XXII.

Théorie Générale de la Dioptrique.

INTRODUCTION.

Il faut distinguer la Dioptrique de la Science des réfractions en général, parce que dans la Dioptrique on donne une figure sphérique à toutes les surfaces réfringentes, au passage desquelles les rayons souffrent une réfraction, et outre cela on suppose les centres de toutes ces surfaces sphériques situés sur une même ligne droite, qu'on nomme l'axe, tandis que la Science des réfractions s'étend à des figures quelconques, de quelque manière qu'elles soient disposées. Ainsi l'objet de la Dioptrique consiste dans un nombre quelconque de surfaces sphériques réfringentes disposées sur le même axe, où se trouvent leurs centres, devant lesquelles on considère un objet quelconque, dont les rayons passent par toutes ces surfaces, et alors il s'agit de déterminer les images représentées par chaque réfraction tant par rapport à leur grandeur et degré de clarté, que par rapport à la confusion, qui y est causée ou par l'étendue des surfaces réfringentes, ou par la différente réfraction des rayons. Ces recherches regardent principalement la dernière image, que représentent les rayons après avoir passé par toutes les surfaces réfringentes, puisqu'elle devient l'objet immédiat de la vision, soit qu'on la regarde directement, ou qu'on la reçoive sur un fond blanc dans une chambre obscure. Dans l'un et l'autre cas il est de la dernière importance, que cette dernière image soit assez claire, délivrée de toute confusion et aussi grande que les circonstances le permettent, à quoi l'on peut ajouter, qu'une grande partie de l'objet y soit représentée à la fois, en quoi consiste le champ apparent. C'est donc à la Dioptrique d'examiner tous ces différents points et d'enseigner les moyens de procurer aux instruments dioptriques tous les avantages qu'on puisse désirer. Or les considérations suivantes nous fourniront tous les secours pour arriver à ce but.

I^ère Considération.

Sur la réfraction d'une seule surface sphérique réfringente.

1. Je commence par considérer une seule surface sphérique aAa (Fig. 244.) dont le centre soit en J sur l'axe OP, et dont la réfraction soit telle que pour les rayons moyens, qui y tombent du milieu O en allant dans le milieu P, le sinus d'incidence soit à celui de réfraction comme n Pour les rayons plus ou moins réfrangibles, on n'a qu'à regarder le nombre n comme variable et d'y ajuster son différentiel dn.

2. Soit à présent O un point rayonnant situé sur l'axe, dont le rayon OA dirigé vers A ne souffrant aucune réfraction, tiendra la même route AP. Mais pour un autre rayon incident quelconque Oa, soit aP le rayon réfracté et ayant tiré la droite Ja, pour avoir l'angle d'incidence OaJ et celui de réfraction PaJ, la nature de la réfraction, en supposant Oa un rayon moyen, fournit cette proportion:

$$\sin OaJ : \sin PaJ = n : 1.$$

3. Or par le triangle OaJ on a: $\sin OaJ : \sin OJa = OJ : Oa$ et par le triangle PaJ on a $\sin OJa : \sin PaJ = Pa : PJ$ d'où l'on tire en composant ces deux proportions

$$\sin OaJ : \sin PaJ = OJ \,.\, Pa : PJ \,.\, Oa = n : 1$$

et partant nous aurons cette équation pour exprimer la nature de la réfraction:

$$OJ \,.\, Pa = n \,.\, PJ \,.\, Oa.$$

4. On voit bien que cette réfraction devient d'autant plus grande, plus le point a est éloigné du milieu A; ce qui m'oblige à considérer deux cas: l'un où le point a n'est qu'infiniment peu éloigné du point A, et l'autre, où son éloignement aA n'est plus si petit qu'il puisse être négligé.

I. Cas, où l'éloignement aA est quasi infiniment petit.

5. Dans cette hypothèse les distances Oa et Pa ne différeront de OA et PA; et partant la réfraction sera exprimée par cette égalité $OJ \,.\, PA = n \,.\, PJ \,.\, OA$, qui en tournant notre vue à la distance de l'objet OA, à celle de l'image AP et au rayon de la sphéricité $AJ = aJ$, prendra cette forme:

$$(OA + AJ)\, PA = n\,(PA - AJ)\, OA$$

d'où l'on tire:

$$(n-1)\, OA \,.\, PA = AJ\,(PA + n \,.\, OA) \quad \text{ou} \quad \frac{n-1}{AJ} = \frac{1}{OA} + \frac{n}{PA}.$$

6. Cette dernière formule est très propre à marquer le rapport qui règne entre les distances

l'objet OA, de l'image PA et le rayon de sphéricité de la surface réfringente. De là on aura

$$PA = \frac{n \cdot OA \cdot AJ}{(n-1)\, OA - AJ},$$

pour déterminer le point P sur l'axe où les rayons moyens de l'objet O, qui passent par le milieu A de la surface réfringente, se réunissent après la réfraction.

7. Puisque ces rayons réfractés se réunissent au point P, ils tiendront depuis la même route, que s'ils partaient effectivement du point P; et c'est la raison, pourquoi le point P est nommé l'image. Mais il faut bien remarquer que cette image n'est formée que par les rayons moyens de l'objet O et même ceux, qui ne passent que par le milieu A de la surface réfringente.

8. Jusqu'ici je n'ai considéré l'objet que comme un point O situé sur l'axe, mais maintenant il est aisé de lui donner quelque étendue $O\omega$ (Fig. 245.), que je nommerai le demidiamètre de l'objet, en regardant l'objet comme un cercle perpendiculaire à l'axe, dont le rayon est $O\omega$; et on pourra d'une manière semblable déterminer l'image de son extrémité ω.

9. En effet on n'a qu'à tirer de ω par le centre J la droite $\omega\alpha J\pi$, qui tiendra lieu de l'axe par rapport au point rayonnant ω, et regardant l'angle $OJ\omega$ comme extrêmement petit, supposition nécessaire dans la Dioptrique; la distance ωJ sera égale à OJ et partant l'image du point ω tombera en π, en sorte que $J\pi = JP$; et $P\pi$ sera le demidiamètre de l'image représentée par la réfraction.

10. Le lieu de cette image sera donc déterminé par le point P moyennant la formule trouvée ci-dessus:

$$\frac{n-1}{AJ} = \frac{1}{OA} + \frac{n}{PA},$$

mais sa grandeur se détermine aisément par cette proportion $O\omega : P\pi = OJ : PJ$. Mais ayant trouvé $OJ \cdot PA = n \cdot PJ \cdot OA$ ou bien $OJ : PJ = n \cdot OA : PA$, nous aurons pour le demidiamètre de l'image $P\pi = \frac{PA}{n \cdot OA} \cdot O\omega$.

11. La même formule se déduit plus aisément, en considérant le rayon incident ωA, qui passe par le milieu même A, dont le réfracté $A\pi$ doit être tel, que puisque les angles $OA\omega$ et $PA\pi$ sont très petits, la raison de réfraction donne d'abord:

$$n : 1 = OA\omega : PA\pi = \frac{O\omega}{OA} : \frac{P\pi}{PA}, \quad \text{donc} \quad P\pi = \frac{PA}{n \cdot OA} \cdot O\omega.$$

Image principale.

12. Cette image $P\pi$ sera nommée dans la suite l'image principale, où il faut remarquer, que l'image principale est formée par les rayons moyens de l'objet, qui passent par le milieu A de la surface réfringente, en donnant à ce milieu une étendue quasi infiniment petite autour de l'axe.

13. Posons maintenant la distance de l'objet à la surface réfringente $OA = a$, la distance de l'image principale derrière la surface réfringente $PA = \alpha$, et le rayon de sphéricité de la surface $AJ = f$, en considérant la convexité comme tournée vers l'objet; et le demidiamètre de l'objet

$O\omega = z$; Cela posé nous aurons pour l'image principale les deux équations suivantes:

$$\frac{n-1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{n}{\alpha} \quad \text{et} \quad P\pi = \frac{\alpha z}{na},$$

d'où l'on connait tant son lieu en P que son demidiamètre $P\pi$.

14. Si l'on éloignait l'objet $O\omega$ tant soit peu plus de la surface réfringente, en le mettant en o et posant l'intervalle $Oo = da$, l'image se trouverait alors en p, desorte que $Ap = \alpha + d\alpha$; la différentiation de l'équation

$$\frac{n-1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{n}{\alpha} \quad \text{donne} \quad \frac{da}{aa} + \frac{n d\alpha}{\alpha\alpha} = o \quad \text{ou bien} \quad d\alpha = \frac{-\alpha\alpha}{naa} da.$$

Par conséquent en éloignant l'objet $O\omega$ par l'intervalle Oo de la surface réfringente, l'image approchera de l'intervalle

$$Pp = \frac{\alpha\alpha}{naa} \cdot Oo = \frac{AP^2}{n \, . \, OA^2} \cdot Oo.$$

15. On voit aussi que les rayons d'une autre nature représenteront une autre image; pour cet effet on n'a qu'à rendre variable le nombre n, en laissant les quantités a et p constantes, et la différentiation donnant

$$\frac{dn}{p} = \frac{dn}{\alpha} - \frac{n d\alpha}{\alpha\alpha},$$

on aura pour le changement dans le lieu de l'image

$$d\alpha = \frac{\alpha\alpha dn}{n}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{p}\right) = \frac{-\alpha(a+\alpha)\,dn}{n(n-1)\,a}$$

à cause de

$$\frac{n-1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{n}{\alpha}.$$

16. Nous verrons dans la suite, qu'il est bon pour rendre les formules plus simples, d'éliminer du calcul plutôt les rayons de sphéricité, que les distances des images principales. Et puisque leur rapport est si simple, il n'y a de là aucun inconvenient à craindre.

II. Cas où l'éloignement Aa est tant soit peu considérable.

17. Ici je ne considère que le centre de l'objet O situé dans l'axe, dont un rayon Oa (Fig. 2 (6)) passant par le point a de la surface réfringente, se réunit avec l'axe au point p différent de P qui a été trouvé dans le cas précédent. Et il est évident que tous les rayons du point O inclinés à l'axe OA d'un même angle AOa seront réunis après la réfraction au même point p, que je nommerai *l'image extrême* du point O, le point P étant son image principale.

18. Or pour trouver ce point p, on n'a qu'à se servir de l'équation donnée ci-dessus (§ 9) $OJ \, . \, pa = n \, . \, pJ \, . \, Oa$, pour en déterminer l'intervalle Pp, qui est la diffusion de l'image.

19. Pour cet effet je tire du point a à l'axe la perpendiculaire ax, qui est le demidiamètre de l'ouverture de la surface, et posant $ax = x$, soit comme auparavant $OA = a$, $AP = \alpha$, $AJ = aJ = f$

intervalle cherché $Pp = y$, et puisque l'arc Aa est supposé peu considérable, on aura assez exactement $Ax = \frac{xx}{2p}$.

20. Ensuite, du centre O avec le rayon Oa je tire l'arc de cercle ay, et pareillement du centre p avec le rayon pa l'arc az, et puisque les intervalles xy et xz sont très petits, on aura assez près

$$xy = \frac{xx}{2Oa} \quad \text{et} \quad xz = \frac{xx}{2pa},$$

et il sera même permis d'écrire $OA = a$ pour Oa et $AP = \alpha$ pour pa, de sorte que

$$xy = \frac{xx}{2a} \quad \text{et} \quad xz = \frac{xx}{2\alpha},$$

puisque nous rejettons les termes, qui renfermeraient la quatrième puissance de x.

21. De là ayant

$$Ay = \frac{xx\,(a+p)}{2ap} \quad \text{et} \quad Az = \frac{xx\,(\alpha-p)}{2\alpha p},$$

nous tirons:

$$Oa = Oy = a + \frac{xx\,(a+p)}{2ap} \quad \text{et} \quad pa = pz = \alpha - y - \frac{xx\,(\alpha-p)}{2\alpha p}.$$

Donc notre équation $OJ\,.\,pa = n\,.\,pJ\,.\,Oa$ prendra cette forme:

$$(a+p)\left(\alpha - y - \frac{xx\,(\alpha-p)}{2\alpha p}\right) = n\,(\alpha - p - y)\left(a + \frac{xx\,(a+p)}{2ap}\right).$$

Or la relation entre a, α et p étant renfermée dans cete équation: $OJ\,.\,PA = n\,.\,PJ\,.\,OA$ qui est

$$(a+p)\,\alpha = n\,(\alpha - p)\,a$$

ôtons celle là de celleci, en considérant les quantités y et x comme infiniment petites pour avoir:

$$(a+p)\left(y + \frac{xx\,(\alpha-p)}{2\alpha p}\right) = n\left(ay - \frac{xx\,(\alpha-p)\,(a+p)}{2ap}\right).$$

22. Maintenant cette équation nous donne d'abord:

$$((n-1)\,a - p)\,y = \frac{xx\,(\alpha-p)\,(a+p)}{2\alpha p} + \frac{nxx\,(\alpha-p)\,(a+p)}{2ap}$$

ou bien:

$$((n-1)\,a - p)\,y = \frac{xx\,(a+p)\,(\alpha-p)\,(a+n\alpha)}{2a\alpha ap}.$$

Éliminons en p au moyen de la formule:

$$\frac{n-1}{p} = \frac{1}{\alpha} + \frac{n}{a}, \quad \text{ou bien} \quad p = \frac{(n-1)\,a\alpha}{na+\alpha},$$

qui donne:

$$(n-1)\,a - p = \frac{n\,(n-1)\,aa}{na+\alpha}; \quad a+p = \frac{na\,(a+\alpha)}{na+\alpha}; \quad \alpha - p = \frac{\alpha\,(a+\alpha)}{na+\alpha}$$

et partant nous aurons:

$$\frac{n\,(n-1)\,aay}{na+\alpha} = \frac{nxx\,(a+\alpha)^2\,(a+n\alpha)}{2a\alpha\,(n-1)\,(na+\alpha)} \quad \text{ou bien} \quad y = \frac{xx\,(a+\alpha)^2\,(a+n\alpha)}{2\,(n-1)^2\,a^3\,\alpha}.$$

*

23. Voilà donc la formule la plus simple pour exprimer la diffusion Pp ... encore représenter en sorte:

$$y = \frac{aaxx}{2(n-1)^2} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{n}{a} + \frac{1}{\alpha}\right);$$

et qui nous donne à connaître que l'image du point O est répandu par l'espace Pp ... comme on voit proportionnel au quarré xx, de sorte que plus on augmente l'ouverture ... réfringente aAa, cet espace Pp croîtra dans la même raison.

24. Pour se former une juste idée de cette image diffuse Pp, il faut considérer ... P, qui est l'image principale, ne transmet d'autres rayons que dans la direction de l'axe ... que l'autre extrémité p n'est formée que de rayons inclinés à l'axe de l'angle Apa ... estimer $= \frac{x}{a}$; ces rayons étant disposés dans une surface conique, dont le sommet est ...

25. Par rapport à l'extrémité de l'objet ω son image sera sans doute plus irrégulière ... cipale tombera bien en π et les rayons qui y vont par le milieu A de la surface réfringente ... dront la route $A\pi$; mais ceux qui passent par la circonférence aa ne se réuniront plus ... seul point, ce qui est un défaut au quel on ne saurait remédier.

26. On pourroit bien à l'aide de la formule, qu'on vient de trouver, déterminer la route ... tous les rayons, qui passeraient de l'extrémité ω par tous les points aa de la surface ... mais on parviendrait à des formules très embarrassées, dont on ne saurait tirer aucun fruit ... la réfraction se fait par plusieurs surfaces. Et partant on est bien obligé de se borner à la consi... dération de l'image principale, et de la confusion causée dans les images du centre de l'objet ... de son point dans l'axe.

27. C'est aussi la raison, que plus on donne de l'étendue à l'objet, plus aussi la représentation ... des parties éloignées de l'axe devient confuse; quand même on serait en état de rendre celle ... milieu O parfaitement distincte. Par cette raison on est obligé de renoncer entièrement ... représentation distincte des parties de l'objet, qui sont considérablement éloignées de l'axe ... se contenter de faire en sorte, qu'au moins le milieu soit bien représenté.

28. Aussi tant les télescopes que les microscopes découvrent ordinairement une ... portion de l'objet, surtout lorsqu'ils grossissent beaucoup, de sorte qu'il serait superflu de ... distinctes les parties éloignées de l'axe, quand même cela serait possible. Ce qui est une ... raison qui nous dispense de cette entreprise.

29. Je me bornerai donc à la formule, que je viens de trouver pour la diffusion ... Pp, qui repond au centre de l'objet O, sur laquelle il faut bien remarquer, qu'elle est ... une approximation, qui suppose l'ouverture de la surface réfringente aa assez petite, pour ... puisse négliger dans le calcul la quatrième puissance du demidiamètre $ax = x$, sans qu'il ... une erreur sensible.

30. Par cette raison je n'étends point mes recherches à des ouvertures plus grandes ... toute la Dioptrique doit se borner à remédier aux erreurs, qui n'affectent que des ouvertures ...

[illegible] où l'arc entier aAa ne saurait monter à 30 degrés. Cependant si l'on vouloit pousser plus [illegible] l'approximation employée ci-dessus, on trouverait la diffusion:

$$Pp = y + \frac{xx\,(a+\alpha)^2\,(a+n\alpha)}{2\,(n-1)^2\,a^3\,\alpha}$$

$$+ \frac{x^4\,(a+\alpha)^2\,(a+n\alpha)}{8\,(n-1)^4\,a^5\,\alpha^3}\left((nn+n-1)\,aa-(nn-4n+1)\,a\alpha-(nn-n-1)\,\alpha\alpha\right).$$

II^de Considération.

Sur le passage des rayons par deux surfaces sphériques réfringentes.

31. Considérons maintenant deux surfaces sphériques aAa et bBb (Fig. 247.) disposées sur le [illegible] axe, en sorte que leurs convexités soient tournées en même sens vers l'objet $O\omega$. Soit le rayon [illegible] courbure de la première $aAa = p$, et de la seconde $bBb = q$. Posons ensuite la raison de [illegible] réfraction pour les rayons moyens en passant par la première, $n:1$ et en passant par la seconde, $n':1$.

32. Devant la première surface aAa soit exposé sur l'axe l'objet $O\omega$ à la distance $AO = a$, [illegible] dont le demidiamètre soit $O\omega = z$; cela posé examinons d'abord les images principales représentées [illegible] les rayons moyens de l'objet, qui passent par le milieu A de la première surface, et soit $P\pi$ celle qui est formée par la première réfraction, et $Q\xi$ celle qui est formée par la seconde.

33. De ces images, comme elles sont représentées dans la figure, la première $P\pi$ est renversée, [illegible] la seconde $Q\xi$ debout; pour leurs lieux posons les distances $AP = \alpha$, $BP = b$ et $BQ = \beta$, et [illegible] leurs demidiamètres $P\pi = z'$ et $Q\xi = z''$. Or pour la première nous venons de trouver:

$$\frac{n-1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{n}{\alpha} \quad \text{et} \quad P\pi = z' = \frac{\alpha z}{na}.$$

34. Cette première image principale $P\pi$ tenant lieu de l'objet à l'égard de la seconde réfraction par la surface bBb, nous aurons de la même manière pour le lieu et le demidiamètre de la seconde image $Q\xi$ ces deux équations:

$$\frac{n'-1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{n'}{\beta} \quad \text{et} \quad Q\xi = z'' = \frac{\beta z'}{n'b} = \frac{\alpha\beta z}{nn'ab}$$

[illegible] il faut remarquer, que si la valeur de z'' devient négative l'image $Q\xi$ est renversée, dont le contraire arrive dans la première image, que les valeurs positives de z' marquent renversée, et les négatives debout.

35. Pour cet effet il est bon de remarquer, que les deux quantités a et z sont nécessairement positives, puisque l'objet ne saurait jamais exister derrière les surfaces réfringentes; mais que les quantités α, b, β, avec les rayons de courbure p et q, peuvent selon les circonstances devenir