

Von der ersteren wird die Geschwindigkeit des Körpers einen Zuwachs erhalten, welcher der unendlich kleinen Zeit $= dt$, betragen wird $dv = \frac{nTdt}{M}$, wo M die Masse des Körpers, oder wenn man den inzwischen durchlaufenen unendlich kleinen Weg $Mm = ds$ setzt $ds = vdt$, so wird man haben $v dv = \frac{nTds}{M}$. Die andere Kraft N wird den Körper nöthigen Bewegung zu krümmen, und das dergestalt, dass wenn man den halben Durchmesser der Krümmung $MR = r$ nennt, sein wird $r = \frac{Mv^2}{nN}$. Also wird die Veränderung welche alle Augenblicke dem Zustande des Körpers vorgeht durch die zwei folgenden Gleichungen ausgedrückt,

$$dv = \frac{nTdt}{M} \quad \text{oder} \quad v dv = \frac{nTds}{M} \quad \text{und} \quad r = \frac{Mv^2}{nN}$$

Wie aber hieraus in einem jeglichen Falle die Bewegung des Körpers selbst, das ist die Linie und die Geschwindigkeit in einem jeglichen Punkte derselben gefunden werden können nicht der Ort zu zeigen, sondern es gehört in die besondere Lehre von der Bewegung im folgenden Capitel ein leichter Weg vorgeschlagen werden.

IX. Capitel.

Bestimmung der Bewegung eines Körpers, welcher von Kräften getrieben wird.

- 69) *So lange sich ein Körper gleichförmig nach einerlei Richtung bewegt, so entfernt er sich von einer nach Belieben festgesetzten Fläche oder nähert sich derselben gleichgeschwindig. Hieraus ist klar, was wir durch die Bewegung eines Körpers von einer Fläche verstehen und dass in dem angeführten Falle diese Bewegung gleichförmig sein werde.*

Wenn wir bei der Bewegung eines Körpers nur auf seine Entfernung von einer gewissen Fläche sehen, so nennen wir die Veränderung dieser Entfernung die Bewegung des Körpers von dieser Fläche. Diese Bewegung können wir also als eine Geschwindigkeit ansehen und ausmessen, wenn wir den Zuwachs dieser Entfernung durch die Zeit dividiren. Also wenn wir jetzt die Entfernung des Körpers von der Fläche durch x nach Verfließung aber einer unendlich kleinen Zeit dt durch $x + dx$ andeuten, so dass die Entfernung in dieser Zeit dt um dx gewachsen, so sagen wir in diesem Augenblicke seine Bewegung von dieser Fläche sei $\frac{dx}{dt}$, eben wie die wahre Geschwindigkeit eines Körpers aus dem Wege durch die Zeit dividirt erkannt wird. Dieser Begriff von der Bewegung eines Körpers von einer Fläche wird uns auf eine leichtere und allgemeinere Art um uns eine jegliche Bewegung deutlicher vorzustellen und die Veränderungen so darin vorgehend aus den Kräften zu bestimmen. Es ist hier aber vor allen Dingen aus der Geometrie zu merken, dass die Entfernung des Körpers von einer Fläche durch die winkelrechte grade Linie, so der Körper auf die Fläche gezogen wird, ausgedrückt werde.

Wenn demnach ein Körper gleichgeschwind in einer graden Linie fortläuft, so behält diese von einer angenommenen Fläche entweder immer einerlei Entfernung oder nicht. Im ersteren bleibt also der Körper von dieser Fläche immer gleich weit entfernt, und seine Bewegung derselben wird durch o ausgedrückt werden. Im letzteren Falle aber weil der Körper in seiner in gleicher Zeit, gleiche Wege zurücklegt, so nimmt seine Entfernung von der Fläche in gleicher Zeit um gleichviel ab oder zu, und wird also seine Bewegung von dieser Fläche gleichgeschwind sein. Nimmt die Entfernung zu, so werden wir diese Bewegung mit dem Zeichen $+$, nimmt sie aber ab, mit dem Zeichen $-$ anzeigen.

70) Wird ein Körper durch eine Kraft von einer Fläche gerade fortgestossen, so wird seine Bewegung von dieser Fläche dergestalt zunehmen, dass sich der Zuwachs derselben verhalten wird wie die Kraft multiplicirt mit der Zeit und dividirt durch die Masse des Körpers.

Es sei die Masse des Körpers $= M$ und seine Bewegung von der gedachten Fläche $= u$, nämlich eigentlich die Geschwindigkeit dieser Bewegung von der Fläche angedeutet wird; wir wollen aber um der Kürze willen u die Bewegung von der Fläche nennen, weil keine Zweideutigkeit zu befürchten steht. Dieses vorausgesetzt so würde, wie wir eben gesehen haben, u immer bleiben, wenn keine Kraft auf den Körper wirkte, indem derselbe alsdann gleichförmig nach einer graden Linie fortläufen müsste. Die Wirkung der Kraft, welche wir durch P andeuten wollen, muss also darin bestehen, dass diese Bewegung u vermehrt werde, weil wir annehmen, dass der Körper von dieser Kraft von der Fläche weg gestossen werde. Was wir demnach oben von dem Zuwachs einer Geschwindigkeit gezeigt haben, wenn die Kraft den Körper vorwärts stösst, findet auch hier statt, und daher wird der in der unendlich kleinen Zeit dt erzeugte Zuwachs der Bewegung u sein $du = \frac{nPdt}{M}$ oder man wird haben $Mdu = nPdt$, wo n eben die Zahl andeutet, welche aus der Art die hier vorkommenden Grössen durch Zahlen auszudrücken, ihre Bestimmung

Will man die Entfernung des Körpers von der Fläche, welche $= x$ sein soll, in die Rechnung bringen, so darf man nur $\frac{dx}{dt}$ anstatt u schreiben, und wird, wenn man den Zuwachs der Zeit dt für beständig annimmt, der Zuwachs der Bewegung werden $du = \frac{ddx}{dt}$. Hieraus bekommt man $\frac{Mddx}{dt} = nPdt$ oder $Mddx = nPdt^2$, welches also eine Differential-Gleichung von dem zweiten Grade ist.

Wenn ausser dieser Kraft P noch eine andere Q vorhanden wäre, welche aber auf den Körper in seiner Richtung, so mit der Fläche gleichlaufend ist, wirkte, so würde von derselben keine Veränderung in der Bewegung von der Fläche entstehen, und würde also gleichfalls sein $Mdu = nPdt$ oder $Mddx = nPdt^2$. Denn wenn die Kraft P gar nicht vorhanden wäre, so würde der Körper ungeachtet der Kraft Q sich gleichgeschwind von der Fläche entfernen, weil diese Kraft, mit der Fläche gleichlaufend, nichts in seiner Entfernung von derselben ändert: welcher Umstand die folgenden Sätze zu verstehen, wohl in Acht zu nehmen ist.

71) Wenn die ganze Bewegung auf einer Fläche geschieht, und die Kräfte also auch derselben wirken, so wird diese Bewegung erkannt, wenn man die Bewegung des Körpers von zwei graden Linien, welche in dieser Fläche winkelrecht auf einander gezogen bestimmt.

Lasst uns setzen der Körper, dessen Masse = M (Fig. 225.), bewege sich auf der Fläche die Kupferplatte vorstellt, und beschreibe darauf die Linie DME , so müssen auch die Kräfte denselben wirken, ihre Richtung in dieser Fläche haben. Man stelle sich nun eine andere Fläche vor, welche auf dem Papier nach der Linie OA winkelrecht aufsteht, und betrachte die Bewegung des Körpers von dieser Fläche, so wird seine Entfernung wenn er in M ist, durch die Linie MA so auf OA winkelrecht aufsteht, angezeigt werden; also hat man nur nöthig zu untersuchen sich die Entfernung des Körpers von der Linie OA nach und nach verändere, das ist, man darf die Bewegung des Körpers von dieser Linie OA erforschen. Man stelle sich noch eine andere Fläche vor, welche auf dem Papiere ebenfalls winkelrecht nach der Linie OB aufstehe, so dass OB mit OA einen rechten Winkel mache, und suche gleichfalls die Bewegung des Körpers von der Linie OB so ist klar dass, wenn man für eine jegliche Zeit anzeigen kann, wie weit der Körper von beiden Linien OA und OB entfernt ist, daraus der wahre Ort des Körpers erkannt werde. Die Kräfte welche auf den Körper in M wirkt mag nun beschaffen sein, wie man will, so kann dieselbe in zwei Kräfte MP und MQ zerleget werden, deren jene MP den Körper von der Linie OA wegstösst; und weil MQ aber von der Linie OB wegstösst; und weil MQ mit der Linie OA , MP aber mit der Linie OB gleichlaufend ist, so wird die Wirkung der einen Kraft durch die andere nicht gestört werden also dass man die Wirkung einer jeden besonders wird bestimmen können.

Es sei also die Entfernung des Körpers M von OA oder $MX = x$. Die Bewegung von dieser Linie $OA = u$, und die Kraft MP so von dieser Linie wegtreibt, = P . Gleichgestalt sei die Entfernung des Körpers M von OB oder $MY = y$, die Bewegung von dieser Linie $OB = v$ und die von dieser Linie OB wegstossende Kraft $MQ = Q$. Die Wirkung dieser beiden Kräfte wird in der unendlich kleinen Zeit dt folgende Veränderungen hervorbringen:

$$Mdu = nPdt \text{ oder } Mddx = nPdt^2$$

$$Mdv = nQdt \text{ oder } Mddy = nQdt^2.$$

Wenn nämlich der Zeitpunkt dt für beständig angenommen wird. Es ist aber aus dem vorigen dass $u = \frac{dx}{dt}$ und $v = \frac{dy}{dt}$.

72) Hat man die Bewegung eines Körpers, welche auf einer Fläche geschieht, von zwei Linien so auf dieser Fläche gegeneinander winkelrecht stehen, bestimmt, so erkennt man daraus seine wahre Bewegung, das ist, seine Geschwindigkeit und Richtung für einen jeglichen Zeitpunkt.

Wir haben oben zwei besondere Regeln gegeben, eine um die Veränderung so in der Geschwindigkeit vorgeht, die andere aber um die Veränderung, so in der Richtung vorgeht, zu bestimmen.

gegenwärtigen Art aber brauchen wir nur eine einzige Regel, welche uns lehret, wie Bewegung eines Körpers von einer jeglichen Fläche verändert werde, die wirkende Kraft mag beschaffen sein wie man will; weil sich dieselbe immer in zwei andere zerlegen lässt, deren eine von der Fläche grade abstösst, die andere aber mit der Fläche gleichlaufend ist und also die Bewegung jener nicht störet. In dem vorigen Satze haben wir aus diesem Grunde bestimmt, welche Veränderung in der Bewegung des Körpers von beiden Linien OA und OB (Fig. 225.) besonders abhängen muss und in diesen zwei Gleichungen enthalten ist:

$$Mdu = nPdt \quad \text{und} \quad Mdv = nQdt.$$

Man nun hieraus für einen jeden Zeitpunkt die beiden Bewegungen u und v gefunden, deren eine nach Mp , diese aber nach Mq gerichtet ist, so sieht man dass der Körper durch Mm laufen wird, so dass Mm die Querlinie des rechtwinklichten Vierecks $Mpmq$ sein wird; wenn nämlich Mp und Mq durch u und v ausgedrückt werden. Daher wird die wahre Geschwindigkeit, welche der Körper in M nach der Richtung Mm hat, sein $= \sqrt{(uu + vv)}$; ferner erkennt man aber auch hieraus die Richtung, oder die Lage der Linie Mm nach den beiden angenommenen Linien OA und OB . Wenn $Mp = u$ und $Mq = v$, so findet man in dem rechtwinklichten Dreiecke Mqm , sogleich den Winkel QME , dessen tangente ist $\frac{u}{v}$, welchen die Richtung der Bewegung Mm mit der Linie MO macht; und gleichergestalt wird des Winkels PME tangente sein $= \frac{v}{u}$. Kann man auch noch außerdem für eine jede Zeit die beiden Entfernungen $MX = x$ und $MY = y$ anzeigen, so wird dadurch der wahre Ort M , wo sich der Körper alsdann befindet, bestimmt. Wenn man aber für einen jeden Zeitpunkt den Ort des Körpers anzeigen kann, so ist dieses die vollständigste Erkenntniss, welche man immer von der Bewegung eines Körpers wünschen kann.

73) Wenn die Bewegung eines Körpers nicht in einer Fläche geschieht, so kann man sich dieselbe am deutlichsten vorstellen, wenn man nach Belieben drei Flächen annimmt, welche auf einander winkelrecht stehen, und die Bewegung des Körpers von einer jeden dieser drei Flächen in Betrachtung zieht.

Eine von diesen drei Flächen werde durch die Kupferplatte vorgestellt, auf welcher man nach Belieben zwei Linien OB und OC (Fig. 226.) winkelrecht auf einander ziehe, und aus dem Punkte O ziehe die Linie OA auch winkelrecht auf die Fläche der Platte aufrechte, welche folglich auf die beiden Linien OB und OC winkelrecht sein wird. Diese drei Linien OA , OB und OC stellen uns also drei Ebenen vor, als: AOB , AOC und BOC , welche aufeinander rechtwinklicht sind, und wovon man die letztere BOC als die Grundfläche, die beiden andern AOB und AOC aber als zwei darauf senkrecht aufgerichtete Wände ansehen kann. Der Körper mag sich nun befinden wo er will, als in M . lässt sich begreifen, wie weit derselbe von einer jeden der drei angenommenen Flächen entfernt sein werde: man ziehe nämlich aus M erstlich die Linie MX winkelrecht auf die Fläche AOB , nachher die Linie MY winkelrecht auf die Fläche AOC und endlich die Linie MZ winkelrecht auf die Fläche BOC , so werden diese Linien die gesuchten Entfernungen anzeigen: man setze also diese

Entfernungen: $MX = x$; $MY = y$ aus $MZ = z$, ferner ziehe man winkelrecht von X auf die Linie XT , und von Z auf OC die Linie ZV , so wird auch sein $OV = x$, $VZ = OT = ZM = z$. Wenn man also diese drei Linien weiss, so kann man daraus die Punkte M und also den wahren Ort des Körpers M anzeigen. Bewegt sich nun der Körper, wie immer sein mag, so erwäge man um wieviel sich die drei Entfernungen x, y, z in dem dt verändern, und deute diese Veränderungen durch dx, dy und dz an. Daher werden $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ die Bewegungen des Körpers von diesen drei Flächen anzeigen. Setzen wir Bewegung von der Fläche $AOB = u$, von der Fläche $AOC = v$ und von der Fläche $BOC = w$ werden wir haben $u = \frac{dx}{dt}, v = \frac{dy}{dt}, w = \frac{dz}{dt}$. Nehmen wir endlich in diesen Richtungen $Mp = u$ und $Mr = w$, oder $Mp = u, pv = v$ und $vM = w$, so wird die Linie Mm die Richtung der Bewegung des Körpers, und $\sqrt{uu + vv + ww}$ die wahre Geschwindigkeit desselben anzeigen, folglich wird durch diese Vorstellung die wahre Bewegung des Körpers am deutlichsten erkannt.

- 74) Die Kräfte, welche auf den Körper wirken, mögen auch beschaffen sein wie sie wollen, so können dieselben immer in drei zerlegt werden, welche den Körper von einer jeden der angenommenen drei Flächen grade wegstossen, und die Wirkung einer jeden wird von den zwei übrigen nicht gestört.

Es sei der Körper in M , und alle Benennungen blieben wie in dem vorhergehenden Satze. Nun ist bekannt, dass wie auch immer die Kräfte so auf den Körper wirken, beschaffen sein mögen, allezeit drei Kräfte angezeigt werden können nach den Richtungen MP, MQ, MR , welche denselben gleichgültig sind. Man nenne also die Kraft $MP = P$, die Kraft $MQ = Q$, die Kraft $MR = R$ von welchen die erste P den Körper von der Fläche AOB , die andere Q von der Fläche AOC und die dritte R von der Fläche BOC grade wegtreibt, und sollten diese Kräfte den Körper gegen die Flächen zustossen, so müssten dieselben wie bekannt mit dem Zeichen $-$ bemerkt werden. Es ist aber klar dass die Wirkung der Kraft $MP = P$ von den beiden übrigen Q und R nicht gestört werde, weil ihre Richtungen MQ und MR mit der Fläche AOB gleichlaufend sind, und die Entfernung des Körpers von dieser Fläche weder zu vermehren noch zu vermindern bemüht sind, und ebenso verhält es sich auch mit den beiden übrigen. Daher kann die Wirkung einer jeden ohne Absicht auf die übrigen besonders bestimmt werden, woraus wir für die in dem Zeitpunkte t erzeugten Veränderungen die drei nachfolgenden Gleichungen erhalten:

$$Mdu = nPdt, \quad Mdv = nQdt, \quad Md\omega = nRdt,$$

anstatt dieser können wir auch folgende gebrauchen, wo das Differentiale der Zeit dt für beständig angenommen wird:

$$Mddx = nPdt^2, \quad Mddy = nQdt^2, \quad Mddz = nRdt^2.$$

Wir können auch die Betrachtung der Zeit ausschliessen, und weil

$$dx = udt, \quad dy = vdt, \quad dz = wdt,$$

bekommen wir

$$Mudu = nPdx, \quad Mvov = nQdy, \quad Mwvov = nRdz,$$

bei aber zu merken, dass $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$. Wenn nun die Kräfte bekannt, so sind diese Gleichungen hinlänglich den wahren Ort des Körpers für eine jegliche Zeit zu bestimmen, und daher auch die wahre Bewegung anzuzeigen.

(75) Wir verstehen durch die Wirksamkeit einer Kraft die Integral-Grösse, welche gefunden wird, wenn man die Kraft mit dem Differentiale ihrer Entfernung von der Fläche, von welcher sie den Körper wegstösst, multiplicirt und alsdann integrirt.

Die letztgegebenen Gleichungen leiten uns auf diesen neuen Begriff, welchen wir mit dem Namen Wirksamkeit verbinden; indem aus demselben durch die Integration gefunden wird:

$$Mu = 2n \int Pdx, \quad Mv = 2n \int Qdy, \quad Mw = 2n \int Rdz$$

und hieraus die Bewegung des Körpers von einer jeden Fläche angezeigt werden kann. Dieser Begriff ist hier um so viel mehr von der grössten Wichtigkeit, weil die Summe der Wirksamkeit aller Kräfte $\int Pdx + \int Qdy + \int Rdz$ immer gleich gross bleibt, wenn wir auch drei andere Flächen angenommen hätten, und wenn diese drei Kräfte aus einer Kraft durch die Zerlegung entstanden, so ist die Summe ihrer Wirksamkeit gleich der Wirksamkeit der einzigen Kraft aus der sie entstanden, also dass die Willkührlichkeit der drei angenommenen Flächen auf die ganze Wirksamkeit keinen Einfluss hat, als welche immer einerlei Werth behält. Ein solcher merkwürdiger Vorzug findet bei der andern Formel nicht statt, und würde zum Exempel die aus der ersten hergenommene Grösse $\int Pdt + \int Qdt + \int Rdt$ immer einen andern Werth erhalten, je nachdem wir die drei Flächen veränderten, ausserdem dass den Kräften mit dem Zeitpunkte dt keine solche Verbindung zugeschrieben werden kann, als mit den Differentialen, dx , dy , dz . Was aber diesen Begriff der Wirksamkeit schon für sich höchst merkwürdig macht, ist, dass die ganze Lehre von dem Gleichgewicht auf denselben gegründet ist. Deun es kann bewiesen werden, dass kein Gleichgewicht auffinden kann, wo nicht die Summe der Wirksamkeiten aller Kräfte so dabei vorkommen, am allergeringsten oder auch zuweilen am allergrössten ist. Dieser herrliche Grundsatz ist auch zuerst von dem weltberühmten Herrn Präsidenten von Maupertuis erfunden worden und stehet mit dem andern allgemeinen Gesetze der Sparsamkeit, in der genauesten Verbindung. Hieraus sehen wir zum wenigsten, dass die Wirksamkeit auf alle Bewegungen so irgend aus Kräften hervorgebracht werden können, einen wesentlichen Einfluss habe, und allerdings verdiene, dass sie mit einem besonderen Namen belegt werde.

(76) Wie auch immer die Bewegung eines Körpers durch Kräfte verändert werden mag, so verhält sich jederzeit die sogenannte lebendige Kraft oder die Masse des Körpers, mit dem Quadrat seiner Geschwindigkeit multiplicirt, wie die Wirksamkeit aller Kräfte so auf den Körper wirken.

Wenn wir die drei obigen Integral-Gleichungen zusammenthun, so bekommen wir

$$Mu + Mv + Mw = 2n \int P dx + 2n \int Q dy + 2n \int R dz$$

$$\text{oder } M(uu + vv + ww) = 2n \int (P dx + Q dy + R dz).$$

Da wir oben gezeigt haben, dass die wahre Geschwindigkeit des Körpers durch $\sqrt{uu + vv + ww}$ ausgedrückt werde, so ist $uu + vv + ww$ das Quadrat der Geschwindigkeit, und folglich $M(uu + vv + ww)$ die sogenannte lebendige Kraft des Körpers. Ferner ist, wie wir gesehen haben, $\int P dx + \int Q dy + \int R dz$ die Wirksamkeit der auf den Körper wirkenden Kräfte, woraus dem Leser selbst erhellet, dass die lebendige Kraft des Körpers gleich sei der Wirksamkeit mit der Zahl n multiplicirt. Nur ist hiebei zu erinnern, dass die Wirksamkeit als eine durch die Integration bestimmte Grösse an sich nicht bestimmt sei, sondern eine beständige willkürliche Grösse annehmen könne. Dieses erfordert auch die Natur der Sache, indem die gegenwärtige Bewegung des Körpers mit von der ihm anfänglich eingedrückten Bewegung, so willkürlich ist, abhängt, man aber für den Anfang diejenige beständige Grösse, welche zur Wirksamkeit hinzugezogen werden muss um die lebendige Kraft herauszubringen, bestimmt, so gilt dieselbe hernach immer für die ganze Bewegung, und kann hernach für eine jegliche Zeit und für einen jeglichen Ort des Raumes seine wahre lebendige Kraft richtig bestimmt werden. Dieses ist ein beträchtlicher Vorzug, welchen das Product der Masse eines Körpers durch das Quadrat seiner Geschwindigkeit vor dem Product der Masse durch die Geschwindigkeit selbst hat, und den Begriff der lebendigen Kraft über die Grösse der Bewegung weit erhebet, indem aus unsern Gleichungen, welche alle mögliche Bewegungen in sich begreifen, nicht erhelle, dass die Grösse der Bewegung, welche wäre $M\sqrt{uu + vv + ww}$ für sich selbst irgend in Betrachtung kommt.

X. Capitel.

Von der scheinbaren Bewegung.

77). Die scheinbare Bewegung bezieht sich auf einen Zuschauer, und wird durch zwei Umstände bestimmt, erstlich aus der Gegend nach welcher dem Zuschauer ein Körper erscheint, hernach aus der Entfernung desselben von dem Zuschauer. Dieses ist der scheinbare Ort des Körpers, und aus der Veränderung desselben wird die scheinbare Bewegung gebildet.

Der Zuschauer mag sich befinden wo er will, so setzt man voraus, dass er sich die verschiedenen Gegenden des Raumes richtig vorstellen könne. Alle graden Linien, welche aus dem Auge des Zuschauers rundherum gezogen werden können, bezeichnen gewisse Gegenden, und wenn wir den Zuschauer setzen, so sind ihnen diejenigen Gegenden einerlei, welche durch Linien so einander gleichlaufend oder parallel sind, bestimmt werden. Wenn wir also zwei Zuschauer annehmen, einen in O den andern in o (Fig. 227.), so deuten die Linien OM und ON dem Zuschauer O gewisse Gegenden an, und eben diese Gegenden werden von dem Zuschauer o nach den Linien om und on