Chapitre VI.

Sur la sensation que la confusion des images cause dans l'oeil.

Problème 18. Un assemblage d'images Nvn (Fig. 262.) se trouvant devant l'oeil OV à sa juste distance $ON = l$, trouver la confusion qui en est causée dans la vision, ou dans l'image dépeinte sur la rétine.

Solution. Dans l'assemblage d'images proposé il faut distinguer: 1° l'image principale Nv qui n'envoit dans l'oeil que des rayons selon la direction de l'axe, ou qui ne s'en éloignent qu'infiniment peu; 2° l'espace de confusion Nn, supposant que l'image formée par les rayons extrêmes, qui passent par l'extrémité de la première surface, tombe en n: nommons cet espace $Nn = s$; il faut remarquer la direction des rayons, qui concourent au point n, posons donc l'inclinaison de ces rayons à l'axe $nNO = \omega$. Cela posé considérons l'oeil comme une petite chambre obscure bornée par une lentille convexe placée à l'entrée O, et soit la distance $OV = u$. Il importe fort peu que cette hypothèse s'écarte de la verité: nos conclusions demeureront toujours les mêmes. D'abord donc puisque l'image principale Nv se trouve à la juste-distance de l'oeil, son image y sera dépeinte sur la rétine, et celle du point N tombera sur le point V, mais le point étant plus éloigné, les rayons qui en viennent à l'oeil concourront en-deça de la rétine en v, en sorte que cette égalité aura lieu à peu près:

$$\frac{1}{OV} + \frac{1}{ON} = \frac{1}{Ov} + \frac{1}{On} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{u} + \frac{1}{l} = \frac{1}{Ov} + \frac{1}{l+s},$$

$$\frac{1}{Ov} = \frac{1}{u} + \frac{s}{(l+s)\,l} \quad \text{et} \quad Ov = \frac{(l+s)\,ul}{(l+s)\,l + su}.$$

Par conséquent le petit espace: $Vv = \frac{suu}{(l+s)\,l + su}$.

Or les rayons, qui se réunissent dans ce point v, en sortant du point n font avec l'axe un angle $Onv = \omega$, et partant ils rencontrent la prunelle en o, de sorte que $Oo = (l+s)\,\omega$; d'où l'on voit que ces mêmes rayons feront en v avec l'axe un angle $Ovo = \frac{(l+s)\,\omega}{Ov}$, et formeront par conséquent sur la rétine un cercle, dont le demi-diamètre sera $Vu = \frac{Vv}{Ov}(l+s)\,\omega$. Or $\frac{Vv}{Ov} = \frac{su}{(l+s)\,l}$ et partant $Vu = \frac{su\omega}{l}$. Donc puisque les points N et n repondent au même point de l'objet, il est clair que ce point de l'objet sera représenté sur la rétine par un petit cercle, dont le rayon est $Vu = \frac{su\omega}{l}$, lequel sans doute la confusion causée dans la vision doit être estimée proportionnelle, et puisqu'il ne s'agit que de la proportion, on voit bien que la défectuosité de notre hypothèse n'y influe point; partant, en omettant la quantité u relative à l'oeil, nous pourrons prononcer, que la confusion causée dans l'oeil est proportionnelle à la formule $\frac{s\omega}{l}$, et il sera même permis de la regarder comme égale à cette formule, puisqu'on ne détermine point une certaine unité pour y rapporter les mesures.

124. **Coroll. 1.** Ainsi quel que soit l'assemblage d'images offert à l'oeil dans sa distance, la confusion causée dans l'oeil sera égale au produit de l'espace de confusion par l'inclinaison des rayons en n, divisé par la juste distance de l'oeil.

125. **Coroll. 2.** Soit ω le point, où les rayons du point n passent par l'image principale et l'espace $N\omega$ sera $= s\omega$, donc $\frac{N\omega}{l}$ exprimera la confusion. Cette confusion est donc proportionnelle ou égale à l'angle sous lequel l'espace $N\omega$ paraîtrait à l'oeil.

126. **Ière Réflexion.** Cette dernière considération nous aurait pu d'abord conduire à la véritable estime de la confusion, dont la vision est troublée, sans avoir recours à la constitution de l'oeil; ce qui mérite bien d'être mis dans tout son jour, puisque la solution rapportée ci-dessus pourrait bien paraître suspecte à plusieurs égards. On n'a donc qu'à tourner le raisonnement de sorte: Puisque l'image principale $N\nu$ se trouve à la distance juste de l'oeil, elle sera distinctement exprimée sur la rétine; donc le point n étant vu par le rayon $n\omega o$, qui passe par le point ω de l'image principale, sera confondu dans l'oeil avec le point ω. Mais le point n répond au même point du vrai objet que le point N, et partant ce point de l'objet paraîtra répandu dans un cercle dont le demi-diamètre est $= N\omega$, ce qu'il faut entendre de tous les points du vrai objet, de sorte que chacun paraîtra comme une tache ronde, dont le demi-diamètre apparent sera égal à l'angle $NO\omega$; qui étant $= \frac{s\omega}{l}$ nous donne la plus juste mesure de la confusion, dont la vision de l'objet sera troublée.

127. **IIde Réflexion.** Nous avons vu dans le premier chapitre que pour chaque nombre de surfaces réfringentes, le dernier assemblage d'images, qui devient l'objet immédiat de la vision, dépend principalement de l'ouverture de la première surface, dont le demi-diamètre a été nommé $= x$, en sorte que l'espace de confusion $Nn = s$ a été trouvé proportionel au quarré de x et l'inclinaison des rayons en n, ou bien l'angle $Nn\omega = \omega$ à x même. Posons donc en général $s = Px^3$ et $\omega = Qx$; et la confusion de la vision sera représentée par la formule $\frac{PQx^3}{l}$, d'où nous tirons cette vérité de la plus grande importance dans la dioptrique, *que les surfaces réfringentes demeurant les mêmes, la confusion de la vision est toujours proportionnelle au cube du demi-diamètre de l'ouverture de la première surface.*

128. **IIIème Réflexion.** Dans cette détermination j'ai supposé, que la prunelle de l'oeil est assez ouverte pour recevoir encore les rayons no; ce qu'on peut bien supposer depuis que nous avons remarqué dans le chapitre précédent, qu'ordinairement le cône lumineux, qui entre dans l'oeil de chaque point de l'objet, est moins large que la prunelle. Cependant s'il arrivait, que le demi-diamètre de la prunelle fût plus petit que l'espace Oo, il est évident que la confusion causée dans l'oeil serait plus petite que nous venons de marquer, et une telle diminution pourra aussi être obtenue, quand on met devant l'oeil une lame percée d'un petit trou, qui exclue les rayons qui viennent du point n; c'est aussi la raison que, regardant par un petit trou les objets qui paraîtraient sans cela fort confus, on les voit assez distinctement, mais on perd par ce moyen autant de la clarté. Ensuite j'ai aussi supposé une telle situation de l'oeil, que l'image principale $N\nu$ se trouve

juste distance l, et qu'elle soit distinctement représentée dans l'oeil; mais si l'on y approchait l'assemblage d'images, qu'une image moyenne se trouvât à la juste distance de l'oeil, la confusion deviendrait plus petite, et il vaudra la peine de déterminer cette disposition de l'oeil où la confusion apperçue devient la plus petite.

129. **Problème 19.** Un assemblage d'images étant proposé, trouver la situation de l'oeil où la confusion causée dans la vision devient la plus petite.

Solution. Soit l'espace de confusion $Nn = s$ (Fig. 263.) et l'inclinaison des rayons en $N = \omega$, et puisque nous venons de voir, que $s = Pxx$ et $\omega = Qx$, il s'ensuit que l'angle ω est proportionnel à la racine quarrée de l'espace $Nn = s$; nous pourrons donc poser $\omega = \sqrt{\frac{s}{a}}$, et cette proportion aura lieu pour tous les points moyens de l'espace de confusion Nn, en sorte que prenant $NZ = z$, l'inclinaison des rayons en Z sera $= \sqrt{\frac{z}{a}}$. Maintenant supposons qu'une image moyenne quelconque $P\pi$ se trouve à la juste distance $= l$ devant l'oeil, en nommant l'espace $NP = p$, de sorte que cette image soit distinctement exprimée sur la rétine; et il est clair que les rayons du point n y causeront une confusion proportionnelle à l'espace $Pp = Pn \,.\, \omega = (s - p)\sqrt{\frac{s}{a}}$, qui est ouvertement d'autant plus petite, plus on approche le point P de l'extrémité n; mais il faut considérer qu'alors l'obliquité des rayons entre P et N pourrait causer une plus grande confusion. Pour cet effet considérons les rayons du point Z posant $NZ = z$, dont l'inclinaison est $= \sqrt{\frac{z}{a}}$, et de là naîtra l'espace $Pz = (p - z)\sqrt{\frac{z}{a}}$, qui deviendra le plus grand en prenant $z = \frac{1}{3}p$. Soit donc $z = \frac{1}{3}p$ et la confusion causée par les rayons de l'espace NP sera comme $Pz = \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3a}}$. Donc pour rendre la confusion la plus petite, on n'aura qu'à prendre le point P en sorte qu'il devienne $Pz = Pp$ ou $\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3a}} = (s - p)\sqrt{\frac{s}{a}}$, d'où nous parvenons à cette équation $s(s - p)^2 = \frac{4}{27}p^3$, dont la racine est $s = \frac{4}{3}p$ ou $p = \frac{3}{4}s$. Il faudra donc disposer l'oeil en sorte que sa juste distance l réponde au point P de l'espace de confusion Nn, en sorte que $NP = \frac{3}{4}Nn$, et alors la confusion dans l'oeil sera proportionnelle à l'espace $Pp = \frac{1}{4}s\sqrt{\frac{s}{a}}$, le plus petit qu'il soit possible.

130. **Coroll. 1.** Si l'on ajustait l'oeil à l'image principale, comme nous avons fait auparavant, la confusion dans l'oeil serait proportionnelle à l'espace $s\sqrt{\frac{s}{a}}$, et partant quatre fois plus grande que dans le cas que nous venons de déterminer.

131. **Coroll. 2.** Ayant donc dans le problème précédent estimé la confusion causée dans la vision par l'angle $\frac{s\omega}{l}$, nous voyons à-présent que par une meilleure disposition de l'oeil cette confusion peut être réduite à sa quatrième partie. Ainsi la juste mesure de cette confusion pourra être établie à $\frac{s\omega}{4l}$; de sorte que tous les points de l'objet paraissent à l'oeil comme des taches circulaires dont le demi-diamètre apparent est $= \frac{s\omega}{4l}$.

132. **Remarque.** Pour cet effet il faudra placer l'oeil en sorte qu'il se trouve à sa juste distance $= l$, non pas derrière l'image principale, mais derrière une autre image moyenne $P\pi$, en

sorte que l'intervalle NP soit trois quarts de l'entier espace de confusion $Nn = s$, ou bien il faut que l'image principale en N soit éloignée de l'oeil à la distance $= l - \frac{3}{4}s$. Mais il n'est pas nécessaire d'observer si scrupuleusement cette règle, puisque la juste distance elle même l admet un changement assez considérable sans que la distinction de la vision en soit troublée. La raison en doit être cherchée dans la conformation de l'oeil, qui est doué d'une faculté d'approcher ou d'éloigner tant soit peu la rétine du crystallin, en sorte qu'il est également disposé de voir distinctement les objets en des distances assez différentes. Ainsi pourvu que la distance de l'oeil à l'assemblage d'images proposé ne s'écarte très considérablement de la juste distance l, l'oeil se conformera quasi de lui même pour y appercevoir la plus petite confusion; et par cette raison la formule $\frac{s\omega}{4l}$ pourra être regardée comme la juste mesure de la confusion, dont la vision de l'objet est troublée.

133. **Problème 20.** Quelque grand que soit le nombre des surfaces réfringentes à travers desquelles on regarde l'objet $E\varepsilon$ (Fig. 257.) l'oeil se trouvant dans son juste lieu, déterminer la confusion, dont la vision sera troublée.

Solution. Puisqu'il s'agit d'assigner pour chaque cas la valeur de la formule $\frac{s\omega}{4l}$, nous n'avons qu'à prendre les valeurs des lettres s et ω du premier chapitre, en observant que l'espace de confusion, qui y est exprimé par lettres y, y^I, y^{II} etc., est marqué ici par s. Mais pour avoir d'abord des formules exprimées par les éléments établis dans le second chapitre, qui sont si propres à abréger le calcul, je tirerai ces mêmes valeurs du § 62 du second chapitre, en y introduisant d'abord le grossissement m au lieu de la juste distance l de l'oeil:

I. Pour le cas d'une *seule surface* nous avons d'abord l'inclinaison $\omega = \frac{Ax}{a}$, et du § 100 la juste distance $l = -\frac{a\varphi}{n\Delta\psi}$; or le grossissement rapporté à la distance d'estime donne $l = -\frac{\Delta}{mnA}$, d'où nous tirons $\frac{\omega}{4l} = \frac{mnAAx}{4\Delta a}$. Multiplions par la valeur de $s = y$ et nous aurons le degré de confusion exprimé en sorte:

$$\frac{mx^3}{8\Delta aa} \cdot \frac{n(n+A)(A+1)^2}{(n-1)^2}.$$

II. Pour le cas de *deux surfaces* nous avons $\omega = \frac{ABx}{a}$, et par le grossissement $l = \frac{\Delta}{mnn^IAB}$, d'où $\frac{\omega}{4l} = \frac{mnn^IAABBx}{4\Delta a}$, ce qui étant multiplié par $s = y^I$ donne le degré de confusion

$$= \frac{mx^3}{8\Delta aa}\left(\frac{n(n+A)(A+1)^2}{(n-1)^2} + \frac{A^3(n^I+B)(n^IB+1)(B+1)^2\varphi}{(n^I-1)^2(\psi^I-B\psi)}\right).$$

III. Pour le cas de *trois surfaces* nous avons $\omega = \frac{ABCx}{a}$, et par le grossissement:

$$l = -\frac{\Delta}{mnn^In^{II}ABC}, \text{ de sorte que } \frac{\omega}{4l} = \frac{mnn^In^{II}AABBCCx}{4\Delta a}.$$

Par conséquent multipliant par $s = y^{II}$, le degré de confusion se trouve:

$$= \frac{mx^3}{8\Delta aa}\left(\frac{n(n+A)(A+1)^2}{(n-1)^2} + \frac{A^3(n^I+B)(n^IB+1)(B+1)^2\varphi}{(n^I-1)^2(\psi^I-B\psi)} + \frac{A^3B^3(n^{II}+C)(n^{II}C+1)(C+1)^2\varphi}{(n^{II}-1)^2(\psi^{II}-C\psi^I)}\right).$$

Ainsi en général pour un nombre de surfaces quelconque, en introduisant le grossissement m rapporté à la distance d'estime Δ; si nous posons le degré ou plutôt la mesure de la confusion, apperçue dans l'oeil $= Z$, nous aurons pour la valeur de Z l'équation suivante:

$$Z = \frac{8\Delta aa}{mx^3} = \left\{\begin{array}{l} \frac{n(n+A)(A+1)^2}{(n-1)^2} + \frac{A^3(n^I+B)(n^IB+1)(B+1)^2\varphi}{(n^I-1)^2(\psi^I-B\psi)} + \frac{A^3B^3(n^{II}+C)(n^{II}C+1)(C+1)^2\varphi}{(n^{II}-1)^2(\psi^{II}-C\psi^I)} + \\ \frac{A^3B^3C^3(n^{III}+D)(n^{III}D+1)(D+1)^2\varphi}{(n^{III}-1)^2(\psi^{III}-D\psi^{II})} + \frac{A^3B^3C^3D^3(n^{IV}+E)(n^{IV}E+1)(E+1)^2\varphi}{(n^{IV}-1)^2(\psi^{IV}-E\psi^{III})} \end{array}\right\}$$

etc.

où il faut prendre autant de termes qu'il y a de surfaces réfringentes.

134. **Coroll. 1.** De là on voit comment chaque surface concourt à augmenter ou à diminuer la confusion; et s'il est possible de faire évanouir cette expression, toute la confusion qui provient de l'ouverture de la première surface sera réduite à rien.

135. **Coroll. 2.** Mais s'il n'est pas possible de rendre cette expression égale à zéro, il faut au moins la diminuer au point, que la confusion devienne insensible. Pour cet effet il faut fixer une certaine limite, que cette expression ne saurait surpasser, sans que la confusion devient insupportable.

136. **Remarque.** Cette limite doit sans doute être fixée par l'expérience. Cependant, comme Z marque le demi-diamètre apparent des taches, dont tous les points de l'objet sont vus, il semble que cet angle ne saurait surpasser une seconde; aussi en consultant l'expérience on remarque que dans les instruments, ou cet angle Z est de 2 secondes, la confusion est déjà assez sensible; par cette raison je voudrais assigner à Z une seconde ou bien la valeur de cette fraction $\frac{1}{200000}$, quand il n'est pas possible de la réduire entièrement à zéro.

Chapitre VII.

Précis de la Théorie de toute la Dioptrique.

137. **Problème 21.** Expliquer tous les éléments sur lesquels la Théorie de la Dioptrique est fondée; ou bien mettre devant les yeux toutes les dénominations qui entreront dans les formules qui renferment cette Théorie.

Solution. En considérant un nombre quelconque de surfaces réfringentes sphériques *PAP*, *QBQ*, *RCR*, *SDS* etc. (Fig. 264.), dont les centres soient disposés sur le même axe *EJ*, et les convexités tournées en même sens vers l'objet *Eε*, je nomme: