# XXIII.

# Sept chapitres d'un ouvrage de dioptrique *).

---

## Chapitre I.

### Recherches Générales sur la réfraction des rayons par des surfaces sphériques.

1. **Problème I.** Si du point lumineux $e$ un rayon quelconque $eM$ (Fig. 253.) passe dans un autre milieu transparent par la surface sphérique $PAP$, la raison de réfraction étant donnée comme $n:1$, trouver la position du rayon rompu $Mf$.

**Solution.** Soit $a$ le centre de la surface sphérique, par lequel et le point lumineux $e$ qu'on tire l'axe $eAaf$, et le rayon $aM$; pour avoir la proportion suivante tirée de la raison de réfraction:

$$n : 1 = \sin eMa : \sin fMa = \frac{ea}{eM} : \frac{fa}{fM},$$

d'où l'on tire cette équation $n \cdot \frac{fa}{fM} = \frac{ea}{eM}$ pour en déterminer la position du rayon rompu $Mf$. Menons du point $M$ à l'axe $ea$ la perpendiculaire $Mx$, et des points $e$ et $f$, pris comme centres, décrivons par $M$ les arcs de cercles $My$ et $Mz$ pour avoir $ey = eM$ et $fz = fM$; et notre équation prendra cette forme:

$$n \cdot \frac{fa}{fz} = \frac{ea}{ey} \quad \text{ou bien} \quad n \cdot \frac{ey}{ea} = \frac{fz}{fa}.$$

Or $ey = eA + Ay$ et $fz = fA - Az$ et partant:

$$n\left(\frac{eA}{ea} + \frac{Ay}{ea}\right) = \frac{fA}{fa} - \frac{Az}{fa} = 1 + \frac{Aa}{fa} - \frac{Az}{fa}.$$

Maintenant il faut considérer deux cas, l'un où l'arc $AM$ s'évanouit, et l'autre où il n'est que fort petit; car pour l'usage de la Dioptrique on n'a jamais besoin de plus grands arcs.

---

*) Manuscrit sans titre.

I. *Soit donc l'arc AM évanouissant:* et puisque les intervalles $Ay$ et $Az$ se réduisent à $x$, on a d'abord cette égalité $n \cdot \frac{eA}{ea} = \frac{fA}{fa}$,

qui étant renversée donne:

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{ea}{eA} = \frac{fa}{fA} = 1 - \frac{Aa}{fA} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{Aa}{eA}\right),$$

d'où l'on tire:

$$\frac{1}{fA} = \frac{n-1}{n \cdot Aa} - \frac{1}{n \cdot eA}.$$

Ainsi en connaissant la distance $eA$ du point lumineux à la surface sphérique, et le demi-diamètre de celle-ci $Aa$, avec la raison de réfraction $n : 1$, cette formule très simple détermine d'abord le point $f$, où les rayons rompus se réunissent avec l'axe.

II. *Soit l'arc AM très petit:* et les intervalles $Ax$, $xy$, $xz$ s'exprimeront assez exactement en sorte

$$Ax = \frac{Mx^2}{2Aa}, \quad xy = \frac{Mx^2}{2ey} \quad \text{et} \quad xz = \frac{Mx^2}{2fz},$$

où dans les dénominateurs au lieu de $ey$ et $fz$ il sera permis d'écrire $eA$ et $fA$. De là nous aurons

$$Ay = \tfrac{1}{2} Mx^2 \left(\frac{1}{Aa} + \frac{1}{eA}\right) \quad \text{et} \quad Az = \tfrac{1}{2} Mx^2 \left(\frac{1}{Aa} - \frac{1}{fA}\right).$$

Donnons maintenant à l'équation générale trouvée ci-dessus cette forme:

$$n \frac{eA}{ea} \cdot \left(1 + \frac{Ay}{eA}\right) = \frac{fA}{fa}\left(1 - \frac{Az}{fA}\right),$$

qui étant renversée, puisque les fractions $\frac{Ay}{eA}$ et $\frac{Az}{fA}$ sont extrêmement petites, devient:

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{ea}{eA}\left(1 - \frac{Ay}{eA}\right) = \frac{fa}{fA}\left(1 + \frac{Az}{fA}\right),$$

ou bien:

$$\frac{1}{n}\left(1 + \frac{Aa}{eA}\right)\left(1 - \frac{Ay}{eA}\right) = \left(1 - \frac{Aa}{fA}\right)\left(1 + \frac{Az}{fA}\right)$$

et divisant par $1 + \frac{Az}{fA}$ ou multipliant par $1 - \frac{Az}{fA}$:

$$\frac{1}{n}\left(1 + \frac{Aa}{eA}\right)\left(1 - \frac{Ay}{eA} - \frac{Az}{fA}\right) = 1 - \frac{Aa}{fA}$$

ou

$$\frac{1}{n}\left(1 + \frac{Aa}{eA}\right) - \frac{1}{n} \cdot \frac{ea}{eA} \cdot \tfrac{1}{2} Mx^2 \left(\frac{1}{Aa \cdot eA} + \frac{1}{eA^2} + \frac{1}{Aa \cdot fA} - \frac{1}{fA^2}\right) = 1 - \frac{Aa}{fA},$$

et par conséquent:

$$\frac{1}{fA} = \frac{n-1}{n \cdot Aa} - \frac{1}{n \cdot eA} + \frac{1}{n} \cdot \frac{ea}{eA \cdot Aa} \cdot \tfrac{1}{2} Mx^2 \left(\frac{1}{eA} + \frac{1}{fA}\right)\left(\frac{1}{Aa} + \frac{1}{eA} - \frac{1}{fA}\right).$$

membre affecté par $\frac{1}{2}Mx^2$ est extrêmement petit, au lieu de $\frac{1}{fA}$ il y est permis d'écrire une valeur approchante $\frac{n-1}{n.Aa} - \frac{1}{n.eA}$, et alors la formule trouvée donne la vraie valeur de $\frac{1}{fA}$, tout qu'elle dépend de l'obliquité du rayon incident $eM$ ou de l'espace $Mx$.

**Coroll. 1.** Pour le premier cas, où le rayon incident $eM$ se confond avec l'axe, nous trouvons donc $fA = \frac{n.Aa.eA}{(n-1)eA - Aa}$ pour la distance du point $f$ derrière la surface sphérique, et cette expression donne aussi pour le second cas une valeur approchante de $fA$.

**Coroll. 2.** Pour la vraie valeur du second cas, en supposant $\frac{1}{fA} = P + Q$, où $P$ marque la première partie $\frac{n-1}{n.Aa} - \frac{1}{eA}$, et $Q$ la particule extrêmement petite, qu'il y faut ajouter, on aura $fA = \frac{1}{P} - \frac{Q}{PP} = \frac{1}{P} - Q.fA^2$, puisque dans le petit terme il est permis d'écrire $fA$ au lieu de $\frac{1}{P}$. De là nous aurons:

$$fA = \frac{n.Aa.eA}{(n-1)eA - Aa} - \frac{1}{2n} \cdot \frac{ea.fA^2}{eA.Aa} \cdot Mx^2 \left(\frac{1}{eA} + \frac{1}{fA}\right)\left(\frac{1}{Aa} + \frac{1}{eA} - \frac{1}{fA}\right),$$

où dans le second membre on n'a qu'à écrire pour $fA$ sa valeur approchante $\frac{n.Aa.eA}{(n-1)eA - Aa}$.

**Coroll. 3.** Si les quantités sont telles, comme la figure les représente, le point $f$, où les rayons rompus se réunissent avec l'axe, approchera d'autant plus du point $A$, plus le rayon incident $eM$ s'écarte de l'axe; et cela dans la raison quarrée de l'espace $xM$. Où il faut toujours observer que cet espace $xM$ est extrêmement petit par raport aux lignes $Aa$, $eA$ et $fA$.

**Remarque.** Si l'on voulait pousser plus loin l'approximation, on parviendrait à des termes affectés par $Mx^4$; d'où l'erreur, à la quelle notre solution est assujettie, peut être estimée proportionelle au quarré-quarré de $Mx$, ou plutôt de $\frac{Mx}{Aa}$. Ainsi prenant $Mx = \frac{1}{4}Aa$, l'erreur est $\frac{1}{256}$, et $Mx = \frac{1}{5}Aa$ donne $\frac{1}{625}$, de sorte que dans ce dernier cas l'erreur se trouve plus que deux fois plus petite que dans l'autre $Mx = \frac{1}{4}Ma$. Quand on prend $Mx = \frac{1}{4}Aa$, l'arc $AM$ contient $14^0$, $29'$, et la valeur $Mx = \frac{1}{5}Aa$ donne à l'arc $AM$, $11^0$, $32'$; c'est de là qu'on juge l'ouverture, qu'une surface sphérique peut souffrir, et on fixe de certaines limites, au delà desquelles il n'est pas permis d'augmenter cette ouverture. En consultant l'expérience il semble qu'on ne devrait jamais donner à $Mx$ plus que la cinquième partie du rayon $Aa$. Mais la solution de ce problème nous conduit encore à d'autres réflexions, qu'il est important de bien développer, pour mieux réussir dans les recherches suivantes.

**1ère Réflexion.** Quoique le point lumineux $e$ jette en tout sens des rayons on n'en considère ici que ceux, qui ne s'écartent pas beaucoup de l'axe $eA$, et on distingue ceux-ci en deux classes dont la première comprend ceux qui passent par le milieu $A$ de la surface sphérique $PAP$, qui se trouvent dans la direction de l'axe, ou ne s'en écartent qu'infiniment peu. L'autre classe

contient les rayons, qui s'en écartent davantage, et qui passent par les extrémités de la surface sphérique, en lui donnant une certaine ouverture dont le demi-diamètre est la ligne $Mx$. Ainsi les rayons extrêmes sont disposés dans la surface conique formée par la révolution d'un rayon quelconque $eM$ autour de l'axe $eA$.

7. **II^de^ Réflexion.** Comme les rayons, qui sortent du point $e$ différent par rapport à la réfraction, la raison $n:1$ est employée ici constamment pour marquer la réfraction des rayons moyens, ou qui tiennent un milieu entre les rayons les plus et les moins réfrangibles. Cette réfraction moyenne $n:1$ se rapporte donc aux rayons verds, et puisque la réfraction des rayons rouges et violets n'en diffère que très peu il sera permis de représenter la réfraction des rayons rouges par la raison $n-dn:1$, et celle des violets par la raison $n+dn:1$. De là nous retirerons un grand avantage que tout ce que nous aurons trouvé pour les rayons moyens, sera facilement appliqué aux rayons rouges et violets, par les règles de différentiation, en regardant $n$ comme une quantité variable. Ainsi toutes les recherches suivantes ne roulent que sur les rayons moyens, moins que nous n'en fassions exprès l'application aux rayons les plus et les moins réfrangibles.

8. **III^ème^ Réflexion.** Puisque les rayons les plus proches de l'axe en passant par la surface sphérique se réunissent avec l'axe dans un point $f$ dont la distance derrière la surface a été trouvée $fA = \frac{-n.Aa.eA}{(n-1)eA-Aa}$; la réunion de ces rayons représentera en $f$ une image du point lumineux $e$, que je nommerai l'image principale. Ainsi *l'image principale* sera toujours formée par la concurrence des rayons moyens ou verds, qui se trouvent dans la direction de l'axe $eA$, ou qui ne s'en éloignent qu'infiniment peu.

9. **IV^ème^ Réflexion.** Pour les rayons extrêmes, qui passent par les extrémités de la surface sphérique ou les points $M$, qui tout autour de l'axe en sont éloignés de l'intervalle $Mx$, puisque leurs réunion tombe sur un autre point de l'axe $f$ déterminé dans la seconde partie de notre solution, je nommerai l'image qui y est formée, *l'image extrême*, pour la mieux distinguer de l'image principale. Et parceque l'intervalle entre ces deux images cause une confusion dans la représentation, je nommerai cet intervalle *l'espace de confusion*.

10. **V^ème^ Réflexion.** Quoique je n'aye considéré dans le problème qu'un seut point lumineux $e$, il ne sera pas difficile d'appliquer la solution à des objets quelconques en faisant le même raisonnement sur tous les points de l'objet. Pour cet effet on n'a qu'à envisager l'objet comme un cercle, et à déterminer les images, qui répondent tant à son centre, qu'à un point quelconque de sa circonférense, par ce moyen l'image entière aura aussi la figure d'un cercle, dont il s'agit de assigner le demi-diamètre en sachant celui de l'objet. Je m'en vai donc déterminer tant l'image principale que l'image extrême d'un objet quelconque exposé à une surface sphérique refringente.

11. **Problème 2.** Un objet $E\varepsilon$ (Fig. 254.) étant exposé à une surface sphérique réfringente $PAP$, dont le centre est en $a$, et la raison de réfraction $n:1$, déterminer l'image principale $F\zeta$.

**Solution.** Qu'on considére l'objet comme un cercle, par le centre duquel $E$ passe l'axe

perpendiculairement au plan du cercle; et nommons: le demi-diamètre de l'objet $E\varepsilon = z$; et la distance de son centre $E$ à la surface $EA = a$. Soit ensuite le rayon ou demi-diamètre de la surface frangente $Aa = f$; et puisque l'image principale est aussi un cercle, dont le rayon est $F\zeta$, soit le demi-diamètre de l'image $F\zeta = z^I$ et sa distance à la surface $AF = \alpha$. Cela posé, puisque nous ne considérons que les rayons moyens dont la réfraction est $n : 1$, et encore ceux qui tombent dans la direction de l'axe $EA$, la première partie de la solution du problème précédent donne pour le lieu du centre $F$ de l'image cette équation:

$$\frac{1}{AF} = \frac{n-1}{n \,.\, Aa} - \frac{1}{n \,.\, EA} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{n-1}{nf} - \frac{1}{na},$$

d'où l'on tire la distance $AF = \alpha = \dfrac{naf}{(n-1)\,a - f}$.

Maintenant pour la grandeur de l'image $F\zeta$, on n'a qu'à appliquer le même raisonnement au point de l'objet, et le regarder comme le point lumineux. On tirera donc par le centre de la surface sphérique $a$ la droite $\varepsilon a a \zeta$ qui tiendra lieu de l'axe pour le point $\varepsilon$ et on aura cette équation:

$$\frac{1}{a\zeta} = \frac{n-1}{n \,.\, aa} - \frac{1}{n \,.\, \varepsilon a}.$$

Mais comme le demi-diamètre de l'objet $E\varepsilon = z$ est toujours très petit, en sorte que l'angle $Ea\varepsilon$ puisse être regardé comme presque évanouissant, cette circonstance nous fournit un moyen de déterminer plus commodement le demi-diamètre de l'image $F\zeta = z^I$. En effet la ressemblance des triangles $aE\varepsilon$ et $aF\zeta$ donne d'abord:

$$F\zeta = \frac{aF}{aE}\, z \quad \text{ou} \quad z^I = \frac{\alpha - f}{\alpha + f}\, z.$$

12. **Coroll. 1.** L'équation trouvée pour le lieu de l'image principale étant réduite à cette forme:

$$\frac{n-1}{nf} = \frac{1}{na} + \frac{1}{\alpha} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{n}{a}\right),$$

détermine le rayon $f$ de la surface sphérique, afin que l'image principale tombe dans un lieu donné. On verra dans la suite, qu'il convient d'introduire dans le calcul plutôt la distance de l'image principale $AF = \alpha$, que le rayon de la surface sphérique $f$.

13. **Coroll. 2.** La même équation représentée en sorte:

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{a}\right),$$

donne d'abord $\dfrac{\alpha - f}{\alpha f} = \dfrac{\alpha + f}{naf}$, desorte que $\dfrac{\alpha - f}{\alpha + f} = \dfrac{\alpha}{na}$, d'où nous tirons cette expression fort simple pour le demi-diamètre de l'image principale $z^I = \dfrac{\alpha}{na}\, z$. D'où l'on comprend que l'élimination du rayon $f$ est très propre à abréger le calcul.

14. **Remarque.** La supposition, dont je me suis servi ici, que le diamètre de l'objet extrêmement petit, ne se trouve que trop autorisée dans tous les instruments dioptriques; car que par les lunettes qui grossissent beaucoup on ne découvre dans le ciel qu'un assez petit objet dont le demi-diamètre surpasse rarément un quart de degré. Ce n'est donc qu'à un si petit objet auquel répond un angle $E\alpha\varepsilon$ beaucoup plus petit qu'un degré, qu'il faut rapporter nos recherches, ce qui nous fournit les grands avantages dans le calcul, que d'abord l'espace $A\alpha$ sur la surface réfringente puisse être regardé comme très petit, même par rapport à l'ouverture $AP$, qu'on a coutume de donner à la surface réfringente. Ensuite on pourra aussi hardiment envisager l'image $F\zeta$ comme plane et perpendiculaire à l'axe $EF$, ce qui ne saurait avoir lieu, si l'angle $E\alpha\varepsilon$ était considérable, et que la distance $\varepsilon a$ différât beaucoup de $Ea$. Sur tout on ne se trompera guères en ne distinguant point l'axe $\varepsilon\alpha$, qui répond à l'extrémité de l'objet, du véritable axe $EA$, ce qui me dispensera de plusieurs recherches, qui seraient fort embarrassantes.

15. **Problème 3.** L'objet $E\varepsilon$ étant éloigné ou approché tant soit peu plus de la surface réfringente, déterminer le changement, qui en arrivera dans le lieu de l'image principale.

**Solution.** Ayant nommé la distance de l'objet devant la surface réfringente $EA = a$, et la distance de l'image principale derrière la surface réfringente $AF = \alpha$, le rayon de cette surface étant $Aa = f$; il s'agit de déterminer la variation de $\alpha$, quand on augmente infiniment peu la distance $a$. Pour cet effet considérons l'équation $\frac{n-1}{nf} = \frac{1}{na} + \frac{1}{\alpha}$, et puisque le rayon $Aa = f$ demeure le même, la différentiation donne $\frac{-da}{naa} - \frac{d\alpha}{\alpha\alpha} = 0$, et partant $d\alpha = \frac{-\alpha\alpha}{aa} \cdot \frac{da}{n}$. Donc si l'on éloigne l'objet $E\varepsilon$ infiniment peu au delà de $E$ par l'espace $= da$, l'image principale se prochera de $F$ vers $A$ par l'espace $\frac{\alpha\alpha da}{naa}$.

16. **Coroll.** Donc si l'on mettait un autre objet devant la surface réfringente à la distance $= a + u$, l'intervalle $u$ étant extrêmement petit, son image principale tomberait derrière la surface réfringente à la distance $= \alpha + \frac{\alpha\alpha u}{naa}$.

17. **Ière Remarque.** J'ai supposé ci-dessus, que la surface réfringente $PAP$ tourne la convexité vers l'objet, et la concavité vers l'image; et cette condition doit toujours être sous-entendue, quand le rayon $Aa = f$ a une valeur positive, et la valeur négative indiquera le contraire. Cette position aura donc lieu quand le nombre $n$ est plus grand que l'unité, ce qui arrive lorsque les rayons passent d'un milieu plus rare dans un milieu plus dense, comme de l'air dans le verre ou l'eau. De la même manière, la quantité $\alpha$ étant positive, indiquera toujours que l'image tombe derrière la surface réfringente, tout comme la valeur positive de $a$ doit être rapportée devant la surface réfringente. Cette remarque est de la dernière importance pour se former une juste idée de la situation des objets et des images.

18. **IIde Remarque.** Voilà encore une autre circonstance, qu'il ne faut pas passer sous silence; c'est que l'image $F\zeta$ se trouve dans une situation renversée, de sorte que le point $\zeta$ se trouve

au-dessus de l'axe, son image $\zeta$ tombe au-dessous, comme on voit par la figure; et partant, puisque $z'$ a une valeur positive, celle de $z$ étant toujours prise telle, il en faut conclure que l'image est renversée, ce qui arrive donc toutes les fois que $\frac{\alpha}{a}$ est positif; mais s'il est négatif c'est une marque certaine, que l'image est représentée debout.

19. **Problème 4.** Un objet $E\varepsilon$ (Fig. 255.) étant exposé devant une surface sphérique réfringente $PAP$ dont l'image principale est représentée en $F\zeta$, trouver le lieu de l'image extrême $f$ et sa grandeur.

**Solution.** Posons comme auparavant la raison de réfraction $= n : 1$, le demi-diamètre de l'objet regardé comme un cercle $E\varepsilon = z$, sa distance devant la surface réfringente $EA = a$, le rayon de la surface réfringente $Aa = f$, la distance de l'image principale $AF = \alpha$, et le demi-diamètre de cette image $F\zeta = z'$. Pour ces éléments nous venons de trouver les deux équations suivantes:

$$\frac{n-1}{nf} = \frac{1}{na} + \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad z' = \frac{\alpha}{na} z.$$

Maintenant pour l'image extrême soit $MM$ l'ouverture de la surface réfringente, par laquelle les rayons sont transmis, et posons le demi-diamètre de cette ouverture $Mx = x$. Il s'agit donc de trouver le concours $f$ des rayons, qui venant du centre de l'objet $E$ passent par l'extrémité de l'ouverture $MM$; pour cet effet nous n'avons qu'à appliquer à ce cas la formule trouvée (3):

$$fA = \frac{n \,.\, Aa \,.\, EA}{(n-1)\, EA - Aa} - \frac{1}{2n} \cdot \frac{Ea \,.\, fA^2}{EA \,.\, Aa} Mx^2 \left(\frac{1}{EA} + \frac{1}{fA}\right)\left(\frac{1}{Aa} + \frac{1}{EA} - \frac{1}{fA}\right),$$

où je remarque que dans le dernier membre qui, étant très petit de soi même, il est permis d'écrire $fA = \alpha$ au lieu de $fA$, et partant nous aurons la distance:

$$Af = \frac{naf}{(n-1)\, a - f} - \frac{1}{2n} \cdot \frac{aa\,(a+f)}{af} xx \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{a} - \frac{1}{a}\right),$$

d'où l'on connait le lieu de l'image extrême $f\omega$. Pour sa grandeur il suffit de remarquer, que si l'on tire de l'extrémité de l'objet $\varepsilon$ par le centre de la surface réfringente $a$ une ligne droite, qui passe en même temps par l'extrémité de l'image principale $\zeta$; cette droite passera aussi par l'extrémité de l'image extrême $f\omega$. Donc je dis que la droite $a\zeta$ déterminera la grandeur de l'image extrême représentée en $f$.

20. **Coroll. 1.** L'intervalle $Ff$ étant ce que nous nommons l'espace de confusion, si nous posons cet espace $Ff = y$, a cause de $AF = \alpha = \frac{naf}{(n-1)\, a - f}$, nous aurons cette détermination:

$$y = \frac{1}{2n} \cdot \frac{aa\,(a+f)}{af} xx \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{a} - \frac{1}{a}\right),$$

où si nous éliminons le rayon $f$ à cause de

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{(n-1)\, a} + \frac{n}{(n-1)\, a} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{a} + \frac{n}{a}\right),$$

d'où nous tirons:

$$\frac{a+f}{af} = \frac{1}{f} + \frac{1}{a} = \frac{n}{(n-1)}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{f} + \frac{1}{a} - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{n}{a} + \frac{1}{\alpha}\right)$$

nous obtiendrons cette équation

$$y = \frac{aaxx}{2(n-1)^2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}\right)^2\left(\frac{n}{a} + \frac{1}{\alpha}\right),$$

qui exprime l'espace de confusion $Ff = y$ par les deux distances $AE = a$ et $AF = \alpha$, avec le demi-diamètre de l'ouverture $Mx = x$.

21. **Coroll. 2.** Cet espace de confusion ne saurait donc s'évanouir qu'en trois cas: 1° si $\alpha = o$, auquel cas il devient aussi $a = o$ et l'objet avec l'image se réunissent dans la surface réfringente même $MAM$. 2° Si $\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = o$ ou $\alpha = -a$, de sorte que l'image $F\zeta$ tombe entière sur l'objet même, et à cause de $f = \frac{(n-1)aa}{na+a}$, on aura $f = -a$, ou bien le centre de la surface sphérique $a$ se trouvera en $E$. 3° Si $\frac{n}{a} + \frac{1}{\alpha} = o$ ou $\alpha = \frac{-a}{n}$, et partant $f = \frac{-a}{n+1}$, dans ce cas donc l'image tombera devant la surface sphérique et celle-ci tournera sa concavité vers l'objet.

22. **Remarque.** Le premier de ces trois cas paraît non seulement paradoxe mais aussi contraire aux principes, sur lesquels notre solution est fondée, puisque nous avons supposé que la distance $AE$ soit toujours beaucoup plus grande que l'ouverture $MAM$. Mais dans ce cas on verra aisément, que l'ouverture n'entre aucunement en considération; car puisque chaque point de l'objet se trouve dans la surface même, tous les rayons y passent aussi par le même point, et partant la réfraction n'y saurait plus causer aucune confusion. Ainsi quoique le cas, où l'objet se trouve fort proche de la surface réfringente, paraîsse exclû de notre solution, nous entendons par là qu'elle y est aussi applicable, et partant plus générale qu'on n'avait pensé.

23. **Coroll. 3.** Pour la grandeur de l'image extrême $f\omega$, puisqu'elle est terminée par la droite $a\zeta$, à cause de

$$aF = \alpha - f = \frac{\alpha(a+\alpha)}{na+\alpha} \quad \text{et} \quad af = \frac{\alpha(a+\alpha)}{na+\alpha} - y,$$

nous aurons:

$$f\omega = F\zeta\left(1 - \frac{y}{aF}\right) = \left(1 - \frac{y(na+\alpha)}{\alpha(a+\alpha)}\right) \cdot z^I.$$

Mais la seule ligne terminatrice $a\zeta$ nous fournit une idée plus claire de la grandeur $f\omega$.

24. **1ère Réflexion.** Examinons plus soigneusement la nature de cette représentation, faite par les rayons de l'objet $E\varepsilon$, qui sont transmis par l'ouverture $MM$ de la surface réfringente. Considérons donc premièrement le seul point $E$ ou le centre de l'objet, dont l'image principale est représentée en $F$ et l'extrême en $f$, éloignée de celle-là de l'espace de confusion $Ff = y$. Maintenant le point $F$ n'étant formé que par les rayons infiniment proches de l'axe, il n'en sortira aussi d'autres rayons que suivant la direction de l'axe $FB$; et partant cette image ne sera visible qu'à

placés sur ce même axe. Or l'image extrême $f$ étant formée par les rayons $Mf$, $Mf$, qui y viennent de la circonférence de l'ouverture $MM$, dont le demi-diamètre a été nommé $Mx = x$; il n'y a aussi que ces rayons, qui sont répandus du point $f$, et partant dirigés selon les lignes $fm$, $fm$; de sorte qu'un oeil placé sur l'axe en $B$ n'en saurait être affecté, à moins que la pupille ne soit élargie pour recevoir ces rayons. Il sera de la dernière importance de bien remarquer cette inclinaison des rayons $fm$, $fm$, qu'on définira le plus commodement par leur inclinaison à l'axe ou par l'angle $mfB = MfA$, dont la mesure peut être estimée $= \frac{x}{a}$.

25. **II^de Réflexion.** Développons de la même manière l'image tant principale $\zeta$ qu'extrême $\omega$ sont formées par les rayons du bord de l'objet $\varepsilon$. Et d'abord puisque la ligne $\varepsilon\omega a\zeta$ tient lieu de l'axe par rapport au point $\varepsilon$, il est clair qu'il ne passe point d'autres rayons par le point $\omega$ que suivant la direction $a\zeta$ prolongée; or pour les rayons qui passent par le point $\omega$, ils seront inclinés à cette même ligne $a\zeta$ d'un angle égal au précédent $MfA = \frac{x}{a}$, qui sera donc l'inclinaison commune pour toute l'image extrême, dont $f\omega$ n'est que le demi-diamètre. Ensuite on comprend aisément, que tout l'espace $Ff$ doit être rempli de telles images, qui répondent à toutes les valeurs moindres que $x$. Chaque valeur de $x$ donne une image particulière entre $F$ et $f$, à laquelle convient sa propre inclinaison. Pour mieux imprimer à l'esprit toutes ces idées je m'envais établir les définitions suivantes.

26. **Définitions.** *L'assemblage d'images* comprend toutes les images de quelque objet, formées par les rayons réfractés dans une surface sphérique, où il faut remarquer, que lorsque l'objet est un cercle, l'assemblage d'images aura la figure d'un cône tronqué, qui résulte par la révolution du trapèze $F\zeta\omega f$ autour de l'axe $Ff$. Cet assemblage est déterminé par les éléments suivants:

1° La base $F\zeta$ est l'image formée par les rayons, qui passent par le milieu $A$ de la surface réfringente $MM$; ou bien cette base est l'image principale, dont le demi-diamètre $F\zeta$ est désigné par la lettre $z$.

2° La longueur de ce cône tronqué $Ff$ est l'espace de confusion indiqué par la lettre $y$, et nous avons vû qu'il est proportionnel au quarré du demi-diamètre de l'ouverture $Mx = x$.

3° L'autre base $f\omega$ est l'image extrême formée par les rayons qui passent par les bords de l'ouverture $MM$.

4° Cette base est déterminée par la droite terminatrice $a\zeta$, dont le concours avec l'axe en $a$ présente le sommet du cône tronqué. L'intervalle $Fa$ ou la distance du sommet à l'image principale $F\zeta$ sera marquée par la lettre $v = \alpha - f = \frac{\alpha(a+\alpha)}{na+\alpha}$.

5° Enfin pour l'image extrême $f\omega$ il faut remarquer l'inclinaison des rayons, que j'indiquerai par la lettre $\omega$, qui marque que les rayons du point $f$ sont inclinés de cet l'angle $\omega$ à l'axe $Ff$, et ceux du point $\omega$ du même angle $\omega$ à la directrice $a\omega$. Or nous avons trouvé $\omega = \frac{x}{a}$.

27. **Remarque.** Quand les rayons d'un tel assemblage d'images vont de nouveau par une autre surface sphérique réfringente, disposée toujours sur le même axe $EAF$, par rapport à cette nouvelle réfraction le dit assemblage d'images tient lieu d'objet, et alors il en naît un nouvel assemblage d'images, dont nous devons déterminer les éléments par les principes ci-dessus. Mais en tant que cet assemblage $Ff\omega\zeta$ n'est pas un véritable objet, il n'est pas nécessaire que la nouvelle surface réfringente se trouve derrière la base $F\zeta$; mais elle peut très bien être entre cet assemblage et la première surface réfringente $PAP$, puisque les rayons qui vont à cet assemblage y appartiennent aussi bien que ceux qui en passent au de là vers $B$. Cette différence entre un vrai objet et une image qui en tient lieu doit être bien observée, attendu qu'un vrai objet doit toujours se trouver devant la surface réfringente, pendant qu'une image, qui tient lieu de l'objet, se peut aussi bien trouver derrière que devant la surface réfringente.

28. **Problème 5.** Si au lieu d'un véritable objet il se trouve devant la surface sphérique réfringente $QBQ$ (Fig. 256.), un assemblage d'images $F\zeta f\omega$, déterminer l'assemblage d'images $G\eta g\omega'$ qui sera formé par les rayons réfractés.

**Solution.** Pour l'assemblage d'images proposé $F\zeta f\omega$, nommons l'espace de confusion $Ff = y$, le demi-diamètre de l'image principale $F\zeta = z^I$ (pour suivre le problème précédent), et l'inclinaison des rayons au point $f = \omega$, soit de plus le sommet de cet assemblage en $\varphi$ et posons $F\varphi = \varphi$. Ensuite, pour la surface réfringente, soit la distance $BF = b$, le rayon de cette surface $Bb = \gamma$, le demi-diamètre de son ouverture $M\varpi^I = \varpi^I$ et la raison de réfraction $= n^I : 1$. Enfin pour l'assemblage d'images cherché, soit la distance $BG = \beta$, le demi-diamètre de l'image principale $G\eta = z^{II}$, l'espace de confusion $Gg = y^I$, l'inclinaison des rayons au point $g = \omega^I$, et supposant le sommet de cet assemblage en $\varphi^I$ soit la distance $G\varphi^I = \varphi^I$.

Cela posé considérons premièrement l'image principale $G\eta$, formée par les rayons qui viennent de $F\zeta$ selon la direction de l'axe $FBG$, et en vertu du second problème nous aurons:

$$\frac{n^I - 1}{g} = \frac{1}{b} + \frac{n^I}{\beta} \quad \text{et} \quad z^{II} = \frac{\beta}{n^I b} z^I.$$

En second lieu considérons dans l'objet l'image extrême $f\omega$, et puisqu'elle est plus éloignée de la surface réfringente, du petit espace $Ff = y$, si elle jettait des rayons dans la direction de l'axe son image serait formée en deçà de $G$, savoir en $\varphi$, en sorte $G\varphi = \frac{\beta\beta y}{n^I bb}$; mais les rayons divergents qui partent de $f\omega$ représenteront la véritable image en $g\omega^I$, desorte que $\varphi g$ serait l'espace de confusion répondant à un objet $f\omega$. Par conséquent le problème précédent nous fournit pour ce cas en regardant la distance $Bf$ comme égale à $BF = b$:

$$\varphi g = \frac{\beta\beta \varpi^I \varpi^I}{2(n^I - 1)^2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}\right)^2 \left(\frac{n^I}{b} + \frac{1}{\beta}\right),$$

pourvu qu'on définisse justement l'ouverture $M^I M^I$, qui ne dépend plus de notre volonté, mais doit être prise telle, que les rayons divergents du point $f$, dont l'inclinaison à l'axe est $= \omega$,

d'où nous aurons $x^I = b\omega$, et partant pour l'espace entier de confusion $Gg$, nous aurons:

$$Gg = y^I = \frac{\beta\beta y}{n^I bb} + \frac{\beta\beta x^I x^I}{2(n^I - 1)^2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}\right)^2\left(\frac{n^I}{b} + \frac{1}{\beta}\right),$$

nous connaissons aussi l'inclinaison des rayons réfractés qui forment le point $g$, laquelle égale à l'angle $BGM^I$ et nommée $= \omega^I$, nous aurons, en négligeant le petit intervalle $Gg$:

$$\omega^I = \frac{x^I}{\beta} = \frac{b}{\beta}\,\omega.$$

Le point $\omega^I$ étant formé par les rayons qui viennent du point $\omega$, et qui tout autour sont de l'angle $\omega$, si la droite $\omega\zeta\beta$ était un rayon, il serait aussi réfracté dans le point présenterait l'axe ou la ligne terminatrice $\varphi^I\omega^I\eta$. Donc puisque cette ligne $\omega\beta$ vient du l'axe $\varphi$, la distance $B\varphi$ étant $= b + \varphi$, après la réfraction elle couperait l'axe précisément cherché $\varphi^I$, et partant à cause de $B\varphi^I = \beta - \varphi^I$, nous aurons cette dernière détermination:

$$\frac{n^I - 1}{g} = \frac{1}{b + \varphi} + \frac{n^I}{\beta - \varphi^I} = \frac{1}{b} + \frac{n^I}{\beta} \quad \text{ou} \quad \frac{\varphi}{b(b + \varphi)} = \frac{n^I\varphi^I}{\beta(\beta - \varphi^I)}.$$

29. **Coroll. 1.** La solution de ce problème renferme quatre conditions, par lesquelles le rapport entre les deux assemblages d'images $F\zeta f\omega$ et $G\eta g\omega$ est déterminé, dont la première regarde les images principales $F\zeta = z^I$ et $G\eta = z^{II}$, et contient ces deux équations:

$$\frac{n^I - 1}{g} = \frac{1}{b} + \frac{n^I}{\beta} \quad \text{et} \quad z^{II} = \frac{\beta}{n^I b}\, z^I.$$

30. **Coroll. 2.** La seconde condition regarde l'espace de confusion $Gg$, qui contient deux parties: l'une dépend de l'espace de confusion de l'objet $Ff = y$, et l'autre est causée par l'ouverture de la surface réfringente $M^I M^I$, dont le demi-diamètre est $M^I x^I = x^I$. Cette condition est exprimée en sorte:

$$Gg = y^I = \frac{\beta\beta y}{n^I bb} + \frac{\beta\beta x^I x^I}{2(n^I - 1)^2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}\right)^2\left(\frac{n^I}{b} + \frac{1}{\beta}\right).$$

31. **Coroll. 3.** La troisième détermine le rapport entre l'inclinaison des rayons aux images extrêmes $f\omega$ et $g\omega^I$, par cette équation $b\omega = \beta\omega^I$, d'où l'on tire en même temps l'ouverture de la surface réfringente, ou son demi-diamètre $x^I = b\omega = \beta\omega^I$. Mettant donc $b\omega$ à la place de $x^I$, l'espace de confusion $Gg = y^I$ sera exprimée en sorte:

$$Gg = y^I = \frac{\beta\beta y}{n^I bb} + \frac{(b + \beta)^2\,\omega\omega}{2(n^I - 1)^2}\left(\frac{n^I}{b} + \frac{1}{\beta}\right).$$

32. **Coroll. 4.** La quatrième condition renferme le rapport entre les sommets $\varphi$ et $\varphi^I$ des assemblages d'images, en sorte qu'ayant posé les distances $F\varphi = \varphi$ et $G\varphi^I = \varphi^I$, on a trouvé:

$$\frac{\varphi}{b(b + \varphi)} = \frac{n^I\varphi^I}{\beta(\beta - \varphi^I)} \quad \text{d'où l'on tire} \quad \varphi^I = \frac{\beta\beta\varphi}{n^I bb + (n^I b + \beta)\varphi}.$$

33. **1ère Réflexion.** Pour se former une juste idée de chaque assemblage d'images produit

par la réfraction, il est bien nécessaire d'avoir égard à toutes les déterminations, que je vais développer. Cependant je remarque que la détermination du sommet $v^I$ devient très incertaine à cause de l'obliquité de la ligne terminatrice $v\beta$ sur la surface réfringente $QBQ$; et cette irrégularité devient d'autant plus grande, plus le nombre des surfaces réfringentes est augmenté, de sorte qu'on ne saurait plus compter sur la justesse de la valeur $v^I$. Mais aussi notre dessein n'exige pas absolument cette détermination, et pour connaître la confusion causée par la réfraction, il suffira d'assigner pour chaque assemblage d'images, premièrement l'image principale $G\eta$, en déterminant son lieu et son demi-diamètre, ensuite l'espace de confusion $Gg$, ou seulement le centre de l'image extrême $g$, sans s'embarrasser de sa grandeur $g\omega^I$, dont la détermination pourrait devenir trop équivoque. Mais troisièmement il est très essentiel de déterminer toujours la divergence des rayons qui concourent dans le centre $g$ de l'image extrême, ou bien leur inclinaison à l'axe indiquée par l'angle $\omega^I$, puisque c'est de là, que nous jugerons dans la suite de la quantité de clarté, dont l'image est exprimée.

34. **II^de Réflexion.** En effet, puisque toutes nos recherches doivent être dirigées à délivrer de toute confusion les images représentées par plusieurs réfractions, pour en rendre distincte la vision, nos premiers soins doivent aboutir à faire évanouir l'espace de confusion de la dernière image, qui devient l'objet immediat de notre vue. Ainsi si l'assemblage $G\eta g$ était cette dernière et que nous eussions réussi à réduire à zéro l'espace $Gg$, nous aurions déjà bien rempli notre tâche et il serait inutile de s'embarrasser encore de la véritable grandeur de l'image extrême $g\omega$, qui ne saurait plus différer de la principale $G\eta$, quand l'espace $Gg = o$. A moins est on alors bien sûr que le milieu de l'objet sera représenté distinctement, et si les parties éloignées de l'axe sont encore confuses, c'est un défaut, auquel on ne saurait remédier; cette circonstance nous met dans la nécessité de ne contempler jamais qu'une petite partie de l'objet.

35. **Problème 6.** Plusieurs surfaces réfringentes sphériques $PAP$, $QBQ$, $RCR$ etc. (Fig. 257.) étant disposées sur le même axe $ABCD$, devant lesquelles se trouve un objet quelconque $E\varepsilon$, déterminer tant les images principales $F\zeta$, $G\eta$, $H\theta$ etc. formées par chaque réfraction, que les espaces de confusion $Ff$, $Gg$, $Hh$ etc., de même que les inclinaisons des rayons aux points $f$, $g$, $h$ etc.

**Solution.** Que toutes les surfaces réfringentes tournent leurs convexité vers l'objet, et posons premièrement les rayons de leur courbure:

$$\text{de } PAP = f, \quad \text{de } QBQ = g, \quad \text{de } RCR = h, \quad \text{de } SDS = i \quad \text{etc.}$$

ensuite les demi-diamètres de leurs ouvertures:

$$AP = x, \quad BQ = x^I, \quad CR = x^{II}, \quad DS = x^{III} \quad \text{etc.}$$

dont la première est regardée comme donnée, et les autres sont si grandes pour transmettre tous les rayons, qui sont transmis par la première $PAP$.

En troisième lieu soit la raison de réfraction à chacune de ces surfaces:

$$\text{à } PAP = n : 1, \quad \text{à } QBQ = n^I : 1, \quad \text{à } RCR = n^{II} : 1, \quad \text{à } SDS = n^{III} : 1.$$

Maintenant pour l'objet et les images principales posons les distances:

$$EA = a, \quad FB = b, \quad GC = c, \quad HD = d \quad \text{etc.}$$

$$AF = \alpha, \quad BG = \beta, \quad CH = \gamma, \quad DJ = \delta \quad \text{etc.}$$

et les demi-diamètres de leur grandeur:

$$E\varepsilon = z, \quad F\zeta = z^I, \quad G\eta = z^{II}, \quad H\theta = z^{III}, \quad J\iota = z^{IV} \quad \text{etc.}$$

en faisant remarquer que $z^I$, $z^{III}$, $z^V$ etc. marquent une situation renversée.

Pour les espaces de confusion posons:

$$Ff = y, \quad Gg = y^I, \quad Hh = y^{II}, \quad Ji = y^{III} \quad \text{etc.}$$

et enfin pour les inclinaisons des rayons à l'axe:

$$\text{en } f = \omega, \quad \text{en } g = \omega^I, \quad \text{en } h = \omega^{II}, \quad \text{en } i = \omega^{III} \quad \text{etc.}$$

Cela posé pour les rayons de courbure de chaque surface nous aurons les équations suivantes:

$$\frac{n-1}{a} = \frac{1}{a} + \frac{n}{\alpha}, \quad \frac{n^I-1}{g} = \frac{1}{b} + \frac{n^I}{\beta}, \quad \frac{n^{II}-1}{h} = \frac{1}{c} + \frac{n^{II}}{\gamma}, \quad \frac{n^{III}-1}{i} = \frac{1}{d} + \frac{n^{III}}{\delta} \quad \text{etc.}$$

et pour les demi-diamètres des images principales:

$$z^I = \frac{\alpha}{na} z, \quad z^{II} = \frac{\beta}{n^I b} z^I, \quad z^{III} = \frac{\gamma}{n^{II} c} z^{II}, \quad z^{IV} = \frac{\delta}{n^{III} d} z^{III} \quad \text{etc.}$$

Donc si nous voulons considérer toutes ces images comme debout en changeant les signes de $z^I$, $z^{III}$ etc. les demi-diamètres de chacune seront déterminés par celui de l'objet, en sorte:

$$z = -\frac{\alpha}{na} z, \quad z^{II} = +\frac{\alpha\beta}{nn^I ab} z, \quad z^{III} = -\frac{\alpha\beta\gamma}{nn^I n^{II} abc} z, \quad z^{IV} = +\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{nn^I n^{II} n^{III} abcd} z \quad \text{etc.}$$

L'inclinaison des rayons extrêmes à chaque image, celle de l'objet en $E$ étant $= \frac{x}{a}$, est aussi très simplement exprimée en sorte:

$$\omega = \frac{x}{a}, \quad \omega^I = \frac{b}{\beta}\omega, \quad \omega^{II} = \frac{c}{\gamma}\omega^I, \quad \omega^{III} = \frac{d}{\delta}\omega^{II} \quad \text{etc.}$$

ou bien par l'ouverture de la première surface:

$$\omega = \frac{x}{a}, \quad \omega^I = \frac{bx}{a\beta}, \quad \omega^{II} = \frac{bcx}{a\beta\gamma}, \quad \omega^{III} = \frac{bcdx}{a\beta\gamma\delta} \quad \text{etc.}$$

Delà nous aurons pour les ouvertures des surfaces suivantes:

$$x^I = \frac{bx}{a}, \quad x^{II} = \frac{bc}{a\beta} x, \quad x^{III} = \frac{bcd}{a\beta\gamma} x \quad \text{etc.}$$

Enfin pour les espaces de confusion les problèmes précédents nous fournissent les équations suivantes:

$$y = \frac{\alpha\alpha xx}{2(n-1)^2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2\left(\frac{n}{a}+\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{(a+\alpha)^2 xx}{2(n-1)^2 a\alpha}\left(\frac{n}{a}+\frac{1}{\alpha}\right),$$

$$y^I = \frac{\beta\beta}{n^I bb}y + \frac{(b+\beta)^2 xx}{2(n^I-1)^2 a\alpha}\left(\frac{n^I}{b}+\frac{1}{\beta}\right) \quad \left(\text{par } 31 \text{ à cause de } \omega = \frac{x}{\alpha}\right),$$

$$y^{II} = \frac{\gamma\gamma}{n^{II}cc}y^I + \frac{(c+\gamma)^2 bbxx}{2(n^{II}-1)^2 a\alpha\beta\beta}\left(\frac{n^{II}}{c}+\frac{1}{\gamma}\right),$$

$$y^{III} = \frac{\delta\delta}{n^{III}dd}y^{II} + \frac{(d+\delta)^2 bbccxx}{2(n^{III}-1)^2 a\alpha\beta\beta\gamma\gamma}\left(\frac{n^{III}}{d}+\frac{1}{\delta}\right)$$

etc.

36. **Coroll. 1.** Ayant donc l'espace de confusion de la première image:

$$Ff = y = \tfrac{1}{2}xx \cdot \frac{(a+\alpha)^2}{(n-1)^2 a\alpha}\left(\frac{n}{a}+\frac{1}{\alpha}\right),$$

l'espace de confusion de la seconde image sera:

$$Gg = y^I = \frac{\beta\beta}{2n^I bb}xx\left(\frac{(a+\alpha)^2}{(n-1)^2 a\alpha}\left(\frac{n}{a}+\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{n^I bb(b+\beta)^2}{(n^I-1)^2 a\alpha\beta\beta}\left(\frac{n^I}{b}+\frac{1}{\beta}\right)\right)$$

ou:

$$y^I = \frac{(a+\alpha)^2\beta\beta xx}{2(n-1)^2 n^I a\alpha bb}\left(\frac{n}{a}+\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{(b+\beta)^2 xx}{2(n^I-1)^2 a\alpha}\left(\frac{n^I}{b}+\frac{1}{\beta}\right).$$

37. **Coroll. 2.** De là même manière on aura l'espace de confusion de la troisième image:

$$Hh = y^{II} = +\frac{(a+\alpha)^2\beta\beta\gamma\gamma xx}{2(n-1)^2 n^I n^{II} a\alpha bbcc}\left(\frac{n}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$+\frac{(b+\beta)^2\gamma\gamma xx}{2(n^I-1)^2 n^{II} a\alpha cc}\left(\frac{n^I}{b}+\frac{1}{\beta}\right)$$

$$+\frac{(c+\gamma)^2 bbxx}{2(n^{II}-1)^2 a\alpha\beta\beta}\left(\frac{n^{II}}{c}+\frac{1}{\gamma}\right).$$

38. **Coroll. 3.** Pour l'espace de confusion de la quatrième image $Ji$ on aura par la substitution du précédent:

$$Ji = y^{III} = +\frac{(a+\alpha)^2\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta xx}{2(n-1)^2 n^I n^{II} n^{III} a\alpha bbccdd}\left(\frac{n}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$+\frac{(b+\beta)^2\gamma\gamma\delta\delta xx}{2(n^I-1)^2 n^{II} n^{III} a\alpha ccdd}\left(\frac{n^I}{b}+\frac{1}{\beta}\right)$$

$$+\frac{(c+\gamma)^2 bb\delta\delta xx}{2(n^{II}-1)^2 n^{III} a\alpha\beta\beta dd}\left(\frac{n^{II}}{c}+\frac{1}{\gamma}\right)$$

$$+\frac{(d+\delta)^2 bbccxx}{2(n^{III}-1)^2 a\alpha\beta\beta\gamma\gamma}\left(\frac{n^{III}}{d}+\frac{1}{\delta}\right).$$

39. **Coroll. 4.** S'il y avait encore une surface réfringente avec des déterminations analogues à celles que j'ai employées ici, on aurait pour l'espace de confusion:

$$Kk = y^{IV} = + \frac{(a+\alpha)^2 \beta\beta\gamma\gamma\delta\delta\varepsilon\varepsilon xx}{2(n-1)^2 n^I n^{II} n^{III} n^{IV} aabbccddee} \left(\frac{n}{a} + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$+ \frac{(b+\beta)^2 \gamma\gamma\delta\delta\varepsilon\varepsilon xx}{2(n^I-1)^2 n^{II} n^{III} n^{IV} aaccddee} \left(\frac{n^I}{b} + \frac{1}{\beta}\right)$$

$$+ \frac{(c+\gamma)^2 bb\delta\delta\varepsilon\varepsilon xx}{2(n^{II}-1)^2 n^{III} n^{IV} aa\beta\beta ddee} \left(\frac{n^{II}}{c} + \frac{1}{\gamma}\right)$$

$$+ \frac{(d+\delta)^2 bbcc\varepsilon\varepsilon xx}{2(n^{III}-1)^2 n^{IV} aa\beta\beta\gamma\gamma ee} \left(\frac{n^{III}}{d} + \frac{1}{\delta}\right)$$

$$+ \frac{(e+\varepsilon)^2 bbccddxx}{2(n^{IV}-1)^2 aa\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta} \left(\frac{n^{IV}}{e} + \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

40. **Remarque.** Pour rendre la solution de ce problème plus commode, j'ai introduit dans le calcul les lieux des images principales déterminés par les distances $a$, $\alpha$; $b$, $\beta$; $c$, $\gamma$ etc., d'où on détermine aisément le rayon de courbure de chaque surface. Or à cette occasion il est bon de remarquer, qu'à l'exception de la première $a = EA$, qui est toujours nécessairement positive, les autres $\alpha$, $b$, $\beta$, $c$, $\gamma$ etc. peuvent être aussi bien négatives que positives; mais pourtant avec cette limitation, que les sommes $\alpha + b$, $\beta + c$, $\gamma + d$ etc., qui expriment les distances entre les surfaces réfringentes $AB$, $BC$, $CD$ etc., doivent toujours être positives. Ainsi en regardant les lieux des images principales comme variables, les surfaces réfringentes demeurant les mêmes, on aura:

$$db = -d\alpha, \quad dc = -d\beta, \quad dd = -d\gamma \quad \text{etc.}$$

J'aurai besoin de ces différentiations quand il s'agira de déterminer la confusion causée par la différente réfrangibilité des rayons.

41. **1ère Réflexion.** Lorsqu'il est question de télescopes ou microscopes, la dernière image représentée par les surfaces réfringentes devient l'objet immédiat de la vue. Soit $M\mu$ (Fig. 258.) la dernière image principale, et puisque la nature de l'oeil exige, que les objets en soient éloignés à une certaine distance, pour que la vision devienne distincte, soit $MO = l$ cette distance appropriée à l'oeil posé en $O$, laquelle est estimée infinie pour les bons yeux, finie et assez petite pour les myopes, et même négative pour les presbytes. Soit de plus le demi-diamètre de cette dernière image $M\mu = z^{(m)}$, dont la valeur positive ou négative marquera si l'objet sera vu debout ou renversé; et la grandeur même montrera combien de fois l'objet paraîtra plus grand ou plus petit qu'à la vue simple. Car supposons qu'on regarde le même objet $E\varepsilon$ à la distance $= h$, à la vue simple, et son demi-diamètre $E\varepsilon = z$ sera vu sous l'angle $= \frac{z}{h}$; or maintenant par les surfaces réfringentes le même objet paraîtra sous l'angle $= \frac{z^{(m)}}{l}$, et partant grossi autant de fois, que cette expression contiendra d'unités. C'est donc par cette formule qu'on déterminera le grossissement des objets, quand on les regarde par un nombre quelconque de surfaces réfringentes.

42. **IIde Réflexion.** Cette réflexion roulera sur le degré de clarté dont l'objet sera par les surfaces réfringentes. Cela dépend principalement de l'inclinaison des rayons au point, car cette inclinaison étant déterminée par l'angle $\omega^{(m)}$, il sera transmis vers l'oeil en $O$ un cône lumineux, dont le demi-diamètre de la base à l'entrée dans l'oeil sera $= l\omega^{(m)}$; où il faut remarquer que lorsque ce demi-diamètre est égal ou plus grand que celui de la prunelle, la vision sera aussi claire qu'il est possible, ou bien l'objet paraîtra aussi clairement qu'à la vue simple. D'où il est évident que plus ce demi-diamètre $l\omega^{(m)}$ se trouve au-dessous de celui de la prunelle, plus aussi la clarté de la vision en sera diminuée. Nous verrons dans la suite que ce degré de clarté est en raison directe de l'ouverture de la première surface, dont le demi-diamètre est posé $= x$, et en raison inverse du grossissement.

43. **IIIème Réflexion.** L'espace de confusion de la dernière image, qui est $Mm =$ [illegible] causera nécessairement une confusion dans la représentation, qui se fait sur le fond de l'oeil. Car si les rayons, qui partent de chaque point de l'image principale $M\mu$, se réunissent sur la rétine même, ceux qui viennent de chaque point de l'image extrême en $m$ se réuniront ou en deçà ou au delà, d'où il arrive, que chaque point de l'objet sera représenté sur la rétine par un petit cercle, dont le diamètre sera la juste mesure de la confusion vue. Or je ferai voir dans la suite, que cette confusion est proportionnelle à l'espace de confusion $Mm$, multiplié par l'inclinaison des rayons en $m$, ou bien à l'expression $y^{(m)} . \omega^{(m)}$.

44. **IVème Réflexion.** Par rapport aux ouvertures des surfaces réfringentes, dont j'ai désigné les demi-diamètres par les lettres $x$, $x^{I}$, $x^{II}$, $x^{III}$ etc., les valeurs que j'en ai données et déterminées par celui de la première surface $= x$, ne se rapportent qu'aux rayons, qui viennent du centre de l'objet $E$, ou de son point situé dans l'axe. Je n'avais ici en vue, que de donner aux surfaces suivantes autant d'ouverture, qu'il faut pour transmettre tous les rayons du centre de l'objet $E$, qui tombent sur l'ouverture de la première surface $PAP$; de sorte que si cette ouverture s'évanouissait, celles de toutes les suivantes s'évanouissaient aussi. Mais dès que nous avons égard à l'objet tout entier $E\varepsilon$, afin que les rayons de son extrémité $\varepsilon$ soient transmis par les surfaces suivantes, il est bien clair que quoique l'ouverture de la première fût infiniment petite, celles des suivantes pourrait devenir très considérable. C'est donc réciproquement de l'ouverture des surfaces suivantes que dépend la grandeur de l'objet vu, ou le champ apparent, dont la détermination étant de la dernière importance, le chapitre suivant y est destiné, où nous découvrirons encore d'autres articles également intéressants pour la construction des instruments dioptriques.

---

## Chapitre II.

### Recherches sur le champ apparent par un nombre quelconque de surfaces réfringentes.

45. **Problème 7.** Autant de surfaces réfringentes étant disposées sur le même axe (Fig. 259), déterminer la route d'un rayon venant de l'extrémité de l'objet qui passe par le milieu de la première surface réfringente.