VIII. Capitel.

Von der Wirkung der Kräfte auf die Richtung der Körper.

62) *Wenn ein bewegter Körper seitwärts gedrückt wird von einer Kraft, deren Richtung auf die Richtung des Körpers winkelrecht ist, so wird dadurch der Weg, welchen der Körper beschreibt, gekrümmt, ohne dass die Geschwindigkeit desselben daher einige Veränderung leidet.*

Weil die Kraft weder vorwärts noch rückwärts auf den Körper wirket, so kann die Geschwindigkeit desselben weder vermehret noch vermindert werden und die Wirkung der Kraft wird also darin bestehn, dass der Körper von seiner gradlinichten Bewegung abgeleitet wird, und folglich eine krumme Linie beschreiben muss. Sobald aber sein Lauf gekrümmt wird, so hört die Richtung der Kraft auf darauf winkelrecht zu sein, wenn nämlich die Kraft immer einerlei Richtung behält, und denn bald freilich eine Veränderung der Geschwindigkeit entstehen kann. Wir müssen also diese Krümmung des Wegs nur durch einen unendlich kleinen Zeitraum betrachten, damit inzwischen keine merkliche Veränderung in der Geschwindigkeit entspringen könne. Der Körper, dessen Masse $= M$ sei also bisher in der graden Linie EA (Fig. 222.) mit einer Geschwindigkeit $= v$ gelaufen, in A aber fange eine Kraft $= p$ an auf denselben zu wirken, und nach der Richtung AC, so auf AF winkelrecht ist, zu stossen, welche Kraft immer einerlei Richtung behalte, diese Kraft wird nun verursachen, dass der Körper seinen Lauf nicht nach der graden Linie AF fortsetzt, sondern nach einer gewissen krummen Linie AM lenket, welche man folgender Gestalt wird bestimmen können. Wenn die Kraft gar nicht vorhanden wäre, so würde der Körper mit seiner Geschwindigkeit v nach der graden Linie AF fortlaufen, und in einer Zeit $= t$ den Weg AQ durchlaufen, so dass $AQ = vt$, weil in einer gleichförmigen Bewegung der Weg gefunden wird, wenn man die Geschwindigkeit mit der Zeit multiplicirt. Wenn aber der Körper in A stillstände und von der Kraft p nach der Linie AC getrieben würde, so würde er in eben der Zeit t durch einen Weg $AP = \frac{ptt}{2M}$ bewegt werden (58). Wenn also der Körper beides, seine Bewegung behält und zugleich von der Kraft p angetrieben wird, so wird sich derselbe nach Verfliessung der Zeit t weder in Q noch in P befinden, sondern in M, wenn man nämlich die Linie QM aus Q der Linie AP gleich und gleichlaufend zieht. Um also den wahren Ort des Körpers nach der Zeit t zu bestimmen, so nehme man auf der Linie AF den Weg $AQ = vt$, und setze davon in Q winkelrecht die Linie $QM = \frac{ptt}{2M}$, so wird M den gesuchten Ort des Körpers anzeigen.

63) *Der krumme Weg nach welchem ein Körper, der von einer seitwärts wirkenden Kraft getrieben wird, seinen Lauf lenket, kann als ein Zirkelbogen angesehen werden, dessen Durchmesser sich verhalten wird wie die Masse des Körpers multiplicirt mit dem Quadrat der Geschwindigkeit, und dividirt durch die Kraft; das ist wie die sogenannte lebendige Kraft des Körpers durch die wirkende Kraft selbst dividirt.*

Die krumme Linie AM ist nach dem vorhergehenden Satz so beschaffen, dass nach der Zeit

*

$= t$ für dieselbe herauskommt: $AP = \frac{nptt}{2M}$ und $PM = AQ = vt$. Wenn wir nun für diese Linie

$$AP = \frac{nptt}{2M} = x \text{ und } PM = vt = y$$

so bekommen wir für die Zeit t einen doppelten Werth, nämlich:

$$tt = \frac{2Mx}{np} \text{ und } t = \frac{y}{v} \text{ oder } tt = \frac{yy}{vv}$$

folglich wird die Natur der krummen Linie AM durch diese Gleichheit ausgedrückt:

$$\frac{2Mx}{np} = \frac{yy}{vv} \text{ oder } yy = \frac{2Mvv}{np} x \cdot$$

welche eine Parabel andeutet, deren Parameter ist $\frac{2Mvv}{np}$. Weil wir aber hier nur einen unendlich kleinen Theil dieser Linie betrachten müssen, so können wir denselben als einen unendlich kleinen Zirkelbogen ansehen, und der Durchmesser des Zirkels, davon AM ein Bogen ist, wird dem obigen Parameter gleich, also $= \frac{2Mvv}{np}$. Demnach ist der halbe Durchmesser dieses Zirkels, oder der Radius der Krümmung des Weges $AM = \frac{Mvv}{np}$. Folglich verhält sich derselbe wie die Masse des Körpers mit dem Quadrat der Geschwindigkeit multiplicirt und durch die Kraft p dividirt, wobei n eine gewisse Zahl andeutet, welche ihre Bestimmung durch die Art die Massen, Kräfte und Geschwindigkeiten auszumessen, erhält. Hat man nun eine solche Art nach Belieben erwählt und derselben gemäss für einen einzigen Fall den gehörigen Werth für die Zahl n bestimmt, so kann man sogar die wahre Grösse des halben Durchmessers der Krümmung AM anzeigen, denn wenn C das Centrum des Bogens AM andeutet, so wird man haben $CA = \frac{Mvv}{np}$. Auf solche Art wird nun die von einer seitwärts wirkenden Kraft verursachte Krümmung des Weges am füglichsten vorgestellt, und da die Zeit hier nicht mehr in Betrachtung kommt, indem in einer grössern oder kleinern Zeit, der Körper nur einen grössern oder kleinern Bogen ebendesselben Zirkels beschreibt, so erkennt man hieraus am deutlichsten die Krümmung des Weges, und also die Wirkung, welche eine Kraft deren Richtung winkelrecht auf die Richtung der Bewegung ist, in dem Zustande des Körpers hervorbringen muss.

64) *Wenn die Bewegung eines Körpers von einer seitwärts wirkenden Kraft gekrümmt wird, so ist der halbe Durchmesser der Krümmung doppelt so gross als der Weg auf welchem der Körper, wenn ebendieselbe Kraft rückwärts auf ihn wirkte, seine Bewegung gänzlich verlieren würde.*

Wenn ein Körper dessen Masse $= M$, sich mit einer Geschwindigkeit $= v$, beweget, und inzwischen auf denselben seitwärts eine Kraft $= p$ wirket, so wird seine Bewegung nach einem Zirkelbogen gelenket werden, dessen halber Durchmesser ist $= \frac{Mvv}{np}$, wie in dem vorigen Satz gezeigt worden. Wenn aber dieser Körper durch eben diese Kraft p, so jetzt rückwärts auf ihn wirken soll, zu Ruhe gebracht werden sollte, so müsste derselbe einen Weg s durchlaufen, dergestalt dass

$Mvv = 2nps$ (64): dieser Weg, auf welchem der Körper seine ganze Bewegung durch die rückwärts treibende Kraft p einbüsste, würde demnach sein $s = \frac{Mvv}{2np}$, und folglich halb so gross als der oben gefundene halbe Durchmesser der Krümmung. Woraus dann folget, dass der halbe Durchmesser der Krümmung zweimal so gross sein müsse als der Weg, auf welchem eben diese Kraft, wenn sie rückwärts auf den Körper wirkte, denselben seiner ganzen Bewegung berauben würde. Die Vergleichung dieser beiden Fälle, da eben dieselbe Kraft einmal seitwärts, hernach rückwärts auf den Körper zu wirken angenommen wird, leitet uns also zu einer solchen Bestimmung des halben Durchmessers der Krümmung im erstern Falle, welche nicht mehr von der Zahl n und der Art die verschiedenen Grössen durch Zahlen auszudrücken abhängt, sondern uns sofort eine Linie anzeigt, welche demselben halben Durchmesser gleich ist. Denn wenn der gedachte Weg, auf welchem der Körper durch die Kraft p seiner Bewegung beraubet werden kann, durch s angedeutet wird, so ist der gesuchte halbe Durchmesser $= 2s$. Hier kann noch angemerket werden, dass $2s$ auch den Weg ausdrückt, welchen der Körper mit seiner Geschwindigkeit v gleichförmig durchlaufen würde in eben der Zeit, in welcher derselbe von der rückwärts wirkenden Kraft zur Ruhe gebracht werden kann.

65) *Wenn die Kraft beständig einerlei Grösse behält, ihre Richtung aber immerfort also verändert, dass sie auf die Richtung des Körpers allezeit winkelrecht bleibt, so wird der Körper in einem Zirkel immer gleich geschwind herumlaufen, dessen halber Durchmesser demjenigen gleich sein wird, welcher eben bestimmt worden.*

Wenn der Körper, dessen Masse $= M$ sich anfänglich mit einer Geschwindigkeit $= v$ beweget, und von einer Kraft p, die auf die Richtung des Körpers winkelrecht ist, getrieben wird, so wird derselbe seinen Lauf nach einem Zirkelbogen krümmen, dessen halber Durchmesser $= \frac{Mvv}{np}$, und zum wenigsten in einer unendlich kleinen Zeit keine Veränderung an seiner Geschwindigkeit leiden, als welche nur insofern Statt findet, als die Kraft nicht mehr winkelrecht auf die Richtung des Körpers wirket. Wollen wir aber annehmen, dass die Kraft p beständig winkelrecht auf die Bewegung des Körpers bleibe, so kann keine Veränderung in der Geschwindigkeit des Körpers stattfinden, und derselbe muss mit einer gleichförmigen Bewegung allzeit in diesem Zirkel herumlaufen, dessen halber Durchmesser ist $= \frac{Mvv}{np}$ oder auch $= 2s$, wenn nach dem vorigen Satze s den Weg andeutet, auf welchem der Körper von der Kraft p, wenn sie rückwärts wirkte, seine ganze Bewegung verlieren würde. Der Körper wird also beständig mit einerlei Geschwindigkeit v in dem Zirkel herumlaufen: und wenn wir den halben Durchmesser dieses Zirkels $= r$ setzen, so haben wir $r = \frac{Mvv}{np}$ oder $r = 2s$, woraus man ersehen kann, wie gross die Geschwindigkeit des Körpers v sein müsse, damit er in einem gegebenen Zirkel herumliefe, es müsse nämlich sein $vv = \frac{npr}{M}$ oder $v = \sqrt{\frac{npr}{M}}$. Ist aber der Zirkel, in welchem der Körper herumlaufen soll gegeben, und auch die Geschwindigkeit v, so kann man daraus die Grösse der Kraft p bestimmen, welche auf den Körper immer winkelrecht wirken muss: denn es wird sein $p = \frac{Mvv}{nr}$. Da übrigens die Kraft immer winkelrecht auf die Richtung des Körpers wirken muss, so ist klar dass der Körper immer nach dem Mittelpunkt des Zirkels getrieben werden müsse.

66) *Damit also ein Körper mit einer gegebenen Geschwindigkeit in einem Zirkel herumlaufe, so muss derselbe beständig gegen den Mittelpunkt des Zirkels getrieden werden mit einer Kraft, welche sich verhält wie die Masse des Körpers multiplicirt mit dem Quadrat der Geschwindigkeit und dividirt durch den halben Durchmesser des Zirkels.*

Wenn die Masse des Körpers $= M$, die Geschwindigkeit $= v$, der halbe Durchmesser des Zirkels $= r$, und die dazu erforderte Kraft $= p$ gesetzt wird, so haben wir gefunden dass seyn müsse: $p = \frac{Mvv}{nr}$. Wenn diese Kraft rückwärts auf den Körper wirken sollte, so würde sie denselben zu Ruhe bringen, indem er einen Weg durchläuft, welcher der Hälfte des halben Durchmessers r gleich käme. Denn wenn dieser Weg $= s$ genannt wird, so haben wir gefunden $Mvv = 2nps$, woraus hier entspringt $p = \frac{2nps}{nr}$, und also: $s = \frac{1}{2}r$. Wir können also die zur Beschreibung eines Zirkels erforderte Kraft also ausdrücken, dass dieselbe gleich sein müsse derjenigen Kraft, welche, indem sie auswärts auf den Körper wirkte, vermögend wäre denselben zu Ruhe zu bringen, indem er einen Weg, so dem vierten Theil des Durchmessers gleich ist, durchliefe. Sollte aber die nach dem Mittelpunkte treibende Kraft plötzlich aufhören, so würde der Körper von diesem Augenblick an mit seiner Geschwindigkeit nach einer graden Linie fortlaufen, welche den Zirkel berührte. Der Körper bemühet sich nämlich vermöge seiner Standhaftigkeit alle Augenblicke mit seiner Geschwindigkeit nach seiner Richtung fortzulaufen, und sobald daher die nach dem Mittelpunkte treibende Kraft aufhört, so folgt er diesem seinem natürlichen Triebe. Sollte der Körper mit einem Faden an dem Mittelpunkte befestigt sein, und also von dem Faden in dem Zirkel erhalten werden, so würde der Faden die Stelle der Kraft vertreten, und durch seine Spannung den Körper im Zirkel erhalten. Weil demnach der Faden mit einer solchen Kraft als bestimmt worden, nämlich $p = \frac{Mvv}{nr}$, gespannt sein wird, so sagt man dass der Körper in diesem Zustande eine Kraft habe den Faden zu spannen: und dieses ist die Kraft, welche sonst *Vis centrifuga* genannt wird, also mit der obenbestimmten Kraft einerlei ist, welche zur zirkelförmigen Bewegung erfordert wird.

67) *Wenn sich aber ein Körper mit ungleicher Geschwindigkeit in einer krummen Linie bewegen soll, so werden dazu immer zwei Kräfte erfordert, eine welche den Körper entweder vorwärts oder rückwärts treibet und die Veränderung in der Geschwindigkeit wirket, die andere aber, welche den Körper seitwärts treibt und ihn nach der Krümmung der Linie lenket.*

Lasst uns setzen der Körper, dessen Masse $= M$, bewege sich mit einer veränderlichen Geschwindigkeit in der krummen Linie AME (Fig. 223.) und seine Geschwindigkeit sei in $M = v$. Weil nun in einer unendlich kleinen Zeit die Bewegung als gleichförmig angesehen werden kann, da der Zuwachs oder Verlust der Geschwindigkeit, so inzwischen erwächst, unendlich klein ist, der unendlich kleine Weg Mm so inzwischen durchlaufen wird, als ein Zirkelbogen angesehen werden kann, dessen Mittelpunkt in R und der halbe Durchmesser sei $RM = r$, so wird um diese Krümmung hervorzubringen eine Kraft erfordert, welche den Körper seitwärts nach der Richtung MR antreibt, und diese Kraft wird nach dem vorigen Satze sein $= \frac{Mvv}{nr}$.

Insofern hernach die Geschwindigkeit verändert wird, so lasst uns setzen der, in der unendlich kleinen Zeit dt erzeugte Zuwachs der Geschwindigkeit, sei $= dv$. Hiezu wird demnach eine Kraft erfordert, welche den Körper vorwärts treibt nach seiner Richtung, das ist nach der in M berührenden graden Linie MT. Diese Kraft sei nun $= p$, und da haben wir aus dem obigen $dv = \frac{npdt}{M}$, folglich $p = \frac{Mdv}{ndt}$: welche Kraft also mit der vorhergefundenen seitwärts wirkenden Kraft diese Bewegung nach der krummen Linie AME hervorzubringen im Stande sein wird. Sollte die Geschwindigkeit abnehmen, so würde dv negativ und für die Kraft p auch ein negativer Werth gefunden werden, in welchem Falle also diese Kraft rückwärts nach der Richtung $M\Theta$ auf den Körper wirken müsste.

Will man anstatt der unendlich kleinen Zeit dt den inzwischen durchlaufenen unendlich kleinen Weg Mm in die Rechnung bringen, so setze man den ganzen Weg oder den Bogen $AM = s$, so wird $Mm = ds$, und da $v = \frac{ds}{dt}$, weil die Bewegung durch Mm als gleichförmig angesehen werden kann, so hat man $\frac{1}{dt} = \frac{v}{ds}$, und daher findet man die nach MT wirkende Kraft $p = \frac{Mvdv}{nds}$.

Von diesen zwei erforderten Kräften pflegt die erstere so nach MR wirket die winkelrechte Kraft (*vis normalis*), die letztere aber so nach MT oder auch $M\Theta$ wirket, die berührende Kraft (*vis tangentialis*) genannt zu werden.

(68) *Hieraus kann man hinwiederum die Veränderung bestimmen, welche eine auf die Bewegung des Körpers schiefwirkende Kraft hervorbringen muss, denn eine solche Kraft lässt sich in zwei andere zerlegen, deren eine entweder vorwärts oder rückwärts auf den Körper wirket, die andere aber seitwärts, und eine jede wird in dem Zustande des Körpers eben diejenige Veränderung hervorbringen, welche vorher bestimmt worden.*

Wir wollen die Kraft sowohl nach ihrer Grösse als Richtung veränderlich annehmen, und wenn der Körper in M (Fig. 224.) gekommen, wo seine Richtung nach MT und Geschwindigkeit $= v$ sein wird, so soll eine Kraft $= V$ nach der Richtung MV auf denselben wirken. Nun ziehe man die Linie MR winkelrecht auf MT, und errichte das rechtwinklichte Viereck $VNMT$, davon MV eine Querlinie sei, so ist bekannt, dass die Kraft MV gleich gültig sei mit den zweien Kräften, so durch die Seiten MT und MN ausgedrückt werden, davon jene die vorwärts- diese aber die seitwärtswirkende Kraft anzeigt. Man setze nun die vorwärtstreibende Kraft $MT = T$ und die seitwärtstreibende $MN = N$, so hat man nach den Verhältnissen der Seiten MT und MN mit der Querlinie MV diese Bestimmungen:

$$T = \frac{MT}{MV} V \text{ und } N = \frac{MN}{MV} \cdot V.$$

Von der ersteren wird die Geschwindigkeit des Körpers einen Zuwachs erhalten, welcher in der unendlich kleinen Zeit $= dt$, betragen wird $dv = \frac{nTdt}{M}$, wo M die Masse des Körpers, oder wenn man den inzwischen durchlaufenen unendlich kleinen Weg $Mm = ds$ setzet, $ds = vdt$, so wird man haben $vdv = \frac{nTds}{M}$. Die andere Kraft N wird den Körper nöthigen Bewegung zu krümmen, und das dergestalt, dass wenn man den halben Durchmesser der Krümmung $MR = r$ nennt, sein wird $r = \frac{Mvv}{nN}$. Also wird die Veränderung welche alle Augenblicke dem Zustande des Körpers vorgeht durch die zwei folgenden Gleichungen ausgedrückt,

$$dv = \frac{nTdt}{M} \quad \text{oder} \quad vdv = \frac{nTds}{M} \quad \text{und} \quad r = \frac{Mvv}{nN}.$$

Wie aber hieraus in einem jeglichen Falle die Bewegung des Körpers selbst, das ist die Linie und die Geschwindigkeit in einem jeglichen Punkte derselben gefunden werden könne, nicht der Ort zu zeigen, sondern es gehört in die besondere Lehre von der Bewegung, jedoch im folgenden Capitel ein leichterer Weg vorgeschlagen werden.

IX. Capitel.

Bestimmung der Bewegung eines Körpers, welcher von Kräften getrieben wird.

69) *So lange sich ein Körper gleichförmig nach einerlei Richtung beweget, so entfernt er sich von einer nach Belieben festgesetzten Fläche oder nähert sich derselben gleichgesch... Hieraus ist klar, was wir durch die Bewegung eines Körpers von einer Fläche verstehen, und dass in dem angeführten Falle diese Bewegung gleichförmig sein werde.*

Wenn wir bei der Bewegung eines Körpers nur auf seine Entfernung von einer gewissen Fläche sehen, so nennen wir die Veränderung dieser Entfernung die Bewegung des Körpers von dieser Fläche. Diese Bewegung können wir also als eine Geschwindigkeit ansehen und ausmessen, wenn wir den Zuwachs dieser Entfernung durch die Zeit dividiren. Also wenn wir jetzt die Entfernung des Körpers von der Fläche durch x nach Verfliessung aber einer unendlich kleinen Zeit dt durch $x + dx$ andeuten, so dass die Entfernung in dieser Zeit dt um dx gewachsen, so sagen wir, in diesem Augenblicke seine Bewegung von dieser Fläche sei $\frac{dx}{dt}$, eben wie die wahre Geschwindigkeit eines Körpers aus dem Wege durch die Zeit dividirt erkannt wird. Dieser Begriff von Bewegung eines Körpers von einer Fläche wird uns auf eine leichtere und allgemeinere Art ... um uns eine jegliche Bewegung deutlicher vorzustellen und die Veränderungen so darin vorgehen aus den Kräften zu bestimmen. Es ist hier aber vor allen Dingen aus der Geometrie zu merken, dass die Entfernung des Körpers von einer Fläche durch die winkelrechte grade Linie, so vom Körper auf die Fläche gezogen wird, ausgedrückt werde.