d\theta + \frac{nd\omega}{s}\left(\frac{\cos u}{yy} + \frac{1}{xx}\left(\cos\eta\cos u - 2\sin\eta\sin u - \frac{s\sin\eta\sin u\cos u}{1 - s\cos u}\right)\right)\sqrt{a^3 r}$$

pour le changement élémentaire de l'angle η on aura

$$d\eta = d\varphi - d\theta = \frac{d\omega}{xx}\sqrt{\frac{(C+E)\,a^3 p}{A}} - \frac{d\omega}{yy}\sqrt{\frac{(C+F)\,a^3 r}{A}}.$$

29. **Coroll. 1.** Puisque F, désignant la masse du soleil, est une quantité très grande par rapport à C et E, le nombre m sera aussi fort grand, à moins que la masse A ne soit prise extrêmement grande. Mais le calcul ne dépend point de cette masse A, puisqu'elle a été introduite conjointement avec la distance a pour nous fournir une mesure propre du temps.

30. **Coroll. 2.** Cependant ce nombre m étant multiplié par $\frac{x}{y^3}\sqrt{a^3 p}$ qui, y étant beaucoup plus grand que x, sera un nombre très petit, — ce produit, disons nous, sera réduit à une fraction très petite; ou bien, si cela n'arrivait point, alors le mouvement du satellite s'écarterait trop des règles de Kepler, pour qu'on puisse le déterminer par cette méthode.

31. **Coroll. 3.** Or le nombre n étant extrêmement petit par lui-même, sera considérablement agrandi par le facteur $\frac{\sqrt{a^3 r}}{xx}$, et il faut remarquer de même, que s'il devenait alors trop grand, le mouvement de la planète principale résulterait trop irrégulier, pour pouvoir être représenté par cette méthode. Or, heureusement, ces cas ne se rencontrent point dans notre système planétaire.

32. **Coroll. 4.** Il sera aussi bon de réduire les produits des sinus et cosinus, qui se trouvent dans nos formules, à des sinus ou cosinus simples. Ainsi, ayant

$$\sin\eta\cos\eta = \tfrac{1}{2}\sin 2\eta,\quad 5\cos^2\eta - 1 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{5}{2}\cos 2\eta \quad \text{et partant}$$

$$\sin\eta\,(5\cos^2\eta - 1) = \tfrac{1}{4}\sin\eta + \tfrac{5}{4}\sin 3\eta, \quad \text{nous aurons}$$

$$dp = -3mxd\omega\left(\frac{x\sin 2\eta}{y^3} + \frac{xx}{4y^4}(\sin\eta + 5\sin 3\eta)\right)\sqrt{a^3 p}.$$

33. **Coroll. 5.** De la même manière on trouvera

$$\frac{[illegible]}{m\,d\omega\sqrt{a^3 p}} = \frac{x}{y^3}\left(-\tfrac{1}{2}\sin v + \tfrac{9}{4}\sin(2\eta - v) + \tfrac{3}{4}\sin(2\eta + v) - \frac{3q}{8(1-q\cos v)}(2\sin 2\eta - \sin(2\eta - 2v) - \sin(2\eta + 2v))\right)$$

$$+ \frac{3xx}{2y^4}\left(\tfrac{5}{8}\sin(\eta - v) - \tfrac{1}{8}\sin(\eta + v) + \tfrac{15}{8}\sin(3\eta - v) + \tfrac{5}{8}\sin(3\eta + v)\right)$$

$$\frac{-3qxx}{2y^4(1-q\cos v)}\left(\tfrac{1}{8}\sin\eta - \tfrac{1}{16}\sin(\eta - 2v) - \tfrac{1}{16}\sin(\eta + 2v) + \tfrac{5}{8}\sin 3\eta - \tfrac{5}{16}\sin(3\eta - 2v) - \tfrac{5}{16}\sin(3\eta + 3v)\right)$$

et

$$\frac{(d\eta - d\varphi)}{m\,d\omega\sqrt{a^3 p}} = \frac{x}{y^3}\left(-\tfrac{1}{2}\cos v - \tfrac{9}{4}\cos(2\eta - v) + \tfrac{3}{4}\cos(2\eta + v) - \frac{3q}{8(1-q\cos v)}(\cos(2\eta - 2v) - \cos(2\eta + 2v))\right)$$

$$+ \frac{3xx}{2y^4}\left(-\tfrac{5}{8}\cos(\eta - v) - \tfrac{1}{8}\cos(\eta + v) - \tfrac{15}{8}\cos(3\eta - v) + \tfrac{5}{8}\cos(3\eta + v)\right)$$

$$\frac{-3qxx}{2y^4(1-q\cos v)}\left(\tfrac{1}{16}\cos(\eta - 2v) - \tfrac{1}{16}\cos(\eta + 2v) + \tfrac{5}{16}\cos(3\eta - 2v) - \tfrac{5}{16}\cos(3\eta + 2v)\right)$$

34. **Coroll. 6.** Pour le mouvement apparent du soleil ou le vrais mouvement de la plan[…] nous aurons après cette réduction

$$dr = \frac{-2nyd\omega \sin \eta}{xx} \sqrt{a^3 r}$$

$$ds = nd\omega\left(\frac{\sin u}{yy} + \frac{1}{xx}\left(\tfrac{1}{2}\sin(\eta - u) + \tfrac{3}{2}\sin(\eta + u) - \frac{s}{4(1 - s\cos u)}\left(2\sin\eta - \sin(\eta - 2u) - \sin(\eta + 2u)\right)\right)\right)\ldots$$

$$du = d\theta + \frac{nd\omega}{s}\left(\frac{\cos u}{yy} + \frac{1}{xx}\left(-\tfrac{1}{2}\cos(\eta - u) + \tfrac{3}{2}\cos(\eta + u) - \frac{s}{4(1 - s\cos u)}\left(\cos(\eta - 2u) - \cos(\eta + 2u)\right)\right)\right)\ldots$$

Ainsi toutes les différentielles de nos éléments sont réduits à l'élément $d\omega$ du temps.

35. **Scholie 1.** Ces expressions affectées par m et n contiennent les inégalités ou plutôt [les] aberrations de l'un et de l'autre mouvement des règles de Kepler. Car si ces lettres m e[t n] étaient $= 0$, tant les demi-paramètres p et r, que les excentricités q et s seraient constant[s, et] le mouvement des absides, ou bien $d\varphi - dv$ et $d\theta - du$ s'évanouirait, tout comme les règles de Kepler le supposent. De là on comprend, en quoi les inégalités, causées par les lettres m et [n] consistent: les demi-paramètres p et r, de même que les excentricités q et s, ne seront plus con[s]stants, mais contiendront, outre les valeurs constantes qu'ils auraient s'il y avait $m = 0$ et $n = 0$, encore des parties variables affectées de m et n, d'où dépendra aussi le mouvement des absides, de sorte que les angles $\varphi - v$ et $\theta - u$ ne seront plus constants, mais contiendront aussi des membres variables affectés des valeurs m et n. Ce seront donc les inégalités dont il faut chercher le[s] valeurs; or, pour que cela puisse se faire par la voie d'approximation, je remarque d'abord que les termes affectés de m et n doivent être fort petits par rapport aux autres qui ne contiennent pas ces lettres, et parmi ces termes il y en aura deux espèces pour le mouvement du satellite: les uns étant multipliés par $\frac{x}{y^3}$, et les autres par $\frac{xx}{y^4}$ dont ceux-ci seront incomparablement plus petits que ceux-là; c'est pourquoi aussi nous avons déjà négligé les termes qui seraient multipliés par $\frac{x^3}{y^5}$, $\frac{x^4}{y^6}$ etc. comme quantités tout à fait evanouissantes. Il conviendra donc de commencer par la recherche des termes affectés par $\frac{x}{y^3}$ comme de ceux qui renferment les inégalités principales, et ensuite, on pourra procéder à la recherche de ceux qui ont $\frac{xx}{y^4}$ pour facteur et qu'on nomme les inegalités parallactiques. Ensuite on parviendra aussi à des termes affectés de mm, ou mn, ou nn; car si, par exemple, les valeurs de p, r, q, s, v et u contiennent des termes affectés de m et n, ces quantités sont jointes dans nos formules aux facteurs m et n, il en résultera des termes affectés de mm, mn et nn qui seront, par conséquent, incomparablement plus petits que ceux qui contiennent simplement m et n; on pourra donc les négliger, à moins qu'il ne s'agisse du mouvement de la ligne des absides dont il faut connaître les moindres inégalités. Or, par cette raison, on omet entièrement les termes dérivatifs de ceux qui seraient affectés des dimensions plus élevées de m et n. On aura donc trois sortes d'inégalités pour le mouvement du satellite: 1° les inégalités principales qui contiennent simplement $\frac{mx}{y^3}$, 2° les inégalités parallactiques qui contiennent $\frac{mxx}{y^4}$, et 3° les inégalités dérivatives qui renferment mm ou mn ou nn et qui résultent des principales; car quoique le[…]

lités parallactiques fournissent aussi de pareilles dérivées, on pourra s'en passer à cause de leur extrême petitesse.

36. **Scholie 2.** Outre cela, il faut avoir égard à une autre circonstance qui favorisera l'approximation: c'est la petitesse des excentricités q et s; car, si elles étaient trop considérables, il faut avouer qu'il serait extrêmement difficile de réussir dans cette besogne. Mais il arrive encore fort heureusement qu'il n'y a point dans notre système planétaire des excentricités assez grandes pour rendre cette méthode inutile ou impraticable. Les quantités q et s seront donc exprimées par des fractions assez petites, en sorte que les formules $q \cos v$ et $s \sin \omega$ seront considérablement plus petites que l'unité. De là nous tirerons cet avantage, que même dans les termes fournis par les lois de Kepler, ou qui ne sont affectés ni de m ni de n, on puisse négliger ceux qui renferment les puissances de q et s, supérieures à la troisième, à la quatrième ou tout au plus à la cinquième. Donc dans les inégalités principales, on n'aura pas besoin de les pousser au delà des carrés des excentricités, ou bien on négligera les termes affectés des degrés supérieurs aux carrés des excentricités q et s. Or dans les inégalités parallactiques et dérivées, on pourra même négliger les parties affectées des carrés de q et de s. Telle sera donc la marche à suivre dans la recherche des inégalités qui altèrent le mouvement tant du satellite que de la planète principale.

37. **Problème 5.** Trouver les inégalités principales qui doivent se trouver dans le mouvement d'un satellite.

Solution. Puisque $x = \frac{p}{1 - q\cos v}$ et $y = \frac{r}{1 - s\cos u}$, nous aurons pour les inégalité principales

$$\frac{x}{y^3} = \frac{p(1 - s\cos u)^3}{r^3(1 - q\cos v)}.$$

Donc, puisque ce terme est fort petit par lui-même, nous négligerons les termes qui contiendraient plus d'une dimension de q et s, et partant nous aurons

$$\frac{x}{y^3} = \frac{p}{r^3}(1 + q\cos v - 3s\cos u), \text{ et par conséquent } \frac{xx}{y^3} = \frac{pp}{r^3}(1 + 2q\cos v - 3s\cos u).$$

Donc, ayant pour les inégalités principales $dp = \frac{-3mxxd\omega \sin 2\eta}{y^3}\sqrt{a^3}\,p$, nous aurons

$$\text{I. } dp = \frac{-3mppd\omega\sqrt{a^3 p}}{r^3}\left(\sin 2\eta + q\sin(2\eta - v) + q\sin(2\eta + v) - \tfrac{3}{2}s\sin(2\eta - u) - \tfrac{3}{2}s\sin(2\eta + u)\right).$$

Ensuite, pour dq, posant q pour $\frac{q}{1 - q\cos v}$, de sorte que nous ayons pour les inégalités principales

$$\frac{dq}{md\omega\sqrt{a^3 p}} = \frac{x}{y^3}\left(-\tfrac{1}{2}\sin v + \tfrac{9}{4}\sin(2\eta - v) + \tfrac{7}{4}\sin(2\eta + v) - \tfrac{3}{4}q\sin 2\eta + \tfrac{3}{8}q\sin(2\eta - 2v) + \tfrac{3}{8}q\sin(2\eta + 2v)\right)$$

nous aurons

$$\text{II. } dq = \frac{mpd\omega\sqrt{a^3 p}}{r^3}\Big[-\tfrac{1}{2}\sin v + \tfrac{9}{4}\sin(2\eta - v) + \tfrac{3}{4}\sin(2\eta + v) + \tfrac{3}{4}q\sin 2\eta - \tfrac{1}{4}q\sin 2v$$

$$+ \tfrac{3}{2}q\sin(2\eta - 2v) + \tfrac{3}{4}q\sin(2\eta + 2v) + \tfrac{3}{4}s\sin(v - u) + \tfrac{3}{4}s\sin(v + u)$$

$$- \tfrac{27}{8}s\sin(2\eta - v - u) - \tfrac{27}{8}s\sin(2\eta - v + u) - \tfrac{9}{8}s\sin(2\eta + v - u) - \tfrac{9}{8}s\sin(2\eta + v + u)\Big].$$

*

Enfin nous aurons

$$\text{III.}\quad q(d\nu - d\varphi) = \frac{mpd\omega\sqrt{a^3 p}}{r^3}\Big[-\tfrac{1}{4}q - \tfrac{1}{2}\cos\nu - \tfrac{9}{4}\cos(2\eta - \nu) + \tfrac{3}{4}\cos(2\eta + \nu) - \tfrac{1}{4}q\cos 2\nu$$

$$-\tfrac{3}{4}q\cos 2\eta - \tfrac{3}{2}q\cos(2\eta - 2\nu) + \tfrac{3}{4}q\cos(2\eta + 2\nu) + \tfrac{3}{4}s\cos(\nu - u)$$

$$+\tfrac{3}{4}s\cos(\nu + u) + \tfrac{27}{8}s\cos(2\eta - \nu - u) + \tfrac{27}{8}s\cos(2\eta - \nu + u)$$

$$-\tfrac{9}{8}s\cos(2\eta + \nu - u) - \tfrac{9}{8}s\cos(2\eta + \nu + u)\Big].$$

Or puisque nous ne cherchons que les inégalités principales qui sont simplement multipliées par m, nous négligerons, dans les membres de ces équations affectés par m, les termes qui dépendent de m ou de n, et partant les quantités p, r, q et s, y seront constantes. De plus, dans ces mêmes termes nous supposerons $d\nu = d\varphi$ et $du = d\theta$. Donc puisque

$$d\varphi = \frac{d\omega(1 - q\cos\nu)^2}{pp}\sqrt{\frac{(C+E)a^3 p}{A}},\quad \text{on aura}$$

$$d\nu = d\omega(1 - 2q\cos\nu)\sqrt{\frac{(C+E)a^3}{Ap^3}}$$

ou p et q seront regardées comme constantes. De même nous aurons

$$du = d\omega(1 - 2s\cos u)\sqrt{\frac{(C+F)a^3}{Ar^3}}$$

et partant $$d\eta = d\omega\left((1 - 2q\cos\nu)\sqrt{\frac{(C+E)a^3}{Ap^3}} - (1 - 2s\cos u)\sqrt{\frac{(C+F)a^3}{Ar^3}}\right).$$

Or $\sqrt{\frac{C+E}{A}} = \frac{F}{mA}$ et $\sqrt{\frac{C+F}{A}} = \frac{E}{nA}$, de sorte que

$$d\nu = \frac{Fd\omega}{mA}(1 - 2q\cos\nu)\sqrt{\frac{a^3}{p^3}},\qquad du = \frac{Ed\omega}{nA}(1 - 2s\cos u)\sqrt{\frac{a^3}{r^3}}$$

$$\text{et}\quad d\eta = d\omega\left(\frac{F}{mA}(1 - 2q\cos\nu)\sqrt{\frac{a^3}{p^3}} - \frac{E}{nA}(1 - 2s\cos u)\sqrt{\frac{a^3}{r^3}}\right).$$

Maintenant, parce que nous regardons p, q, r et s comme constantes, soit

$$p = b + \ldots,\qquad q = g + \ldots,\qquad r = c + \ldots,\qquad s = h + \ldots;$$

ce sont les valeurs naturelles ou moyennes de ces lettres, auxquelles il faut ensuite ajouter les particules qui leur conviennent à cause des inégalités. Soit donc pour abréger

$$\frac{F}{mA}\sqrt{\frac{a^3}{b^3}} = \sqrt{\frac{(C+E)a^3}{Ab^3}} = \mu \quad\text{et}\quad \frac{E}{nA}\sqrt{\frac{a^3}{c^3}} = \sqrt{\frac{(C+F)a^3}{Ac^3}} = \nu,$$

et partant

$$\frac{d\nu}{d\omega} = \mu - 2\mu g\cos\nu,\qquad \frac{du}{d\omega} = \nu - 2\nu h\cos u \quad\text{et}$$

$$\frac{d\eta}{d\omega} = \mu - \nu - 2\mu g\cos\nu + 2\nu h\cos u.$$

Soit de plus $\frac{m\sqrt{a^3 b^3}}{c^3} = \varkappa$, pour qu'il y ait

$$\frac{dp}{d\omega} = -3\varkappa b\left(\sin 2\eta + g\sin(2\eta - v) + g\sin(2\eta + v) - \tfrac{3}{2}h\sin(2\eta - u) - \tfrac{3}{2}h\sin(2\eta + u)\right)$$

qu'on pose pour intégrer

$$p = b\left(1 + \varkappa\mathfrak{A}\cos 2\eta + \varkappa\mathfrak{B}g\cos(2\eta - v) + \varkappa\mathfrak{C}g\cos(2\eta + v) - \varkappa\mathfrak{D}h\cos(2\eta - u) - \varkappa\mathfrak{E}h\cos(2\eta + u)\right).$$

Donc pour trouver ces coefficients, qu'on différentie cette valeur supposée

$$\begin{aligned}\frac{dp}{\varkappa b\, d\omega} = -2(\mu - \nu)\mathfrak{A}\sin 2\eta &+ 2\mu g\mathfrak{A}\sin(2\eta - v) + 2\mu g\mathfrak{A}\sin(2\eta + v) - 2\nu h\mathfrak{A}\sin(2\eta - u) - 2\nu h\mathfrak{A}\sin(2\eta + u)\\ &-(\mu - 2\nu)g\mathfrak{B} \qquad -(3\mu - 2\nu)g\mathfrak{C} \qquad +(2\mu - 3\nu)h\mathfrak{D} \qquad +(2\mu - \nu)h\mathfrak{E}\end{aligned}$$

d'où il faut qu'il soit

$$-2(\mu - \nu)\mathfrak{A} = -3 \quad \text{ou} \quad \mathfrak{A} = \frac{3}{2(\mu - \nu)}$$

$$2\mu\mathfrak{A} - (\mu - 2\nu)\mathfrak{B} = -3 \qquad \mathfrak{B} = \frac{2\mu\mathfrak{A} + 3}{\mu - 2\nu} = \frac{3(2\mu - \nu)}{(\mu - \nu)(\mu - 2\nu)}$$

$$2\mu\mathfrak{A} - (3\mu - 2\nu)\mathfrak{C} = -3 \qquad \mathfrak{C} = \frac{2\mu\mathfrak{A} + 3}{3\mu - 2\nu} = \frac{3(2\mu - \nu)}{(\mu - \nu)(3\mu - 2\nu)}$$

$$-2\nu\mathfrak{A} + (2\mu - 3\nu)\mathfrak{D} = +\tfrac{9}{2} \qquad \mathfrak{D} = \frac{4\nu\mathfrak{A} + 9}{2(2\mu - 3\nu)} = \frac{3(3\mu - \nu)}{2(\mu - \nu)(2\mu - 3\nu)}$$

$$-2\nu\mathfrak{A} + (2\mu - \nu)\mathfrak{E} = +\tfrac{9}{2} \qquad \mathfrak{E} = \frac{4\nu\mathfrak{A} + 9}{2(2\mu - \nu)} = \frac{3(3\mu - \nu)}{2(\mu - \nu)(2\mu - \nu)}$$

et de là nous tirons

$$\frac{p}{b} = 1 + \frac{3\varkappa}{2(\mu - \nu)}\cos 2\eta + \begin{cases} \dfrac{+3\varkappa(2\mu - \nu)}{(\mu - \nu)(\mu - 2\nu)}g\cos(2\eta - v) - \dfrac{3\varkappa(3\mu - \nu)}{2(\mu - \nu)(2\mu - 3\nu)}h\cos(2\eta - u)\\[2ex] \dfrac{+3\varkappa(2\mu - \nu)}{(\mu - \nu)(3\mu - 2\nu)}g\cos(2\eta + v) - \dfrac{3\varkappa(3\mu - \nu)}{2(\mu - \nu)(2\mu - \nu)}h\cos(2\eta + u)\end{cases}$$

C'est donc en ces termes que sont comprises les inégalités principales du demi paramètre p cherchons de la même manière les inégalités principales de l'excentricité q, pour la quelle nous avons cette équation

$$\begin{aligned}\frac{dq}{\varkappa d\omega} = &-\tfrac{1}{2}\sin v + \tfrac{9}{4}\sin(2\eta - v) + \tfrac{3}{4}\sin(2\eta + v)\\ &+\tfrac{3}{4}g\sin 2\eta - \tfrac{1}{4}g\sin 2v + \tfrac{3}{2}g\sin(2\eta - 2v) + \tfrac{3}{4}g\sin(2\eta + 2v)\\ &+\tfrac{3}{4}h\sin(v - u) + \tfrac{3}{4}h\sin(v + u)\\ &-\tfrac{27}{8}h\sin(2\eta - v - u) - \tfrac{27}{8}h\sin(2\eta - v + u) - \tfrac{9}{8}h\sin(2\eta + v - u) - \tfrac{9}{8}h\sin(2\eta + v + u).\end{aligned}$$

Posons donc

$$\begin{aligned}q = g &+ \varkappa\mathfrak{A}\cos v + \varkappa\mathfrak{B}\cos(2\eta - v) + \varkappa\mathfrak{C}\cos(2\eta + v)\\ &+ \varkappa\mathfrak{D}g\cos 2\eta + \varkappa\mathfrak{E}g\cos 2v + \varkappa\mathfrak{F}g\cos(2\eta - 2v) + \varkappa\mathfrak{G}g\cos(2\eta + 2v)\end{aligned}$$

$$+\varkappa\mathfrak{H}h\cos(v-u)+\varkappa\mathfrak{J}h\cos(v+u)$$

$$+\varkappa\mathfrak{L}h\cos(2\eta-v-u)+\varkappa\mathfrak{M}h\cos(2\eta-v+u)+\varkappa\mathfrak{N}h\cos(2\eta+v-u)+\varkappa\mathfrak{O}h\cos(2\eta+v+u)$$

et la différentielle sera

$$\frac{dq}{\varkappa d\omega}=-\mu\mathfrak{A}\sin v-(\mu-2\nu)\mathfrak{B}\sin(2\eta-v)-(3\mu-2\nu)\mathfrak{C}\sin(2\eta+v)$$

$$+\mu\mathfrak{B}g\sin 2\eta+\mu\mathfrak{A}g\sin 2v+\mu\mathfrak{B}g\sin(2\eta-2v)+3\mu\mathfrak{B}g\sin(2\eta+2v)$$

$$+3\mu\mathfrak{C}g\qquad -2\mu\mathfrak{E}g\qquad +2\nu\mathfrak{F}g\qquad -2(2\mu-\nu)\mathfrak{G}g$$

$$-2(\mu-\nu)\mathfrak{D}$$

$$-(\mu-\nu)\mathfrak{H}h\sin(v-u)-(\mu+\nu)\mathfrak{J}h\sin(v+u)$$

$$-2\nu\mathfrak{B}h\sin(2\eta-v-u)-2\nu\mathfrak{B}h\sin(2\eta-v+u)-2\nu\mathfrak{C}h\sin(2\eta+v-u)-2\nu\mathfrak{C}h\sin(2\eta+v+u)$$

$$-(\mu-3\nu)\mathfrak{L}h\qquad -(\mu-\nu)\mathfrak{M}h\qquad -(3\mu-3\nu)\mathfrak{N}h\qquad -(3\mu-\nu)\mathfrak{O}h$$

d'où nous concluons

$$\mu\mathfrak{A}=\tfrac{1}{2}\qquad\text{ou}\qquad\mathfrak{A}=\frac{1}{2\mu}$$

$$-(\mu-2\nu)\mathfrak{B}=\tfrac{9}{4}\qquad\qquad\mathfrak{B}=\frac{-9}{4(\mu-2\nu)}$$

$$-(3\mu-2\nu)\mathfrak{C}=\tfrac{3}{4}\qquad\qquad\mathfrak{C}=\frac{-3}{4(3\mu-2\nu)}$$

$$\mu\mathfrak{B}+3\mu\mathfrak{C}-2(\mu-\nu)\mathfrak{D}=\tfrac{3}{4}\qquad\qquad\mathfrak{D}=\frac{-9\mu}{2(\mu-2\nu)(3\mu-2\nu)}-\frac{3}{8(\mu-\nu)}$$

$$\mu\mathfrak{A}-2\mu\mathfrak{E}=-\tfrac{1}{4}\qquad\qquad\mathfrak{E}=\frac{3}{8\mu}$$

$$\mu\mathfrak{B}+2\nu\mathfrak{F}=\tfrac{3}{2}\qquad\qquad\mathfrak{F}=\frac{3(5\mu-4\nu)}{8\nu(\mu-2\nu)}$$

$$3\mu\mathfrak{C}-2(2\mu-\nu)\mathfrak{G}=\tfrac{3}{4}\qquad\qquad\mathfrak{G}=\frac{-3(3\mu-\nu)}{4(2\mu-\nu)(3\mu-2\nu)}$$

$$-(\mu-\nu)\mathfrak{H}=\tfrac{3}{4}\qquad\qquad\mathfrak{H}=\frac{-3}{4(\mu-\nu)}$$

$$-(\mu+v)\mathfrak{J}=\tfrac{3}{4}\qquad\qquad\mathfrak{J}=\frac{-3}{4(\mu+\nu)}$$

$$-2\nu\mathfrak{B}-(\mu-3\nu)\mathfrak{L}=-\tfrac{27}{8}\qquad\qquad\mathfrak{L}=\frac{+9(3\mu-2\nu)}{8(\mu-2\nu)(\mu-3\nu)}$$

$$-2\nu\mathfrak{B}-(\mu-\nu)\mathfrak{M}=-\tfrac{27}{8}\qquad\qquad\mathfrak{M}=\frac{+9(3\mu-2\nu)}{8(\mu-2\nu)(\mu-\nu)}$$

$$-2\nu\mathfrak{C}-(3\mu-3\nu)\mathfrak{N}=-\tfrac{9}{8}\qquad\qquad\mathfrak{N}=\frac{+3(9\mu-2\nu)}{8(3\mu-2\nu)(3\mu-3\nu)}$$

$$-2\nu\mathfrak{C}-(3\mu-\nu)\mathfrak{O}=-\tfrac{9}{8}\qquad\qquad\mathfrak{O}=\frac{+3(9\mu-2\nu)}{8(3\mu-2\nu)(3\mu-\nu)}$$

Cependant nous aurons

$$q = g + \frac{\varkappa}{2\mu}\cos v - \frac{9\varkappa}{4(\mu-2\nu)}\cos(2\eta - v) - \frac{3\varkappa}{4(3\mu-2\nu)}\cos(2\eta+v)$$
$$-\left(\frac{9\mu}{2(\mu-2\nu)(3\mu-2\nu)} + \frac{3}{8(\mu-\nu)}\right)\varkappa g\cos 2\eta + \frac{3\varkappa}{8\mu} g\cos 2v$$
$$+\frac{3\varkappa(5\mu-4\nu)}{8\nu(\mu-2\nu)} g\cos(2\eta-2v) - \frac{3\varkappa(3\mu-\nu)}{4(2\mu-\nu)(3\mu-2\nu)} g\cos(2\eta+2v)$$
$$-\frac{3\varkappa}{4(\mu-\nu)} h\cos(v-u) - \frac{3\varkappa}{4(\mu+\nu)} h\cos(v+u)$$
$$+\frac{9\varkappa(3\mu-2\nu)}{8(\mu-2\nu)(\mu-3\nu)} h\cos(2\eta-v-u) + \frac{9\varkappa(3\mu-2\nu)}{8(\mu-2\nu)(\mu-\nu)} h\cos(2\eta-v+u)$$
$$+\frac{3\varkappa(9\mu-2\nu)}{8(3\mu-2\nu)(3\mu-3\nu)} h\cos(2\eta+v-u) + \frac{3\varkappa(9\mu-2\nu)'}{8(3\mu-2\nu)(3\mu-\nu)} k\cos(2\eta+v+u).$$

Enfin, pour le mouvement des absides nous avons

$$\frac{q(d\varphi-dv)}{\varkappa d\omega} = \tfrac{1}{4} g + \tfrac{1}{2}\cos v + \tfrac{9}{4}\cos(2\eta-v) - \tfrac{3}{4}\cos(2\eta+v)$$
$$+\tfrac{1}{4} g\cos 2v + \tfrac{3}{4} g\cos 2\eta + \tfrac{3}{2} g\cos(2\eta-2v) - \tfrac{3}{4} g\cos(2\eta+2v)$$
$$-\tfrac{3}{4} h\cos(v-u) - \tfrac{3}{4} h\cos(v+u)$$
$$-\tfrac{27}{8} h\cos(2\eta-v-u) - \tfrac{27}{8} h\cos(2\eta-v+u) + \tfrac{9}{8} h\cos(2\eta+v-u) + \tfrac{9}{8} h\cos(2\eta+v+u).$$

Posons donc

$$\varphi - v = \varkappa O\omega + \varkappa\mathfrak{A}\sin v + \varkappa\mathfrak{B}\sin(2\eta-v) + \varkappa\mathfrak{C}\sin(2\eta+v)$$
$$+\varkappa\mathfrak{D} g\sin 2\eta + \varkappa\mathfrak{E} g\sin 2v + \varkappa\mathfrak{F} g\sin(2\eta-2v) + \varkappa\mathfrak{G} g\sin(2\eta+v)$$
$$+\varkappa\mathfrak{H} h\sin(v-u) + \varkappa\mathfrak{J} h\sin(v+u)$$
$$+\varkappa\mathfrak{L} h\sin(2\eta-v-u) + \varkappa\mathfrak{M} h\sin(2\eta-v+u) + \varkappa\mathfrak{N} h\sin(2\eta+v-u) + \varkappa\mathfrak{O} h\sin(2\eta+v+u)$$

et la différentielle sera

$$\frac{d\varphi - dv}{\varkappa d\omega} = O + \mu\mathfrak{A}\cos v + (\mu-2\nu)\mathfrak{B}\cos(2\eta-v) + (3\mu-2\nu)\mathfrak{C}\cos(2\eta+v)$$
$$-\mu\mathfrak{A} g - \mu\mathfrak{B} g\cos 2\eta - \mu\mathfrak{A} g\cos 2v - \mu\mathfrak{B} g\cos(2\eta-2v) - 3\mu\mathfrak{C} g\cos(2\eta+2v)$$
$$-3\mu\mathfrak{C} g \qquad + 2\mu\mathfrak{E} g \qquad - 2\nu\mathfrak{F} g \qquad + 2(2\mu-\nu)\mathfrak{G} g$$
$$+2(\mu-\nu)\mathfrak{D} g$$
$$+(\mu-\nu)\mathfrak{H} h\cos(v-u) + (\mu+\nu)\mathfrak{J} h\cos(v+u)$$
$$+2\nu\mathfrak{B} h\cos(2\eta-v-u) + 2\nu\mathfrak{B} h\cos(2\eta-v+u) + 2\nu\mathfrak{C} h\cos(2\eta+v-u) + 2\nu\mathfrak{C} h\cos(2\eta+v+u)$$
$$+(\mu-3\nu)\mathfrak{L} h \qquad + (\mu-\nu)\mathfrak{M} h \qquad + (3\mu-3\nu)\mathfrak{N} h \qquad + (3\mu-\nu)\mathfrak{O} h.$$

Qu'on la multiplie par $q = g + \alpha\cos v + \beta\cos(2\eta-v) - \gamma\cos(2\eta+v)$, posant pour abréger

$$\alpha = \frac{\varkappa}{2\mu}, \quad \beta = \frac{9\varkappa}{4(\mu-2\nu)} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{3\varkappa}{4(3\mu-2\nu)}$$

et l'on aura

$$
\begin{aligned}
\frac{q\,(d\varphi - dv)}{\varkappa d\omega} = {} & 0g + \mu\mathfrak{A}g\cos v + (\mu - 2\nu)\,\mathfrak{B}g\cos(2\eta - v) + (3\mu - 2\nu)\,\mathfrak{C}g\cos(2\eta + v) \\
& -\mu\mathfrak{A}gg + 0\alpha \qquad\qquad -0\beta \qquad\qquad\qquad\qquad -0\gamma \\
& +\tfrac{1}{2}\mu\mathfrak{A}\alpha \qquad -\mu\mathfrak{B}gg\cos 2\eta - \mu\mathfrak{A}gg\cos 2v - \mu\mathfrak{B}gg\cos(2\eta - 2v) - 3\mu\mathfrak{C}gg\cos(2\eta + 2v) \\
& -\tfrac{1}{2}(\mu - 2\nu)\mathfrak{B}\beta \qquad -3\mu\mathfrak{C}gg \qquad +2\mu\mathfrak{E}gg \qquad -2\nu\mathfrak{F}gg \qquad +2(2\mu - \nu)\,\mathfrak{G}gg \\
& -\tfrac{1}{2}(3\mu - 2\nu)\mathfrak{C}\gamma + 2(\mu - \nu)\,\mathfrak{D}gg \qquad +\tfrac{1}{2}\mu\mathfrak{A}\alpha + \tfrac{1}{2}(\mu - 2v)\mathfrak{B}\alpha \qquad +\tfrac{1}{2}(3\mu - 2v)\mathfrak{C}\alpha \\
& \qquad +\tfrac{1}{2}(\mu - 2\nu)\mathfrak{B}\alpha \qquad\qquad -\tfrac{1}{2}\mu\mathfrak{A}\beta \qquad\qquad -\tfrac{1}{2}\mu\mathfrak{A}\gamma \\
& \qquad +\tfrac{1}{2}(\mu - 2\nu)\mathfrak{C}\alpha \\
& \qquad\quad -\tfrac{1}{2}\mu\mathfrak{A}\beta \\
& \qquad\quad -\tfrac{1}{2}\mu\mathfrak{A}\gamma \\
& + (\mu - \nu)\,\mathfrak{H}gh\cos(v - u) + (\mu + \nu)\,\mathfrak{I}gh\cos(v + u) \\
& + 2\nu\mathfrak{B}gh\cos(2\eta - v - u) + 2\nu\mathfrak{B}gh\cos(2\eta - v + u) + 2\nu\mathfrak{C}gh\cos(2\eta + v - u) + 2\nu\mathfrak{C}gh\cos(2\eta + v + u) \\
& + (\mu - 3\nu)\,\mathfrak{L}gh \qquad + (\mu - \nu)\,\mathfrak{M}gh \qquad + (3\mu - 3\nu)\,\mathfrak{N}gh \qquad + (3\mu - \nu)\,\mathfrak{O}gh
\end{aligned}
$$

Donc

$$\mu\mathfrak{A}g + 0\alpha = \tfrac{1}{2} \qquad \text{ou} \qquad \mu\mathfrak{A} = \frac{1 - 2\,0\alpha}{2g}$$

$$(\mu - 2\nu)\,\mathfrak{B}g - 0\beta = \tfrac{9}{4} \qquad\qquad (\mu - 2\nu)\,\mathfrak{B} = \frac{9 - 4\,0\beta}{4g}$$

$$(3\mu - 2\nu)\,\mathfrak{C}g - 0\gamma = -\tfrac{3}{4} \qquad\qquad (3\mu - 2\nu)\,\mathfrak{C} = \frac{-3 + 4\,0\gamma}{4g}$$

et ces valeurs substituées dans le premier terme constant donnent

$$0g - \tfrac{1}{2}g + 0\alpha g + \frac{\alpha - 20\alpha\alpha}{4g} - \frac{9\beta - 40\beta\beta}{8g} + \frac{3\gamma - 40\gamma\gamma}{8g} = \tfrac{1}{4}g$$

$$\text{ou} \quad 0\left(g + \alpha g - \frac{\alpha\alpha - \beta\beta - \gamma\gamma}{2g}\right) = \tfrac{3}{4}g - \frac{2\alpha + 9\beta - 3\gamma}{8g}$$

$$\text{donc} \quad 0 = \frac{6gg - 2\alpha + 9\beta - 3\gamma}{8gg\,(1 + \alpha) - 4\alpha\alpha - 4\beta\beta - 4\gamma\gamma}.$$

Ensuite on aura

$$2\,(\mu - \nu)\,\mathfrak{D}gg = \mu\,(\mathfrak{B} + 3\mathfrak{C})\,gg - \frac{3\alpha}{4g} + \frac{(\beta + \gamma)\,(1 - 4\,0\alpha)}{4g} + \tfrac{3}{4}g$$

$$2\mu\mathfrak{E}gg = \mu\mathfrak{A}gg - \tfrac{1}{2}\mu\mathfrak{A}\alpha + \tfrac{1}{4}g$$

$$-2\nu\mathfrak{F}gg = \mu\mathfrak{B}gg - \tfrac{1}{2}(\mu - 2\nu)\,\mathfrak{B}\alpha + \tfrac{1}{2}\mu\mathfrak{A}\beta + \tfrac{3}{2}g$$

$$2\,(2\mu - \nu)\,\mathfrak{G}gg = 3\mu\mathfrak{C}gg - \tfrac{1}{2}(3\mu - 2\nu)\,\mathfrak{C}\alpha + \tfrac{1}{2}\mu\mathfrak{A}\gamma - \tfrac{3}{4}g$$

$$(\mu - \nu)\,\mathfrak{H}gh = -\tfrac{3}{4}h, \qquad (\mu + \nu)\,\mathfrak{I}gh = -\tfrac{3}{4}h$$

$$(\mu - 3\nu)\,\mathfrak{L}gh = -2\nu\mathfrak{B}gh - \tfrac{27}{8}h, \qquad (\mu - \nu)\,\mathfrak{M}gh = -2\nu\mathfrak{B}gh - \tfrac{27}{8}h$$

$$(3\mu - 3\nu)\,\mathfrak{N}gh = -2\nu\mathfrak{C}gh + \tfrac{9}{8}h, \qquad (3\mu - \nu)\,\mathfrak{O}gh = -2\nu\mathfrak{C}gh + \tfrac{9}{8}h.$$

inégalités α, β, γ étant des fractions extrêmement petites, on aura à peu près

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2\mu g}, \qquad \mathfrak{B} = \frac{9}{4(\mu - 2\nu)g}, \qquad \mathfrak{C} = -\frac{3}{4(3\mu - 2\nu)g}$$

$$\mathfrak{D}g = \frac{9\mu\mu}{4(\mu - \nu)(\mu - 2\nu)(3\mu - 2\nu)} + \frac{3}{8(\mu - \nu)} + \frac{\beta + \gamma - 3\alpha}{8(\mu - \nu)gg}, \quad \mathfrak{E}g = \frac{3}{8\mu} - \frac{\alpha}{8\mu gg}$$

$$\mathfrak{F}g = -\frac{3(5\mu - 4\nu)}{8\nu(\mu - 2\nu)} + \frac{9\alpha - 2\beta}{16\nu gg}, \quad \mathfrak{G}g = -\frac{3(3\mu - \nu)}{4(3\mu - 2\nu)(2\mu - \nu)} + \frac{3\alpha + 2\gamma}{16(2\mu - \nu)gg}$$

$$\mathfrak{H}h = -\frac{3h}{4(\mu - \nu)g} \qquad \mathfrak{I}h = -\frac{3h}{4(\mu + \nu)g}$$

$$\mathfrak{L}h = -\frac{9(3\mu - 2\nu)h}{8(\mu - 2\nu)(\mu - 3\nu)g} \qquad \mathfrak{M}h = -\frac{9(3\mu - 2\nu)h}{8(\mu - 2\nu)(\mu - \nu)g}$$

$$\mathfrak{N}h = \frac{3(9\mu - 2\nu)h}{8(3\mu - 2\nu)(3\mu - 3\nu)g} \qquad \mathfrak{O}h = \frac{3(9\mu - 2\nu)h}{8(3\mu - 2\nu)(3\mu - \nu)g}$$

où l'on aura la longitude de l'abside $\varphi - r$.

---

38. **Scholie 1.** Il est évident que ces formules n'auraient pas lieu, si l'excentricité moyenne était trop petite, voire même évanouissante, puisque alors tous les coefficients deviendraient infinis. En effet, si l'on supposait dans nos formules $q = g$ et qu'on négligeait, par conséquent, les inégalités de q, cela reviendrait au même que de supposer g incomparablement plus grand que les coefficients des inégalités de q. Ainsi, à moins que g ne soit beaucoup plus grand que

$$\frac{\varkappa}{2\mu} \text{ et } \frac{9\varkappa}{4(\mu - 2\nu)} \text{ etc.,}$$

on se tromperait fort si l'on voulait faire usage de ces formules. Ensuite, puisqu'il a été supposé aussi que l'excentricité ne soit pas trop grande, on voit que pour que les formules trouvées puissent avoir lieu, il faut que l'excentricité moyenne g ne soit ni trop grande, ni trop petite. Donc puisque

$$\frac{\varkappa}{\mu} = \frac{Fb^3}{(C + E)c^3},$$

il faut que cette fraction soit extrêmement petite, et que l'excentricité moyenne g tienne, pour ainsi dire, le milieu entre cette petite fraction et l'unité. Cela se comprend aussi fort aisément, car lorsque l'excentricité est fort petite, les autres inégalités du mouvement changeront très considérablement les points de l'orbite où la direction du mouvement est perpendiculaire au rayon vecteur, ou $dx = 0$, en sorte qu'à proprement parler, les absides ne seront plus marquées. Dans ces cas, il faudra donc recourir à une autre méthode, où l'on ne considère plus ces points mêmes, mais plutôt des points rapprochés où l'on placerait le lieu des vraies absides. Dans cette méthode l'anomalie v ne serait donc plus comptée depuis la vraie abside, mais de ce point imaginaire, de sorte que dx ne s'évanouirait plus lorsque $\sin v = 0$. Cependant il faut aussi remarquer, que lorsque l'excentricité est fort petite, une faute assez considérable dans le lieu des absides n'exerce presque aucune influence sur la longitude du satellite.

39. **Coroll. 1.** L'expression que nous venons de trouver pour la longitude des absides renferme d'abord le terme $\varkappa O\omega$ qui marque la longitude moyenne; d'où l'on voit que cette longitude est variable, et que la ligne des absides a un mouvement progressif $= \varkappa O\varpi$, pendant le temps exprimé par ω.

40. **Coroll. 2.** Dans la valeur trouvée

$$O = \frac{6gg - 2\alpha + 9\beta - 3\gamma}{8gg - 4\alpha\alpha - 4\beta\beta - 4\gamma\gamma},$$

puisque les quantités

$$\alpha = \frac{\varkappa}{2\mu}, \quad \beta = \frac{9\varkappa}{4(\mu - 2\nu)} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{3\varkappa}{4(3\mu - 2\nu)}$$

sont fort petites par rapport à g, leurs carrés pourront bien être rejetés par rapport à gg; mais ces quantités mêmes pourront être de la même grandeur que gg, et partant changer très sensiblement le numérateur.

41. **Coroll. 3.** Si la quantité

$$-2\alpha + 9\beta - 3\gamma = \frac{\varkappa(111\mu\mu - 56\mu\nu - 8\nu\nu)}{2\mu(\mu - 2\nu)(3\mu - 2\nu)}$$

était incomparablement plus petite que gg, ou $6gg$, alors on aurait $O = \frac{3}{4}$, et le mouvement moyen des absides serait $= \frac{3}{4}\varkappa\omega$, mouvement que l'on trouve par les méthodes ordinaires, lorsqu'on ne fait pas attention à ce que les inégalités y peuvent changer.

42. **Coroll 4.** Pour les inégalités qui se trouvent dans le mouvement des absides, elles peuvent devenir assez considérables, vu que les coefficients $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. sont divisés par l'excentricité g, et elles le seront d'autant plus, que l'excentricité sera plus petite.

43 **Scholie 2.** Ayant ainsi trouvé les valeurs assez approchantes des quantités p, q et ... il sera aisé de les déterminer plus exactement et de découvrir les inégalités dérivées. Car, soit pour abréger, $p = b(1 + \pi)$, où π marque les inégalités principales de p, et $q = g + \xi$, et l'on aura

$$d\varphi = d\omega\,(1 - (g + \xi)\cos v)^2 \sqrt{\frac{(C + E)a^3}{Ab^3(1 + \pi)^3}}$$

donc à cause de $\sqrt{\frac{(C + E)a^3}{Ab^3}} = \mu$ et $\sqrt{\frac{1}{(1 + \pi)^3}} = 1 - \frac{3}{2}\pi$, on aura

$$d\varphi = \mu d\omega\,(1 - \tfrac{3}{2}\pi)\,(1 + \tfrac{1}{2}(g + \xi)^2 - 2(g + \xi)\cos v + \tfrac{1}{2}(g + \xi)^2\cos 2v)$$

ou bien

$$d\varphi = \mu d\omega\,(1 + \tfrac{1}{2}gg - 2g\cos v + \tfrac{1}{2}gg\cos 2v + g\xi - 2\xi\cos v + g\xi\cos 2v - \tfrac{3}{2}\pi)$$
$$+ 3g\pi\cos v$$

en négligeant les termes trop petits. De là on aura

$$dv = d\varphi - \frac{\varkappa d\omega}{g}\left(\tfrac{1}{4}g + \tfrac{1}{2}\cos v + \tfrac{9}{4}\cos(2\eta - v) - \tfrac{3}{4}\cos(2\eta + v) \text{ etc.}\right).$$

pour les éléments de nos angles, dont nous nous servirons dans les intégrations, nous pourrons considérer le mouvement du soleil comme règulier, admettant $du = d\theta = \nu\,(1 + \frac{1}{2}hh) - 2\nu h \cos u$, et dans les petits termes il suffira de poser $q = g$. Soit donc

$$\mu(1 + \tfrac{1}{2}gg) - \tfrac{1}{4}\varkappa = \alpha,\ \mu g + \frac{\varkappa}{4g} = \beta,\ \nu\,(1 + \tfrac{1}{2}hh) = \gamma,\ \mu\,(1 + \tfrac{1}{2}gg) - \nu\,(1 + \tfrac{1}{2}hh) = \delta,$$

et nous aurons

$$\frac{dv}{d\omega} = \alpha - 2\beta \cos v - \frac{9\varkappa}{4g}\cos(2\eta - v) + \frac{3\varkappa}{4g}\cos(2\eta + v)$$

$$\frac{du}{d\omega} = \gamma - 2\nu h \cos u$$

$$\frac{d\eta}{d\omega} = \delta - 2\mu g \cos v + 2\nu h \cos u$$

et ces éléments peuvent être suffisants pour trouver les inégalités des quantités p, q et de $\varphi - v$, puisqu'elles sont peu considérables en elles-mêmes. Ensuite nous aurons

$$\frac{mp\sqrt{a^3p}}{r^3} = \varkappa\sqrt{(1 + \pi)^3} = \varkappa\,(1 + \tfrac{3}{2}\pi)\ \text{à cause de } r \text{ constant} = c.$$

Or les variations trouvées pour p et q étant assez exactes puisqu'elles sont extrêmement petites, nous n'aurons besoin que de déterminer plus exactement les inégalités des absides, ou l'angle $\varphi - v$. Car supposant pour $\varphi - v$ la même valeur que dans la solution, avec ces termes

$$\varkappa\mathfrak{P}\sin(4\eta - 2v) + \varkappa\mathfrak{Q}\sin 4\eta + \varkappa\mathfrak{R}\sin(4\eta + 2v)$$

nous aurons

$$\begin{array}{lllll}
\dfrac{d\varphi - dv}{\varkappa d\omega} = 0 & + \alpha\mathfrak{A}\cos v & + (2\delta - \alpha)\,\mathfrak{B}\cos(2\eta - v) & + (2\delta + \alpha)\,\mathfrak{C}\cos(2\eta + v) & \\
\quad - \beta\mathfrak{A} & & & & \\
\quad + \dfrac{9\varkappa\mathfrak{B}}{8g} & & & & \\
\quad + \dfrac{3\varkappa\mathfrak{C}}{8g} & & & & \\
\quad - \beta\mathfrak{A}\cos 2v & - \dfrac{3\varkappa\mathfrak{A}}{4g}\cos 2\eta & - \dfrac{9\varkappa\mathfrak{A}}{8g}\cos(2\eta - 2v) & + \dfrac{3\varkappa\mathfrak{A}}{8g}\cos(2\eta + 2v) & \\
\quad - \dfrac{3\varkappa\mathfrak{B}}{8g} & - (2\mu g - \beta)\mathfrak{B} & - (2\mu g - \beta)\,\mathfrak{B} & - (2\mu g + \beta)\,\mathfrak{C} & \\
\quad - \dfrac{9\varkappa\mathfrak{C}}{8g} & - (2\mu g + \beta)\mathfrak{C} & + 2\,(\delta - \alpha)\,\mathfrak{F}g & + 2\,(\delta + \alpha)\,\mathfrak{G}g & \\
\quad + 2\alpha\mathfrak{E}g & + 2\delta\mathfrak{D}g & & & \\
\quad + (\alpha - \gamma)\,\mathfrak{H}h\cos(v - u) & + (\alpha + \gamma)\,\mathfrak{I}h\cos(v + u) & & &
\end{array}$$

*

$$\begin{array}{llll}
+2\nu h\mathfrak{B}\cos(2\eta-v-u) & +2\nu h\mathfrak{B}\cos(2\eta-v+u) & +2\nu h\mathfrak{C}\cos(2\eta+v-u) & +2\nu h\mathfrak{C}\cos(2\eta\ldots \\
+(2\delta-\alpha-\gamma)\mathfrak{L}h & +(2\delta-\alpha+\gamma)\mathfrak{M}h & +(2\delta+\alpha-\gamma)\mathfrak{N}h & +(2\delta+\alpha+\gamma)\mathfrak{O}h
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
+\frac{9\varkappa\mathfrak{B}}{8g}\cos(4\eta-2v) & -\frac{3\varkappa\mathfrak{B}}{8g}\cos 4\eta & +\frac{3\varkappa\mathfrak{C}}{8g}\cos(4\eta+2v) \\
+(4\delta-2\alpha)\mathfrak{P} & -\frac{9\varkappa\mathfrak{C}}{8g} & +(4\delta+2\alpha)\mathfrak{R} \\
 & +4\delta\mathfrak{Q}. &
\end{array}$$

Cette valeur étant multipliée par

$$q=g+A\cos v-B\cos(2\eta-v)-C\cos(2\eta+v)-Dg\cos 2\eta+Eg\cos 2v+Fg\cos(2\eta-2v)-Gg\cos(2\eta+2v)$$

où les quantités A, B, C, D etc. sont connues par la valeur de q, nous aurons

$$\begin{array}{lllll}
\frac{q(d\varphi-dv)}{\varkappa d\omega}=Og & +\alpha\mathfrak{A}g\cos v & +(2\delta-\alpha)\mathfrak{B}g\cos(2\eta-v) & +(2\delta+\alpha)\mathfrak{C}g\cos(2\eta+v) & -(2\mu g-\beta)\mathfrak{B}g\cos 2\eta \\
 & -\beta\mathfrak{A}g+OA & -OB & -OC & -(2\mu g+\beta)\mathfrak{C}g \\
 & +\frac{9}{8}\varkappa\mathfrak{B} & & & +2\delta\mathfrak{D}gg \\
 & +\frac{3}{8}\varkappa\mathfrak{C} & & & -\frac{3}{4}\varkappa\mathfrak{A} \\
 & +\frac{1}{2}\alpha A\mathfrak{A} & & & +\frac{1}{2}(2\delta-\alpha)A\mathfrak{B} \\
 & -\frac{1}{2}(2\delta-\alpha)B\mathfrak{B} & & & +\frac{1}{2}(2\delta+\alpha)A\mathfrak{C} \\
 & -\frac{1}{2}(2\delta+\alpha)C\mathfrak{C} & & & -\frac{1}{2}\alpha B\mathfrak{A} \\
 & & & & -\frac{1}{2}\alpha C\mathfrak{A}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
-\beta\mathfrak{A}g\cos 2v & -\frac{9}{8}\varkappa\mathfrak{A}\cos(2\eta-2v) & +\frac{3}{8}\varkappa\mathfrak{A}\cos(2\eta+2v) \\
-\frac{3}{8}\varkappa\mathfrak{B} & -(2\mu g-\beta)\mathfrak{B}g & \\
-\frac{9}{8}\varkappa\mathfrak{C} & +2(\delta-\alpha)\mathfrak{F}gg & -(2\mu g+\beta)\mathfrak{C}g \\
+2\alpha\mathfrak{E}gg & +\frac{1}{2}(2\delta-\alpha)A\mathfrak{B} & +2(\delta+\alpha)\mathfrak{G}gg \\
+\frac{1}{2}\alpha A\mathfrak{A} & -\frac{1}{2}\alpha B\mathfrak{A} & +\frac{1}{2}(2\delta+\alpha)A\mathfrak{C} \\
-\frac{1}{2}(2\delta+\alpha)B\mathfrak{C} & & -\frac{1}{2}\alpha C\mathfrak{A} \\
-\frac{1}{2}(2\delta-\alpha)C\mathfrak{B} & &
\end{array}$$

$$+(\alpha-\gamma)\mathfrak{H}gh\cos(v-u)+(\alpha+\gamma)\mathfrak{I}gh\cos(v+u)$$

$$\begin{array}{llll}
+2\nu\mathfrak{B}gh\cos(2\eta-v-u) & +2\nu\mathfrak{B}gh\cos(2\eta-v+u) & +2\nu\mathfrak{C}gh\cos(2\eta+v-u) & -2\nu\mathfrak{C}gh\cos(2\eta+v+u) \\
+(2\delta-\alpha-\gamma)\mathfrak{L}gh & +(2\delta-\alpha+\gamma)\mathfrak{M}gh & +(2\delta+\alpha-\gamma)\mathfrak{N}gh & +(2\delta+\alpha+\gamma)\mathfrak{O}gh
\end{array}$$

$$+\tfrac{9}{8}\varkappa\mathfrak{B}\cos(4\eta-2v) \quad -\tfrac{3}{8}\varkappa\mathfrak{B}\cos 4\eta \quad +\tfrac{3}{8}\varkappa\mathfrak{C}\cos(4\eta+2v)$$

$$+2(2\delta-\alpha)\mathfrak{P}g \quad -\tfrac{9}{8}\varkappa\mathfrak{C} \quad +2(2\delta+\alpha)\mathfrak{R}g$$

$$-\tfrac{1}{2}(2\delta-\alpha)B\mathfrak{B} \quad +4\delta\mathfrak{Q}g \quad -\tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)C\mathfrak{C}$$

$$-\tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)B\mathfrak{C}$$

$$-\tfrac{1}{2}(2\delta-\alpha)C\mathfrak{B}$$

De là nous tirerons

$$\tfrac{1}{4}g = 0g - \beta\mathfrak{A}g + \tfrac{9}{8}\varkappa\mathfrak{B} + \tfrac{3}{8}\varkappa\mathfrak{C} + \tfrac{1}{2}\alpha A\mathfrak{A} - \tfrac{1}{2}(2\delta-\alpha)B\mathfrak{B} - \tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)C\mathfrak{C}$$
$$+\tfrac{1}{2}D\left(\tfrac{3}{4}\varkappa\mathfrak{A} + (2\mu g-\beta)\mathfrak{B}g + (2\mu g+\beta)\mathfrak{C}g - 2\delta\mathfrak{D}gg\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}E\left(2\alpha\mathfrak{E}gg - \beta\mathfrak{A}g - \tfrac{3}{8}\varkappa\mathfrak{B} - \tfrac{9}{8}\varkappa\mathfrak{C}\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}F\left(2(\delta-\alpha)\mathfrak{F}gg - \tfrac{9}{8}\varkappa\mathfrak{A} - (2\mu g-\beta)\mathfrak{B}g\right)$$
$$-\tfrac{1}{2}G\left(2(\delta+\alpha)\mathfrak{G}gg + \tfrac{3}{8}\varkappa\mathfrak{A} - (2\mu g+\beta)\mathfrak{C}g\right) \text{ etc.}$$

et par suite

$$\tfrac{1}{2} = \alpha\mathfrak{A}g + 0A, \qquad \tfrac{9}{4} = (2\delta-\alpha)\mathfrak{B}g - 0B, \qquad -\tfrac{3}{4} = (2\delta+\alpha)\mathfrak{C}g - 0C$$

$$\tfrac{1}{4}g = -\beta\mathfrak{A}g - \tfrac{3}{8}\varkappa\mathfrak{B} - \tfrac{9}{8}\varkappa\mathfrak{C} + 2\alpha\mathfrak{E}gg + \tfrac{1}{2}\alpha A\mathfrak{A} - \tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)B\mathfrak{C} - \tfrac{1}{2}(2\delta-\alpha)C\mathfrak{B}$$

$$\tfrac{3}{4}g = 2\delta\mathfrak{D}gg - (2\mu g-\beta)\mathfrak{B}g - \tfrac{3}{4}\alpha\mathfrak{A} + \tfrac{1}{2}(2\delta-\alpha)A\mathfrak{B} - \tfrac{1}{2}\alpha B\mathfrak{A}$$
$$-(2\mu g+\beta)\mathfrak{C}g \qquad + \tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)A\mathfrak{C} - \tfrac{1}{2}\alpha C\mathfrak{A}$$

$$\tfrac{3}{2}g = 2(\delta-\alpha)\mathfrak{F}gg - \tfrac{9}{8}\varkappa\mathfrak{A} - (2\mu g-\beta)\mathfrak{B}g + \tfrac{1}{2}(2\delta-\alpha)A\mathfrak{B} - \tfrac{1}{2}\alpha B\mathfrak{A}$$

$$-\tfrac{3}{4}g = 2(\delta+\alpha)\mathfrak{G}gg + \tfrac{3}{8}\varkappa\mathfrak{A} - (2\mu g+\beta)\mathfrak{C}g + \tfrac{1}{2}(2\delta+\alpha)A\mathfrak{C} - \tfrac{1}{2}\alpha C\mathfrak{A}$$

$$-\tfrac{3}{4}h = (\alpha-\gamma)\mathfrak{H}gh, \qquad -\tfrac{3}{4}h = (\alpha+\gamma)\mathfrak{J}gh$$

$$-\tfrac{27}{8}h = (2\delta-\alpha-\gamma)\mathfrak{L}gh + 2\nu\mathfrak{B}gh, \qquad -\tfrac{27}{8}h = (2\delta-\alpha+\gamma)\mathfrak{M}gh + 2\nu\mathfrak{B}gh$$

$$+\tfrac{9}{8}h = (2\delta+\alpha-\gamma)\mathfrak{N}gh + 2\nu\mathfrak{C}gh, \qquad +\tfrac{9}{8}h = (2\delta+\alpha+\gamma)\mathfrak{O}gh + 2\nu\mathfrak{C}gh$$

$$o = \tfrac{3}{8}\varkappa\mathfrak{B} + 2(2\delta - \alpha)\mathfrak{P}g - \tfrac{1}{2}(2\delta + \alpha)B\mathfrak{B}$$

$$o = -\tfrac{3}{8}\varkappa\mathfrak{B} - \tfrac{9}{8}\varkappa\mathfrak{C} + 4\delta\mathfrak{Q}g - \tfrac{1}{2}(2\delta + \alpha)B\mathfrak{C} - \tfrac{1}{2}(2\delta - \alpha)C\mathfrak{B}$$

$$o = \tfrac{3}{8}\varkappa\mathfrak{C} + 2(2\delta - \alpha)\mathfrak{R}g - \tfrac{1}{2}(2\delta + \alpha)C\mathfrak{C}$$

Et si nous substituons dans la première égalité les valeurs des lettres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. que les équations suivantes (?) fournissent, et que nous écrivions

$$B \text{ pour } \frac{9\varkappa}{4(2\delta - \alpha)}, \text{ et } C \text{ pour } \frac{3\varkappa}{4(2\delta + \alpha)},$$

pluisieurs termes se détruiront et nous trouverons en négligeant les termes D, E, F etc.

$$O = \frac{\frac{1}{4}g + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{A}{4g}}{g + \frac{\beta A}{\alpha} - \frac{AA}{4g}} = \frac{\frac{1}{4}g + \frac{\mu g}{2\alpha}}{g + \frac{\mu Ag}{\alpha} + \frac{\varkappa A}{8\alpha g}} = \frac{2\alpha gg + 4\mu gg}{8\alpha gg + 8\mu Agg + \varkappa A}$$

et partant

$$O = \frac{6\mu - \frac{1}{2}\varkappa}{8\mu + 2\varkappa},$$

de sorte que l'augmentation du mouvement des absides, qui a été trouvée auparavant, s'évanouit maintenant.