98. Ces mêmes avantages deviennent surtout fort importants à l'égard des objectifs d'une grande distance de foyer qui en rend l'usage extrêmement difficile. Car dès qu'un tel verre a deux cents pieds de foyer ou davantage, quelqu'excellent qu'il soit d'ailleurs, il y faut presqu'entièrement renoncer, vu qu'on ne saurait manier une si grande longueur, et quoiqu'on y eût réussi, le champ en serait toujours fort petit pour l'astronomie à cause de la rapidité du mouvement dont on voudrait passer les étoiles par la lunette. Or, employant le même objectif pour une telle lunette à trois verres, on gagne d'abord sur la longueur presque la moitié, ce qui doit rendre la manoeuvre beaucoup plus aisée, et quoiqu'elle grossit également, le plus grand champ apparent qu'elle découvre diminue fort l'incommodité que la rapidité du mouvement cause. Mais il sera important de pousser les recherches plus loin, pour voir si, en employant plusieurs verres, on pourrait encore davantage raccourcir la longueur de la lunette et en augmenter en même temps le champ apparent.

Section IV.

Recherches sur les lunettes à quatre verres.

99. Que les quatre verres soyent en A, B, C, D, leurs distances de foyer p, q, r, s et l'oeil en E. Posant les distances $AB = A$, $BC = B$, $CD = C$ et $DE = D$, il faut qu'il soit $\mathfrak{D} = -1$, d'où nous aurons les distances de foyer:

$$p = \frac{\mathfrak{A}A}{1+\mathfrak{A}}, \quad q = \frac{\mathfrak{B}AB}{(1+\mathfrak{B})A+(1+\mathfrak{A})\mathfrak{B}B}, \quad r = \frac{\mathfrak{C}BC}{(1+\mathfrak{C})B+(1+\mathfrak{B})\mathfrak{C}C}, \quad s = \frac{C}{1+\mathfrak{C}};$$

posons pour abréger:

$$A = \frac{1+\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}P, \quad B = \frac{1+\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}Q, \quad C = \frac{1+\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}R,$$

afin que nous ayons:

$$p = P, \quad q = \frac{PQ}{P+\mathfrak{A}Q}, \quad r = \frac{QR}{Q+\mathfrak{B}R}, \quad s = \frac{R}{\mathfrak{C}},$$

où il faut remarquer que les quantités A, B, C, D doivent toujours être positives. Or posant la multiplication $= m$, nous avons vu qu'il doit être toujours $x = \frac{m\omega}{l}$ et $p = P = \frac{m^2\omega^2}{ii^2}$, de sorte que P est une quantité donnée.

100. Pour les limites du cône lumineux sur chaque verre oculaire et sur l'oeil, nous aurons:

$$\text{sur } B \ldots\ldots A\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}},$$

$$\text{sur } C \ldots\ldots \left(\mathfrak{A}B + \frac{A}{\mathfrak{B}}\right)\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}},$$

$$\text{sur } D \ldots\ldots \left(\mathfrak{A}\mathfrak{B}C + \frac{\mathfrak{A}B}{\mathfrak{C}} + \frac{A}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}\right)\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}},$$

$$\text{sur } E \ldots\ldots \left(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}D + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}C}{\mathfrak{D}} + \frac{\mathfrak{A}B}{\mathfrak{C}\mathfrak{D}} + \frac{A}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}}\right)\varphi \pm \frac{x}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}},$$

où pour éviter la confusion les condition suivantes sont requises:

$$q > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}l}, \quad r > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}l}, \quad s > \frac{6\omega}{l},$$

et de là pour le demi-diamètre du champ apparent moyen nous obtiendrons:

$$\text{I.} \quad \varphi = \frac{nq}{A} = \frac{n\mathfrak{A}Q}{(1+\mathfrak{A})(P+\mathfrak{A}Q)},$$

$$\text{II.} \quad \varphi = \frac{n\mathfrak{B}r}{A+\mathfrak{A}\mathfrak{B}B} = \frac{n\mathfrak{A}\mathfrak{B}QR}{((1+\mathfrak{A})P+\mathfrak{A}^2(1+\mathfrak{B})Q)(Q+\mathfrak{B}R)},$$

$$\text{III.} \quad \varphi = \frac{n\mathfrak{B}\mathfrak{C}s}{A+\mathfrak{A}\mathfrak{B}B+\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}C} = \frac{n\mathfrak{A}\mathfrak{B}R}{(1+\mathfrak{A})P+\mathfrak{A}^2(1+\mathfrak{B})Q+\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2(1+\mathfrak{C})R},$$

$$\text{IV.} \quad \varphi = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{C}\omega}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2D-\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}C-\mathfrak{A}\mathfrak{B}B-A} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\omega}{\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2D-\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2(1+\mathfrak{C})R-\mathfrak{A}^2(1+\mathfrak{B})Q-(1+\mathfrak{A})P}$$

dont la plus petite valeur aura lieu.

101. Mais sans introduire ces nouvelles lettres P, Q, R, posons seulement $A = \frac{1+\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}p$ et $C = (1+\mathfrak{C})s$, de sorte que nous ayons:

$$q = \frac{\mathfrak{B}Bp}{(1+\mathfrak{B})p+\mathfrak{A}\mathfrak{B}B}, \quad r = \frac{\mathfrak{C}Bs}{B+(1+\mathfrak{B})\mathfrak{C}s},$$

et nos quatre valeurs de φ seront:

$$\text{I.} \quad \varphi = \frac{nq}{A},$$

$$\text{II.} \quad \varphi = \frac{n\mathfrak{B}r}{A+\mathfrak{A}\mathfrak{B}B},$$

$$\text{III.} \quad \varphi = \frac{n\mathfrak{B}\mathfrak{C}s}{A+\mathfrak{A}\mathfrak{B}B+\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}C},$$

$$\text{IV.} \quad \varphi = -\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{C}\omega}{A+\mathfrak{A}\mathfrak{B}B+\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}C-\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2D},$$

où il est d'abord clair que pour que le champ apparent ne devienne trop petit, il faut qu'il ne dépende pas de l'oeil, et partant on aura pour le lieu de l'oeil:

$$D = \frac{A+\mathfrak{A}\mathfrak{B}B+\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}C}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2},$$

laquelle quantité ne doit jamais devenir négative.

102. La multiplication est ici égale à $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, en sorte que si $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ est un nombre positif, la représentation est renversée, mais droite si $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ est négatif. A cause de ces trois nombres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ selon qu'ils sont positifs ou négatifs, nous aurons huit cas à examiner où la multiplication sera toujours $= m$, le demi-diamètre de la pupille $= \omega$, la clarté pleine qu'on aperçoit à la vue simple en chaque objet $= 1$ et la clarté dont la lunette montre le même objet $= \frac{1}{l^2}$. Or, en examinant

dans ce cas, je ne développerai que les espèces qui auront quelqu'avantage sur les lunettes à deux ou trois verres, c'est à dire qui découvrent un plus grand champ ou qui fournissent des lunettes plus courtes. Dans cette vue je donnerai l'exclusion à celles où la quatrième valeur de φ détermine le champ apparent puisqu'il deviendrait alors trop petit. Ainsi, ayant ou:

$$D = \frac{A}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} + \frac{B}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2} + \frac{C}{\mathfrak{C}},$$

ou selon les lettres introduites:

$$D = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} + \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} + \frac{(1+\mathfrak{C})R}{\mathfrak{C}^2},$$

cette quantité doit toujours être positive.

I. Cas des lunettes à 4 verres,

où les trois nombres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sont positifs.

103. Dans ce cas la représentation est renversée et la multiplication $m = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$. Donc si nous introduisons les lettres P, Q, R, qu'il soit:

$$A = \frac{1+\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}P, \qquad B = \frac{1+\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}Q, \qquad C = \frac{1+\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}R,$$

nous aurons pour le lieu de l'oeil:

$$D = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{m^2} + \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} + \frac{(1+\mathfrak{C})R}{\mathfrak{C}^2},$$

et partant les quantités Q et R doivent être positives; la quantité P étant toujours donnée $= p = \frac{m^2\omega^2}{u^2}$. Or, pour le demi-diamètre du champ apparent moyen φ nous aurons ces trois formules:

$$\text{I.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + 1 + \mathfrak{A},$$

$$\text{II.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} + \mathfrak{A}(1+\mathfrak{B}),$$

$$\text{III.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}(1+\mathfrak{C}).$$

Les formules étant les renversées des précédentes, c'est la plus grande qui aura lieu. Mais pour les distances de foyer on aura:

$$p = P, \qquad q = \frac{PQ}{P+\mathfrak{A}Q}, \qquad r = \frac{QR}{Q+\mathfrak{B}R}, \qquad s = \frac{R}{\mathfrak{C}}.$$

104. Or la quelle de ces trois formules soit la plus grande, il faut faire en sorte qu'elle devienne la plus petite qu'il soit possible, afin qu'on obtienne le plus grand champ apparent possible. Mais si la troisième est la plus grande, il est évident qu'à cause de $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = m$, sa valeur est plus grande que m, et partant $\varphi < \frac{n}{m}$; et si la première ou la seconde était la plus grande, le champ apparent

deviendrait encore plus petit, d'où il est évident que ce cas ne fournit aucune lunette qui soit préférable à celles de deux ou trois verres; et partant je ne m'arrêterai pas à développer plus soigneusement les qualités des lunettes de ce cas. Or, en cas qu'on ait construit une lunette qui appartient, il sera aisé par ces formules d'en connaître les propriétés, et on trouvera toujours que non seulement le champ apparent est trop petit, mais que la lunette même devient trop longue.

II. Cas des lunettes à 4 verres,
où $\mathfrak{A}$ est négatif mais $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ positifs.

105. Posons donc $-\mathfrak{A}$ pour $+\mathfrak{A}$ et nos formules seront:

$$A = \frac{\mathfrak{A}-1}{\mathfrak{A}} P, \qquad B = \frac{1+\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}} Q, \qquad C = \frac{1+C}{\mathfrak{C}} R;$$

$$p = P, \qquad q = \frac{PQ}{P-\mathfrak{A}Q}, \qquad r = \frac{QR}{Q+\mathfrak{B}R}, \qquad s = \frac{R}{\mathfrak{C}},$$

et les 3 valeurs de $\frac{n}{\varphi}$:

$$\text{I.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}Q} - \mathfrak{A} + 1,$$

$$\text{II.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}Q} - \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}(1+\mathfrak{B}),$$

ou:

$$\frac{n}{\varphi} = \left(\frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}} - \mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q\right)\left(\frac{1}{\mathfrak{B}R} + \frac{1}{Q}\right),$$

$$\text{III.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} - \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}\mathfrak{B} - m,$$

à cause de la multiplication $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = m$, et pour le lieu de l'oeil:

$$D = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{m^2} + \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} + \frac{(1+\mathfrak{C})R}{\mathfrak{C}^2}.$$

106. Ici il est d'abord évident que le nombre $\mathfrak{A}$ doit être plus grand que l'unité et:

$$\frac{(\mathfrak{A}-1)P}{m^2} < \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} + \frac{(1+\mathfrak{C})R}{\mathfrak{C}^2},$$

pour que les intervalles A et D proviennent positifs, et par la même raison les quantités Q et R seront positives. Maintenant il faut voir laquelle des 3 valeurs de $\frac{n}{\varphi}$ est la plus grande et ensuite il faut tâcher de la rendre aussi petite qu'il est possible. Pour cet effet voyons sous quelles conditions chacune de ces trois valeurs devient la plus petite, afin qu'on puisse rendre la plus grande aussi petite qu'il est possible. Or la première s'évanouit en faisant $\mathfrak{A} = 1$, et alors les deux autres valeurs seront:

$$\text{II.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} + 1 + \mathfrak{B}, \qquad \text{III.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} + \mathfrak{B} + m,$$

dont la plus grande aurait lieu qui est indubitablement la troisième. Cependant il serait toujours $\frac{n}{\varphi} > m$ et partant $\varphi < \frac{n}{m}$, ce qui ne produirait aucun avantage sur les lunettes à deux verres.

Il faut donc mettre $\mathfrak{A} > 1$, d'où la première valeur de $\frac{n}{\varphi}$ devient plus grande, et en changeant de signes les deux autres valeurs, puisque les signes ne font rien à notre dessein et qu'il s'agit uniquement des valeurs absolues, nous aurons:

$$\text{I.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}Q} - \mathfrak{A} + 1,$$

$$\text{II.} \quad \frac{n}{\varphi} = \mathfrak{A}(1+\mathfrak{B}) + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} - \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}Q} - \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R},$$

$$\frac{n}{\varphi} = \left(\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q - \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}}\right)\left(\frac{1}{\mathfrak{B}R} + \frac{1}{Q}\right),$$

$$\text{III.} \quad \frac{n}{\varphi} = m + \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} - \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R},$$

où il faut de plus qu'il soit:

$$q > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}l}, \qquad r > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}l}, \qquad s > \frac{6\omega}{l}.$$

Cependant il pourrait bien arriver que la seconde devînt négative, auquel cas il y faudrait changer les signes; mais la troisième est toujours positive, puisque la valeur de D est telle et que la troisième se change en $\frac{n}{\varphi} = \frac{m^2 D}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R}$.

108. Or pour qu'il devienne $\varphi > \frac{n}{m}$ en vertu de la troisième formule, il faut qu'il soit $(\mathfrak{A}-1)P > \mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 R$, et partant la seconde doit être présentée ainsi:

$$\text{II.} \quad \frac{n}{\varphi} = \left(\frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}} - \mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q\right)\left(\frac{1}{\mathfrak{B}R} + \frac{1}{Q}\right),$$

laquelle ne doit pas être plus grande que la troisième. Rendons-les donc égales pour avoir:

$$\frac{2(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}Q} = \frac{2\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} + m + \mathfrak{A}(1+2\mathfrak{B}),$$

d'où nous tirons:

$$\frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q + \frac{(m+\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{B}QR}{2Q+\mathfrak{B}R};$$

Il faut donc qu'il soit:

$$\frac{(m+\mathfrak{A}\mathfrak{B})Q}{2Q+\mathfrak{B}R} > \mathfrak{A}\mathfrak{B} \quad \text{ou} \quad (m-\mathfrak{A}\mathfrak{B})Q > \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 R.$$

Donc $\mathfrak{A}\mathfrak{B} < m$ et $\mathfrak{C} > 1$, soit $\lambda > 1$ et posons $Q = \frac{\lambda\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 R}{m-\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$, d'où nous tirons:

$$\frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}} = \frac{\lambda\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2(1+\mathfrak{B})}{m-\mathfrak{A}\mathfrak{B}}R + \frac{\lambda\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2(m+\mathfrak{A}\mathfrak{B})}{2\lambda\mathfrak{A}\mathfrak{B}+m-\mathfrak{A}\mathfrak{B}}R.$$

109. Mais pour mieux développer ces formules, puisque ce n'est que la plus grande qui aurait avoir lieu, dans les autres on pourra donner à n une plus petite valeur, afin qu'elles soient

d'accord entr'elles. Que n, n^I, n^{II} marquent donc des valeurs de n telles que la plus grande ne surpasse point $\frac{1}{4}$, si nous supposons que le demi-diamètre de l'ouverture d'un oculaire ne doive être plus grand que le quart de sa distance de foyer. Ayant donc rendu positives nos trois formules, nous aurons:

$$\text{I.}\quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}Q} - \mathfrak{A} + 1,$$

$$\text{II.}\quad \frac{n^I}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}Q} - \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}(1+\mathfrak{B}),$$

$$\text{III.}\quad \frac{n^{II}}{\varphi} = m + \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} - \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R}.$$

D'où nous tirons:

$$\frac{n^{II}+n^I-n}{\varphi} = m-1, \quad \text{et partant} \quad \varphi = \frac{n^{II}+n^I-n}{m-1};$$

et partant le champ apparent sera le plus grand, si les valeurs n^{II} et n^I sont les plus grandes et n la plus petite.

110. Posons donc $\mathfrak{A}Q = P$ pour rendre $n = o$ et que les deux autres n^{II} et n^I deviennent égales pour avoir $\varphi = \frac{2n^I}{m-1}$, d'où résulte le plus grand champ apparent qui soit possible dans ce cas, et nous aurons:

$$\text{II.}\quad \frac{n^I}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}S} + \mathfrak{A} - 1 - \frac{(1+\mathfrak{B})P}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}(1+\mathfrak{B}),$$

ou:

$$\frac{n^I}{\varphi} = \frac{-(\mathfrak{A}\mathfrak{B}+1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}\mathfrak{B} - 1.$$

Or, cette valeur devenant négative, on voit qu'on doit prendre $P > \mathfrak{A}Q$; et partant n ne saurait s'évanouir. Soit donc $P = \mathfrak{A}(Q+\mathfrak{B})$ pour avoir:

$$\text{I.}\quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)\mathfrak{B}}{Q},$$

$$\text{II.}\quad \frac{n^I}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)\mathfrak{B}(Q+\mathfrak{B}R)}{\mathfrak{B}QR} - \frac{(\mathfrak{A}\mathfrak{B}+1)Q}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}\mathfrak{B} - 1,$$

$$\text{III.}\quad \frac{n^{II}}{\varphi} = m + \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \frac{(\mathfrak{A}\mathfrak{B}+1)Q}{\mathfrak{B}R} - \frac{(\mathfrak{A}-1)\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}R}.$$

111. Posons donc ces deux dernières valeurs égales entr'elles et nous aurons:

$$\frac{(\mathfrak{A}-1)\mathfrak{B}(2Q+\mathfrak{B}R)}{\mathfrak{B}QR} = \frac{2(\mathfrak{A}\mathfrak{B}+1)Q}{\mathfrak{B}R} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + 1 + m,$$

donc:

$$\frac{(\mathfrak{A}-1)\mathfrak{B}}{Q} = \frac{2(\mathfrak{A}\mathfrak{B}+1)Q + (2\mathfrak{A}\mathfrak{B}+1)\mathfrak{B}R + m\mathfrak{B}R}{2Q+\mathfrak{B}R} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + 1 + \frac{(m+\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{B}R}{2Q+\mathfrak{B}R}.$$

qui est la valeur de $\frac{n}{\varphi}$, et les deux autres seront:

$$\frac{n^I}{\varphi} = \frac{n^{II}}{\varphi} = m + \mathfrak{A}\mathfrak{B} - \frac{(m + \mathfrak{A}\mathfrak{B})\,Q}{2Q + \mathfrak{B}R} = \frac{(m + \mathfrak{A}\mathfrak{B})\,(Q + \mathfrak{B}R)}{2Q + \mathfrak{B}R},$$

ou la distance de l'oeil devient:

$$D = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R\,(m + \mathfrak{A}\mathfrak{B})\,(Q + \mathfrak{B}R)}{m^2\,(2Q + \mathfrak{B}R)}.$$

Ensuite la première valeur de $\frac{n}{\varphi}$ donne:

$$\frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}Q} = \mathfrak{A}\,(\mathfrak{B} + 1) + \frac{(m + \mathfrak{A}\mathfrak{B})\,\mathfrak{B}R}{2Q + \mathfrak{B}R} = \frac{2\mathfrak{A}\,(\mathfrak{B} + 1)\,Q + (m + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A})\,\mathfrak{B}R}{2Q + \mathfrak{B}R},$$

d'où nous tirons:

$$\frac{\mathfrak{B}R}{Q} = \frac{2\,(\mathfrak{A} - 1)\,P - 2\mathfrak{A}^2\,(\mathfrak{B} + 1)\,Q}{\mathfrak{A}\,(m + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A})\,Q - (\mathfrak{A} - 1)\,P},$$

et partant:

$$\frac{n}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}Q} - \mathfrak{A} + 1,$$

$$\frac{n^I}{\varphi} = \frac{n^{II}}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{2\mathfrak{A}Q} + \frac{m - \mathfrak{A}}{2}.$$

112. Or, afin que la fraction $\frac{\mathfrak{B}R}{Q}$ soit positive, nous avons ces limites:

$$\frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}Q} > \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A} \quad \text{et} \quad \frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}Q} < m + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A},$$

ensuite que la valeur de $\frac{n^I}{\varphi} = \frac{n^{II}}{\varphi}$ surpasse $\frac{n}{\varphi}$, on a $\frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}Q} < m + \mathfrak{A} - 2$. Posons donc $\frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}Q} = m + \mathfrak{A} - 2 - \mu$ de sorte que $\mathfrak{A}\mathfrak{B} < m - 2 - \mu$, et nous aurons: $\frac{n}{\varphi} = m - 1 - \mu$ et $\frac{n^I}{\varphi} = \frac{n^{II}}{\varphi} = m - 1 - \frac{\mu}{2}$ et $\frac{\mathfrak{B}R}{Q} = \frac{2\,(m - 2 - \mu - \mathfrak{A}\mathfrak{B})}{2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + 2 + \mu}$.

Alors le demi-diamètre du champ moyen sera $\varphi = \frac{n^I}{m - 1 - \frac{\mu}{2}}$, et les autres quantités:

$$Q = \frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}\,(m + \mathfrak{A} - 2 - \mu)}, \qquad R = \frac{2\,(\mathfrak{A} - 1)\,(m - 2 - \mu - \mathfrak{A}\mathfrak{B})\,P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\,(m + \mathfrak{A} - 2 - \mu)\,(2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + 2 + \mu)};$$

il faut prendre $\mu < m - 2 - \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, et partant il sera $\varphi < \frac{2n^I}{m + \mathfrak{A}\mathfrak{B}}$.

113. Avant que de déterminer quelque chose de précis, il faut considérer les autres quantités et les conditions qu'il faut remplir; or nous trouverons:

$$A = \frac{(\mathfrak{A} - 1)\,P}{\mathfrak{A}}, \qquad B = \frac{(\mathfrak{A} - 1)\,(1 + \mathfrak{B})\,P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\,(m + \mathfrak{A} - 2 - \mu)}, \qquad C = \frac{2\,(\mathfrak{A} - 1)\,(1 + \mathfrak{C})\,(m - 2 - \mu - \mathfrak{A}\mathfrak{B})\,P}{m\,(m + \mathfrak{A} - 2 - \mu)\,(2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + 2 + \mu)},$$

$$p = P, \quad q = \frac{(\mathfrak{A} - 1)\,p}{\mathfrak{A}\,(m - \mu - 1)}, \quad r = \frac{2\,(\mathfrak{A} - 1)\,(m - 2 - \mu - \mathfrak{A}\mathfrak{B})\,P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\,(2m - 2 - \mu)\,(m + \mathfrak{A} - 2 - \mu)} \quad \text{et} \quad s = \frac{2\,(\mathfrak{A} - 1)\,(m - 2 - \mu - \mathfrak{A}\mathfrak{B})\,P}{m\,(m + \mathfrak{A} - 2 - \mu)\,(2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + 2 + \mu)},$$

et il est requis qu'il soit:

$$q > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}l}, \qquad r > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}l} \qquad \text{et} \qquad s > \frac{6\omega}{l}.$$

Ces dernières conditions nous montrent qu'on ne peut pas prendre $m - 2 - \mu - \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ trop petit ou μ trop grand, comme il serait avantageux pour l'augmentation du champ apparent. Donc dans l'hypothèse:

$$p = P = \frac{3}{50}m^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\omega}{l} = \frac{1}{50},$$

il faut qu'il soit:

$$m\mathfrak{A} > 3m - 2\mu - 2,$$

$$m^2\mathfrak{A} > 3m^2 + (4m + \mu m - \mu - 2)\mathfrak{A} - 8m - 4m\mu + (\mu + 2)^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{B}m(\mathfrak{A} - 1),$$

$$m^2(\mathfrak{A} - 1) > m\mathfrak{A}(\mathfrak{B} + 2 + \mu + \mathfrak{A}\mathfrak{B}) + 2\mathfrak{A}^2\mathfrak{B} - 4\mathfrak{A}\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A} - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mu + \mathfrak{A}\mu - (\mu + 2)^2.$$

114. Soit $\mu + 2 = \lambda$, de sorte que $\lambda < m + \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ et $\lambda > 2$ et ces conditions seront:

$$m\mathfrak{A} > 3m - 2\lambda + 2,$$

$$m^2\mathfrak{A} > 3m^2 + (\lambda m + 2m - \lambda)\mathfrak{A} - 4\lambda m + \mathfrak{A}\mathfrak{B}(\mathfrak{A} - 1)m + \lambda^2,$$

$$m^2(\mathfrak{A} - 1) > m\mathfrak{A}(\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B} + \lambda) + 2\mathfrak{A}^2\mathfrak{B} - 2\lambda\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \lambda\mathfrak{A} - \lambda^2,$$

et le demi-diamètre du champ moyen $\varphi = \frac{2n}{2m - \lambda}$. Par la seconde formule on reconnait que λ doit être moindre que m et même plus petit que $m - 1$. Après quelques essais j'ai trouvé qu'on satisfait assez près à ces conditions, en posant $\mathfrak{A} = 4$, $\mathfrak{B} = 1$, $\mathfrak{C} = \frac{m}{4}$, $\lambda = m - 8$, de sorte que $\varphi = \frac{2n}{m + 8}$; donc on aura:

$$A = \frac{3}{4}P, \qquad B = \frac{1}{8}P, \qquad C = \frac{m + 4}{2m^2}P, \qquad D = \frac{m + 8}{m^3}P,$$

$$p = P, \qquad q = \frac{1}{12}P, \qquad r = \frac{1}{2m + 16}P, \qquad s = \frac{2}{m^2}P.$$

Il faut seulement remarquer que r ne devient pas plus grand que $\frac{6m\omega}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}l}$, mais le défaut est si petit qu'on le peut aisément négliger, surtout si m est un nombre fort grand.

115. Pour éviter cet inconvénient, posons en général $\lambda = m - \nu$, et nos trois conditions deviendront:

I. $m\mathfrak{A} > m + 2\nu + 2,$

II. $\nu m\mathfrak{A} > m\mathfrak{A} + \nu\mathfrak{A} + m\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\mathfrak{A} - 1) + 2m\nu + \nu^2,$

III. $\nu m\mathfrak{A} > m\mathfrak{A} - \nu\mathfrak{A} + m\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\mathfrak{A} - 1) + 2\mathfrak{A}^2\mathfrak{B} + 2\nu\mathfrak{A}\mathfrak{B} + 2m\nu - \nu^2,$

où la seconde renferme la troisième si $\nu > \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, mais si $\nu < \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, la seconde est renfermée dans la troisième. Donc si nous posons $\nu = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, la seconde et la troisième seront identiques et chacune

duit à $0 > m + m\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2$, ce qui est impossible. Il faut donc qu'il soit $\nu > \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ et alors il suffit de remplir la seconde condition. Posons donc $\nu = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \pi$, et la seconde condition exige:

$$\pi m (\mathfrak{A} - 2) > \mathfrak{A} (1 + \mathfrak{B}) (m + \mathfrak{A}\mathfrak{B}) + \pi \mathfrak{A} + 2\pi \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \pi^2.$$

D'où l'on voit que si m était infini, il faudrait qu'il fût $\pi > \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}-2}$. Soit donc $\pi = \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}-2} + \varrho$, il est requis:

$$\varrho m (\mathfrak{A} - 2) > \frac{\mathfrak{A}^2 (\mathfrak{A} - 1)(1 + \mathfrak{B})(1 + \mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{B})}{(\mathfrak{A} - 2)^2} + \frac{\varrho \mathfrak{A} (\mathfrak{A} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2\mathfrak{B})}{\mathfrak{A} - 2} + \varrho^2.$$

116. Il est donc nécessaire qu'il soit $\mathfrak{A} > 2$ et $\varrho > 0$, et ayant trouvé des valeurs convenables pour ϱ, on aura $\nu = \frac{\mathfrak{A}(1 + \mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{B})}{\mathfrak{A} - 2} + \varrho$; $\lambda = m - \nu$ et le demi-diamètre du champ apparent:

$$\varphi = \frac{2n}{m + \frac{\mathfrak{A}(1 + \mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{B})}{\mathfrak{A} - 2} + \varrho} = \frac{2n(\mathfrak{A} - 2)}{(m + \varrho)(\mathfrak{A} - 2) + \mathfrak{A}(1 + \mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{B})}.$$

Supposons d'abord $\mathfrak{A} = 3$ et il faut prendre:

$$\varrho m > 18 (1 + \mathfrak{B})(1 + 2\mathfrak{B}) + 3\varrho (3 + 4\mathfrak{B}) + \varrho^2.$$

Posons de plus $\mathfrak{B} = 1$, et si l'on prend $\varrho m > 108 + 21\varrho + \varrho^2$, on aura $\varphi = \frac{2n}{m + 9 + \varrho}$. Or puisque $m > \frac{108}{\varrho} + 21 + \varrho$, ce cas ne saurait avoir lieu, à moins qu'il ne fût $m > 21 + 2\sqrt{108}$ ou $m > 41$, car la plus petite valeur de m résulte en posant $\varrho = \sqrt{108}$.

117. Mais avant que d'entrer en détail, voilà la théorie générale de ce cas. Qu'on prenne $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ et ϱ, en sorte qu'il soit:

$$\varrho m (\mathfrak{A} - 2) > \frac{\mathfrak{A}^2 (\mathfrak{A} - 1)(1 + \mathfrak{B})(1 + \mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{B})}{(\mathfrak{A} - 2)^2} + \frac{\varrho \mathfrak{A} (\mathfrak{A} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2\mathfrak{B})}{\mathfrak{A} - 2} + \varrho^2,$$

et qu'on fasse $\lambda = m - \frac{\mathfrak{A}(1 + \mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{B})}{\mathfrak{A} - 2} - \varrho$, d'où le demi-diamètre du champ apparent moyen sera $\varphi = \frac{2n}{2m - \lambda}$; et ensuite les distances de foyer des quatre verres seront:

$$p = P = \frac{m^2 \omega^2}{\mathfrak{N}^2} = \frac{3}{50} m^2 \text{ pouces}, \qquad q = \frac{(\mathfrak{A} - 1) P}{\mathfrak{A}(m + 1 - \lambda)},$$

$$r = \frac{2(\mathfrak{A} - 1)(m - \lambda - \mathfrak{A}\mathfrak{B}) P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(2m - \lambda)(m + \mathfrak{A} - \lambda)}, \qquad s = \frac{2(\mathfrak{A} - 1)(m - \lambda - \mathfrak{A}\mathfrak{B}) P}{m(m + \mathfrak{A} - \lambda)(2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \lambda)},$$

Les distances des verres deviendront:

$$A = \frac{(\mathfrak{A} - 1) P}{\mathfrak{A}}, \qquad B = \frac{(\mathfrak{A} - 1)(1 + \mathfrak{B}) P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m + \mathfrak{A} - \lambda)}, \qquad C = \frac{2(\mathfrak{A} - 1)(m + \mathfrak{A}\mathfrak{B})(m - \lambda - \mathfrak{A}\mathfrak{B}) P}{m\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m + \mathfrak{A} - \lambda)(2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \lambda)},$$

la distance de l'oeil:

$$D = \frac{(\mathfrak{A} - 1)(2m - \lambda)(m - \lambda - \mathfrak{A}\mathfrak{B})}{m^2 (m + \mathfrak{A} - \lambda)(2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \lambda)} P = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(2m - \lambda) C}{2m(m + \mathfrak{A}\mathfrak{B})}, \text{ ou bien } D = \frac{(2m - \lambda) s}{2m}.$$

118. Je remarque ici d'abord que, pour rendre la lunette le plus court qu'il est possible, il faut donner à $\mathfrak{A}$ une valeur qui surpasse tant soit peu 2, et à $\mathfrak{B}$ une valeur fort grande; alors le champ apparent devient fort petit et à moins que la multiplication m ne soit extrêmement grande, la valeur de ϱ devient fort grande, ce qui diminue encore le champ apparent. Si nous posons comme ci-dessus $\mathfrak{A} = 3$ et $\mathfrak{B} = 1$, et que nous prenions $\varrho = 9$, le demi-diamètre du champ apparent sera $\varphi = \frac{2n}{m+18}$, pourvu qu'il soit $m > 42$. Dans ce cas on aura donc $\lambda = m - 23$ et partant les autres déterminations seront:

$$p = P = \frac{3}{50} m^2, \quad q = \frac{2}{57} P, \quad r = \frac{20P}{21(m+18)}, \quad s = \frac{20P}{7m(m-12)},$$

$$A = \frac{2}{3} P, \quad B = \frac{4}{63} P, \quad C = \frac{20(m+3)P}{21m(m-12)}, \quad D = \frac{10(m+18)P}{7m^2(m-12)}.$$

119. Examinons un autre exemple, en posant $\mathfrak{A} = 4$ et $\mathfrak{B} = 2$ et la condition à remplir sera $\varrho m > 126 + 16\varrho + \frac{\varrho^2}{2}$. Posons $\varrho = 9$, et ce cas aura lieu quand $m > 34\frac{1}{2}$. Donc pour ce cas nous aurons $\lambda = m - 23$ et les autres déterminations se trouveront:

$$p = P = \frac{3}{50} m^2, \quad q = \frac{1}{32} P, \quad r = \frac{5P}{12(m+23)}, \quad s = \frac{10P}{3m(m-7)},$$

$$A = \frac{3}{4} P, \quad B = \frac{1}{24} P, \quad C = \frac{5(m+8)P}{12m(m-7)}, \quad D = \frac{5(m+23)P}{3m^2(m-7)},$$

et le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{2n}{m+23}$. Mais lorsque la multiplication est beaucoup plus grande, on peut prendre pour ϱ une plus petite valeur. Ainsi, posant $\varrho = 6$, pour les cas où $m > 43$ on aura $\lambda = m - 20$, et les autres déterminations seront:

$$p = P = \frac{3}{50} m^2, \quad q = \frac{1}{28} P, \quad r = \frac{3P}{8m+20}, \quad s = \frac{3P}{m(m-4)},$$

$$A = \frac{3}{4} P, \quad B = \frac{3}{64} P, \quad C = \frac{3(m+8)P}{8m(m-4)}, \quad D = \frac{3(m+20)P}{2m^2(m-4)}.$$

et le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{2n}{m+20}$.

120. Quand on a principalement en vue le raccourcissement de la lunette, on peut bien mettre $\mathfrak{A} = 2\frac{1}{2}$ et on aura:

$$m > \frac{75(1+\mathfrak{B})(2+3\mathfrak{B})}{2\varrho} + 5(5+6\mathfrak{B}) + 2\varrho \quad \text{et} \quad \lambda = m - \tfrac{5}{2}(2+3\mathfrak{B}) - \varrho.$$

Soit $\mathfrak{B} = 1$, de sorte que $\lambda = m - \frac{25}{2} - \varrho$ et $m > \frac{375}{\varrho} + 55 + 2\varrho$.

Afin que m ne doive être extrêmement grand, posons $\varrho = \frac{15}{2}$, pour avoir $\lambda = m - 20$ et $m > 120$ et $\varphi = \frac{2n}{m+20}$. Or les autres déterminations de la lunette seront:

$$p = P = \frac{3}{50} m^2, \quad q = \frac{1}{35} P, \quad r = \frac{14 P}{15 (m + 20)}, \quad s = \frac{7 p}{3 m (m - 15)},$$

$$A = \frac{3}{5} P, \quad B = \frac{4}{75} P, \quad C = \frac{7 (2m + 5) P}{15 m (m - 15)}, \quad D = \frac{7 (m + 20) P}{6 m^2 (m - 15)}.$$

Ces valeurs sont donc fort propres pour les lunettes qui doivent beaucoup grossir.

121. Or, si l'on veut construire des lunettes qui ne doivent pas beaucoup grossir, il faut donner à $\mathfrak{A}$ des valeurs plus grandes. Ainsi supposant $\mathfrak{A} = 4$, puisque:

$$m > \frac{6 (1 + \mathfrak{B}) (1 + 3 \mathfrak{B})}{\varrho} + 4 + 6 \mathfrak{B} + \frac{\varrho}{2},$$

prenons $\mathfrak{B} = \frac{1}{3}$, et $\varrho = 4$ pour avoir $m > 12$, et nous obtiendrons $\lambda = m - 8$ et le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{2n}{m + 8}$; les autres déterminations seront:

$$p = P = \frac{3}{50} m^2 \text{ pouces}, \quad q = \frac{1}{12} P, \quad r = \frac{5 P}{2 (m + 8)}, \quad s = \frac{10 P}{m (3m - 16)},$$

$$A = \frac{3}{4} P, \quad B = \frac{1}{4} P, \quad C = \frac{5 (3m + 4) P}{2m (3m - 16)}, \quad D = \frac{5 (m + 8) P}{m^2 (3m - 16)}.$$

Cette lunette sera pourtant considérablement plus courte que les ordinaires à 4 verres et a outre cela le même avantage qu'elle représente les objets debout; mais le plus grand avantage qui la rend préférable aux ordinaires, est que le champ apparent est considérablement plus grand. Et, par les mêmes raisons, elle surpasse aussi beaucoup les lunettes à deux verres.

122. Pour les grandes multiplications il est avantageux de donner à $\mathfrak{A}$ une plus petite valeur, pour diminuer d'autant plus la longueur de la lunette, comme nous venons de remarquer dans le § 120. Mais puisque ces déterminations ne sauraient avoir lieu à moins qu'il ne fût $m > 120$, pour de moindres multiplications il faut donner à $\mathfrak{B}$ de plus petites valeurs. Ainsi supposant $\mathfrak{A} = 2\frac{1}{2}$, $\mathfrak{B} = \frac{1}{3}$, $\varrho = 7\frac{1}{2}$, on aura $m > 70$ et $\lambda = m - 15$, donc le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{2n}{m + 15}$, et les autres déterminations seront:

$$p = P = \frac{3}{50} m^2, \quad q = \frac{3}{80} P, \quad r = \frac{102 P}{35 (m + 15)}, \quad s = \frac{51 P}{7m (3m - 40)},$$

$$A = \frac{3}{5} P, \quad B = \frac{24}{175} P, \quad C = \frac{51 (6m + 5) P}{53 m (3m - 40)}, \quad D = \frac{51 (m + 15) P}{14 m^2 (3m - 40)}.$$

Cette lunette devient un peu plus longue que celle du § 120. Car la distance B est ici plus grande. Mais en récompense le champ apparent est ici aussi un peu plus grand. Ces exemples sont suffisants pour faire voir comment on doit construire en chaque cas proposé une lunette qui réponde le mieux à notre intention, tant par rapport au champ apparent qu'à la longueur de la lunette.

Exemple 1.

123. *On demande la construction d'une lunette à quatre verres qui grossisse le diamètre des objets 20 fois.*

Ayant $m = 20$, la distance de foyer de l'objectif doit être 24 pouces et partant $P =$ choisis pour cet effet les formules du § 121, qui donnent d'abord un champ apparent dont le diamètre est $= \frac{2n}{28}$ ou bien de $1^0\,1'22''$ en posant $n = \frac{1}{4}$, et les autres déterminations seront

Distance de foyer du premier oculaire en $B = 2$ pouces,

„ „ du second oculaire en $C = 2\frac{1}{7}$ pouces,

„ „ du troisième oculaire en $D = \frac{3}{11}$ pouces,

Distance de l'objectif au premier oculaire $AB = 18$ pouces,

„ du premier oculaire au second oculaire $BC = 6$ pouces,

„ du second au troisième oculaire $CD = 4\frac{4}{11}$ pouces,

„ du troisième oculaire à l'oeil $DE = \frac{21}{100}$ pouces.

Et partant, la longueur de la lunette est $AD = 28\frac{4}{11}$.

Exemple 2.

124. *On demande la construction d'une lunette qui grossisse le diamètre des objets 40 fois.*

Ayant $m = 40$ l'objectif doit avoir pour sa distance de foyer 96 pouces, de sorte que $P =$ Pour ce cas je poserai $\mathfrak{A} = 3$, $\mathfrak{B} = \frac{1}{2}$; $\varrho = 6$ d'où l'on tire $\lambda = m - 12$, $\varphi = \frac{2n}{m+12}$ et $m >$

$$p = P = \frac{3}{50}m^2, \quad q = \frac{2P}{39}, \quad r = \frac{28P}{15(m+12)}, \quad s = \frac{14P}{5m(m-9)},$$

$$A = \frac{2}{3}P, \quad B = \frac{2}{15}P, \quad C = \frac{24(2m+3)P}{15m(m-9)}, \quad D = \frac{7(m+12)P}{5m^2(m-9)};$$

et partant pour la lunette requise, nous aurons:

Distance de foyer du premier oculaire en $B = 4\frac{12}{13}$ pouces,

„ „ du second oculaire en $C = 3\frac{29}{65}$ pouces,

„ „ du troisième oculaire en $D = \frac{168}{775}$ pouces,

Distance de l'objectif au premier oculaire $AB = 64$ pouces,

„ du premier oculaire au second oculaire $BC = 12\frac{4}{5}$ pouces,

„ du second oculaire au troisième oculaire $CD = 5\frac{773}{775}$ pouces,

„ du troisième oculaire à l'oeil $DE = \frac{546}{3875}$ pouces.

Le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{n}{26} = 34'$, en posant $n = \frac{1}{4}$, et la longueur de cette lunette est $82\frac{618}{775}$.

125. Avant que d'abandonner ce cas des lunettes à quatre verres, je développerai encore plus généralement les formules générales du § 117, et d'abord pour que la valeur de m puisse être prise aussi plus petite, j'observe qu'il faut mettre:

$$\varrho = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}-2}\sqrt{(\mathfrak{A}-1)(1+\mathfrak{B})(1+\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{B})},$$

et mettant ensuite:

$$\varrho m(\mathfrak{A}-2) = \frac{\mathfrak{A}^2(\mathfrak{A}-1)(1+\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{B})}{(\mathfrak{A}-2)^2} + \frac{\varrho\mathfrak{A}(\mathfrak{A}+2\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}-2} + \varrho^2,$$

on en tire la valeur de:

$$\mathfrak{B} = \frac{m^2(\mathfrak{A}-2)^2-(2m-1)\mathfrak{A}^2}{4m\mathfrak{A}(\mathfrak{A}-1)};$$

et partant: $$\varrho = \frac{m^2(\mathfrak{A}-2)^2-\mathfrak{A}^2}{4m(\mathfrak{A}-2)}, \quad \text{et} \quad \lambda = 2m-\tfrac{1}{2}(m-1)\mathfrak{A},$$

d'où le demi-diamètre du champ apparent moyen devient $\varphi = \frac{4n}{(m-1)\mathfrak{A}}$. Puis les autres déterminations se trouveront:

$$p = P = \frac{m^2\omega^2}{d^2} = \frac{3}{50}m^2 \text{ pouces}, \quad q = \frac{2(\mathfrak{A}-1)P}{(m-1)\mathfrak{A}(\mathfrak{A}-2)}, \quad r = \frac{8(\mathfrak{A}-1)P}{m^2(\mathfrak{A}-2)^2-2m\mathfrak{A}^2+\mathfrak{A}^2}, \quad s = \frac{2(\mathfrak{A}-1)P}{m(m-\mathfrak{A})},$$

$$A = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{2(\mathfrak{A}-1)[m(\mathfrak{A}-2)+\mathfrak{A}]P}{\mathfrak{A}[m^2(\mathfrak{A}-2)^2-2m\mathfrak{A}^2+\mathfrak{A}^2]}, \quad C = \frac{2(m-1)^2\mathfrak{A}^2(\mathfrak{A}-1)P}{m[m-\mathfrak{A}][m^2(\mathfrak{A}-2)^2-2m\mathfrak{A}^2+\mathfrak{A}^2]}$$

$$\text{et} \quad D = \frac{(m-1)\mathfrak{A}(\mathfrak{A}-1)P}{2m^2(m-\mathfrak{A})}.$$

Or il faut prendre: $$\mathfrak{A} > \frac{2m(m+\sqrt{2m-1})}{(m-1)^2}.$$

126. Plus on prend grande la valeur de $\mathfrak{A}$ celle de $\mathfrak{B}$ sera diminuée, mais aussi le champ apparent est rétréci et la distance A devient plus grande. Il faut donc dans chaque cas choisir une telle valeur pour $\mathfrak{A}$ qui augmente le champ apparent, sans augmenter trop la distance B. Ainsi, posant $m = 20$, puisque $\mathfrak{A} > \frac{40(20+\sqrt{39})}{19^2}$, on peut prendre $\mathfrak{A} = 3$ et le demi-diamètre du champ apparent sera $\varphi = \frac{4n}{57}$, tant soit peu plus petit que dans le § 123, mais la lunette sera aussi plus longue. Car les déterminations seront:

$$p = P = 24 \text{ pouces}, \quad q = \frac{32}{19}, \quad r = \frac{384}{49}, \quad s = \frac{24}{85},$$

$$A = 16, \quad B = \frac{736}{49}, \quad C = \frac{77976}{4165}, \quad D = \frac{171}{850}.$$

Or on voit par cet exemple, qu'on n'obtient pas par ce moyen la lunette la plus avantageuse, et partant il vaudra mieux de se servir dans chaque cas plutôt des formules particulières développées ci-dessus qui paraîtront les plus convenables. Or, ayant déjà donné quelques exemples, je ne m'arrêterai pas plus long-temps à ce cas qui paraît d'ailleurs mériter un examen plus soigneux.

III. Cas des lunettes à quatre verres, *où $\mathfrak{A}$ est positif, $\mathfrak{B}$ négatif et $\mathfrak{C}$ positif.*

127. Posons donc $-\mathfrak{B}$ pour $+\mathfrak{B}$, et nos formules seront:

$$A = \frac{1+\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}} P, \quad B = \frac{\mathfrak{B}-1}{\mathfrak{B}} Q, \quad C = \frac{1+\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}} R,$$

et posant m pour $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ on aura:

$$D = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{m^2} - \frac{(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} + \frac{(1+\mathfrak{C})R}{\mathfrak{C}^2},$$

et les lunettes de ces cas représenteront les objets debout. Ensuite nous aurons les distances de foyer:

$$p = P, \quad q = \frac{PQ}{P+\mathfrak{A}Q}, \quad r = \frac{QR}{Q-\mathfrak{B}R}, \quad s = \frac{R}{\mathfrak{C}},$$

et les trois valeurs de $\frac{n}{\varphi}$ seront:

$$\text{I.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + 1 + \mathfrak{A},$$

$$\text{II.} \quad \frac{n^I}{\varphi} = -\frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} - \mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1),$$

$$\text{III.} \quad \frac{n^{II}}{\varphi} = -\frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}(1+\mathfrak{C}).$$

128. Ici il est d'abord évident que $\frac{\mathfrak{B}-1}{\mathfrak{B}} Q$ doit être une quantité positive et:

$$\frac{(1+\mathfrak{A})P}{m^2} + \frac{(1+\mathfrak{C})R}{\mathfrak{C}^2} > \frac{(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2},$$

ou bien:

$$\frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}(1+\mathfrak{C}) > \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R},$$

et partant la troisième formule est négative.

Posons donc:

$$\text{III.} \quad \frac{n^{II}}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} - \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} + \mathfrak{A}\mathfrak{B} + m = \frac{m^2 D}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R},$$

et la seconde deviendra:

$$\frac{n^I}{\varphi} = -\frac{m^2 D}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + m + \mathfrak{A} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q}.$$

Mais pour que le champ apparent provienne plus grand, que dans le cas des deux verres, il faut qu'il soit:

$$\frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} > \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}.$$

La seconde formule est positive et nos trois formules, étant rendues positives, seront:

$$\text{I.}\quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + \mathfrak{A} + 1,$$

$$\text{II.}\quad \frac{n^I}{\varphi} = -\frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} - \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A},$$

$$\text{III.}\quad \frac{n^{II}}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} - \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} + \mathfrak{A}\mathfrak{B} + m.$$

129. Les lettres n, n^I, n^{II} marqueront donc des fractions positives ou égales à $\frac{1}{4}$ ou plus petites, et leur combinaison fournit:

$$\frac{n^{II}+n^I-n}{\varphi} = m-1.$$

Il faut donc tâcher de rendre n^I et n^{II} égales à $\frac{1}{4}$, et la valeur de n aussi petite qu'il est possible. Posons donc $n^I = n^{II}$, ce qui donne:

$$\frac{2(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + m = \frac{2\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + \mathfrak{A},$$

ou:

$$\frac{2}{\mathfrak{B}R}\left(\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q - \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}\right) = m + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{A} - \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q},$$

d'où on aura:

$$\mathfrak{B}R = \frac{2Q[\mathfrak{A}^2(\mathfrak{B}-1)Q-(1+\mathfrak{A})P]}{\mathfrak{A}(m+2\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{A})Q-(1+\mathfrak{A})P},$$

et ensuite:

$$\frac{n^I}{\varphi} = \frac{n^{II}}{\varphi} = \frac{m+\mathfrak{A}}{2} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{2\mathfrak{A}Q}.$$

Cette valeur doit être plus grande que $\frac{n}{\varphi}$, ce qui donne $\frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} < m - \mathfrak{A} - 2$.

130. Posons donc $\frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} = m - \mathfrak{A} - \lambda$, de sorte que $\lambda > 2$, et nous aurons pour le temps apparent $\frac{n^I}{\varphi} = m - \frac{\lambda}{2}$, par conséquent $\varphi = \frac{2n^I}{2m-\lambda}$. Ensuite nous aurons:

$$Q = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}(m-\mathfrak{A}-\lambda)}, \qquad R = \frac{2(1+\mathfrak{A})(\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+\lambda)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\lambda)},$$

d'où on voit que $m < \mathfrak{A}\mathfrak{B}+\lambda$ et $m > \mathfrak{A}+\lambda$. Or ayant trouvé ces valeurs de Q et R, nos distances des verres seront:

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}, \qquad B = \frac{(1+\mathfrak{A})(\mathfrak{B}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m-\mathfrak{A}-\lambda)}, \qquad C = \frac{2(1+\mathfrak{A})(m+\mathfrak{A}\mathfrak{B})(\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+\lambda)P}{m\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\lambda)},$$

et la distance de l'oeil:

$$D = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R}{m^2}\cdot\frac{n^I}{\varphi} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R(2m-\lambda)}{2m^2},$$

ou bien:

$$D = \frac{(1+\mathfrak{A})(2m-\lambda)(\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+\lambda)P}{m^2(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\lambda)}.$$

Ensuite les distances de foyer:

$$p = P, \qquad q = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}(m+1-\lambda)}, \qquad r = \frac{2(1+\mathfrak{A})(\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+\lambda)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2m-\lambda)},$$

et enfin:

$$s = \frac{2(1+\mathfrak{A})(\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+\lambda)P}{m(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\lambda)}, \qquad \text{donc} \qquad D = \frac{(2m-\lambda)s}{2m}.$$

131. Mais il reste de remplir ces conditions, qu'il soit:

$$q > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}l}, \qquad r > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}l}, \qquad s > \frac{6\omega}{l},$$

Donc, posant $\frac{\omega}{l} = \frac{1}{50}$ et $P = \frac{3}{50}m^2$, ces conditions donnent:

$$\text{I.} \quad m(1+\mathfrak{A}) > 2(m+1-\lambda) \quad \text{ou} \quad m\mathfrak{A} > m+2-2\lambda,$$

$$\text{II.} \quad m\mathfrak{A}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\mathfrak{B}+\lambda) > (\mathfrak{A}+3)m^2 - 2m\mathfrak{A} - 4\lambda m + \lambda\mathfrak{A} + \lambda^2,$$

$$\text{III.} \quad m\mathfrak{A}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{B}+\lambda) > (\mathfrak{A}+1)m^2 - 2\mathfrak{A}^2\mathfrak{B} - 2\lambda\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \lambda\mathfrak{A} - \lambda^2;$$

la première se remplit d'elle même et les deux autres soyent remplies en sorte:

$$m\mathfrak{A}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\lambda) = (\mathfrak{A}+3)m^2 - m\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2m\mathfrak{A} - 4\lambda m + \lambda\mathfrak{A} + \lambda^2 + \zeta,$$

$$m\mathfrak{A}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\lambda) = (\mathfrak{A}+1)m^2 + m\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2\mathfrak{A}^2\mathfrak{B} - 2\lambda\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \lambda\mathfrak{A} - \lambda^2 + \eta,$$

prenant pour ζ et η des quantités positives, d'où l'on tire:

$$\zeta - \eta + 2(m-\lambda-\mathfrak{A})(m-\lambda-\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = 0.$$

132. Mais nous avons vu que $m > \lambda + \mathfrak{A}$ et $m < \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \lambda$, donc $\zeta - \eta > 0$, et partant, si nous posons $\eta = o$ ou que nous remplissions la dernière condition, l'autre sera remplie d'elle-même. Posons donc comme auparavant $\lambda = m - \nu$, et la dernière condition donne:

$$m\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\mathfrak{A}+1) > \nu m\mathfrak{A} - m\mathfrak{A} + 2\nu m - 2\mathfrak{A}^2\mathfrak{B} + 2\nu\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \nu\mathfrak{A} - \nu^2,$$

d'où le cas $m = \infty$ donne $\nu < \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\mathfrak{B}+1)}{\mathfrak{A}+2}$. Soit donc de plus $\nu = \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\mathfrak{B}+1)}{\mathfrak{A}+2} - \pi$, et il est requis:

$$\pi m(\mathfrak{A}+2) > \frac{\mathfrak{A}^2(\mathfrak{A}+1)(\mathfrak{B}-1)\mathfrak{A}\mathfrak{B}+3\mathfrak{B}-1)}{(\mathfrak{A}+2)^2} - \frac{\pi\mathfrak{A}(\mathfrak{A}+2\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}+2} - \pi^2.$$

On aura donc:

$$\lambda = m - \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\mathfrak{B}+1)}{\mathfrak{A}+2} - \pi \qquad \text{et} \qquad \varphi = \frac{2n}{m + \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\mathfrak{B}+1)}{\mathfrak{A}+2} + \pi},$$

et outre cela:

$$\frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\mathfrak{B}+1)}{\mathfrak{A}+2} + \pi > \mathfrak{A} \quad \text{et} \quad < \mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

d'où l'on aura:

$$\frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{A}+1)(\mathfrak{B}-1)}{\mathfrak{A}+2} + \pi > 0 \qquad \text{et} \qquad \pi < \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)}{\mathfrak{A}+2},$$

de sorte que la première se remplit d'elle-même, à cause de $\pi > 0$, si $\mathfrak{B} > 1$.

133. On découvre ici d'abord un cas aussi remarquable qu'avantageux, si l'on met $\mathfrak{B} = 1$, car alors toutes les conditions requises se remplissent en posant $\pi = 0$ et on aura:

$$\lambda = m - \mathfrak{A} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{2n}{m + \mathfrak{A}};$$

le champ apparent deviendra plus grand plus qu'on prendra petite la valeur de $\mathfrak{A}$. Mais pour trouver les déterminations il faut bien considérer qu'on aura $Q = \infty$ et $(\mathfrak{B} - 1)\, Q = B$. D'où on tire:

$$\mathfrak{B} R = \frac{2\, Q\, [\mathfrak{A}^2 B - (1 + \mathfrak{A}) P]}{\mathfrak{A}\, (m + \mathfrak{A})\, Q} \quad \text{donc} \quad R = \frac{2\, [\mathfrak{A}^2 B - (1 + \mathfrak{A}) P]}{\mathfrak{A}\, (m + \mathfrak{A})},$$

et partant:

$$A = \frac{(1 + \mathfrak{A}) P}{\mathfrak{A}}, \quad B = B, \quad C = \frac{2\, [\mathfrak{A}^2 B - (1 + \mathfrak{A}) P]}{m \mathfrak{A}},$$

$$p = P, \quad q = \frac{P}{\mathfrak{A}}, \quad r = \frac{2\, [\mathfrak{A}^2 B - (1 + \mathfrak{A}) P]}{\mathfrak{A}\, (m + \mathfrak{A})}, \quad s = \frac{2\, [\mathfrak{A}^2 B - (1 + \mathfrak{A}) P]}{m\, (m + \mathfrak{A})}$$

$$\text{et} \quad D = \frac{\mathfrak{A}^2 B - (1 + \mathfrak{A}) P}{m^2}.$$

Or puisque $s > \frac{6\omega}{l}$, il faut qu'il soit:

$$B > \frac{3m}{50 \mathfrak{A}^2} (2m + m\mathfrak{A} + \mathfrak{A}) \quad \text{ou} \quad B > \frac{(2m + m\mathfrak{A} + \mathfrak{A}) P}{m \mathfrak{A}^2} \quad \text{et} \quad m > \mathfrak{A} + 2 \quad \text{ou} \quad \mathfrak{A} < m - 2.$$

134. Donc pour que la distance B devienne la plus petite, posons:

$$B = \frac{(2m + m\mathfrak{A} + \mathfrak{A}) P}{m \mathfrak{A}^2}, \quad \text{et à cause de} \quad \mathfrak{A}^2 B - (1 + \mathfrak{A}) P = \frac{(m + \mathfrak{A}) P}{m},$$

nous aurons:

$$A = \frac{(1 + \mathfrak{A}) P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{(2m + m\mathfrak{A} + \mathfrak{A}) P}{m \mathfrak{A}^2} \quad C = \frac{2\, (m + \mathfrak{A}) P}{m^2 \mathfrak{A}} \quad D = \frac{(m + \mathfrak{A}) P}{m^3},$$

$$p = P, \quad q = \frac{P}{\mathfrak{A}}, \quad r = \frac{2P}{m \mathfrak{A}}, \quad s = \frac{2P}{m^2} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{2n}{m + \mathfrak{A}}.$$

Or il est clair, que plus on prend $\mathfrak{A}$ petit, plus le champ apparent sera augmenté, mais la longueur de la lunette devient plus grande; or elle deviendra la plus petite, si l'on prend $\mathfrak{A} = m - 2$, et le champ apparent le plus petit $\varphi = \frac{n}{m - 1}$, qui est pourtant encore plus grand qu'au cas des deux verres. Soit donc $\mathfrak{A} = m - 2$ et les autres déterminations seront:

$$A = \frac{m - 1}{m - 2} P, \quad B = \frac{(m - 1)(m + 2)}{m\, (m - 2)^2} P, \quad C = \frac{4\, (m - 1)}{m^2 (m - 2)} P, \quad D = \frac{2\, (m - 1)}{m^3} P,$$

$$p = P, \quad q = \frac{P}{m - 2}, \quad r = \frac{2P}{m\, (m - 2)}, \quad s = \frac{2P}{m^2}, \quad \varphi = \frac{n}{m - 1}.$$

135. La construction commune des lunettes à quatre verres est aussi renfermée dans ce cas $\mathfrak{B} = 1$; on n'à qu'à supposer que $q = r$, d'où l'on tire $B = \frac{m + 3\mathfrak{A} + 2}{2 \mathfrak{A}^2} P$, et les déterminations de la lunette seront:

$$p = P = \frac{3}{50} m^2, \quad q = \frac{P}{\mathfrak{A}}, \quad r = \frac{P}{\mathfrak{A}} \text{ et } s = \frac{P}{m}, \text{ et } \varphi = \frac{2n}{m + \mathfrak{A}},$$

$$A = \frac{1 + \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}} P, \quad B = \frac{m + 3\mathfrak{A} + 2}{2\mathfrak{A}^2} P, \quad C = \frac{m + \mathfrak{A}}{m\mathfrak{A}} P, \quad D = \frac{m + \mathfrak{A}}{2m^2} P.$$

Or pour $\mathfrak{A}$ qui doit être $< m - 1$, il semble qu'on ait choisi la valeur qui produit le moindre champ apparent et cela peut être pour raccourcir la lunette. Car posant $\mathfrak{A} = m - 2$, il résulte la construction commune des lunettes à 4 verres que voilà:

$$p = P = \frac{3}{50} m^2 \text{ pouces}, \quad q = \frac{P}{m - 2}, \quad r = \frac{P}{m - 2}, \quad s = \frac{P}{m} \text{ et } \varphi = \frac{n}{m - 1},$$

$$A = \frac{m - 1}{m - 2} P, \quad B = \frac{2(m - 1)}{(m - 2)^2} P, \quad C = \frac{2(m - 1)}{m(m - 2)} P, \quad D = \frac{m - 1}{m^2} P.$$

Mais outre que rien n'oblige à faire $r = q$, on peut aussi donner à la lunette un peu plus de longueur, pour procurer un plus grand champ apparent.

136. Soit p. ex. $\mathfrak{A} = \frac{m - 2}{2}$, et les déterminations du cas $q = r$ seront:

$$p = P = \frac{3}{50} m^2, \quad q = \frac{2P}{m - 2}, \quad r = \frac{2P}{m - 2}, \quad s = \frac{P}{m} \text{ et } \varphi = \frac{4n}{3m - 2},$$

$$A = \frac{m}{m - 2} P, \quad B = \frac{5m - 2}{(m - 2)^2} P, \quad C = \frac{(3m - 2)}{m(m - 2)} P, \quad D = \frac{3m - 2}{4m^2} P,$$

où la longueur de la lunette est:

$$A + B + C = \frac{m^3 + 6m^2 - 10m + 4}{m(m - 2)^2} P,$$

qui est dans le cas précédent:

$$A + B + C = \frac{m^3 + m^2 - 6m + 4}{m(m - 2)^2} P,$$

de sorte que l'excès de celle-ci est seulement:

$$= \frac{5mm - 4m}{m(m - 2)^2} P = \frac{5m - 4}{(m - 2)^2} P,$$

pendant que le diamètre du champ apparent est à celui-là comme $4m - 4$ à $3m - 2$ ou à peu près d'un tiers plus grand; et la différence dans la longueur s'évanouit, si la multiplication m est fort grande. Mais on peut mettre en général $\mathfrak{A} = \frac{m - 2}{\nu}$, marquant par ν un nombre quelconque plus grand que l'unité. De là on aura les déterminations suivantes:

$$p = P = \frac{3}{50} m^2, \quad q = \frac{\nu P}{m - 2}, \quad r = \frac{\nu P}{m - 2}, \quad s = \frac{P}{m} \text{ et } \varphi = \frac{2\nu n}{(\nu + 1)m - 2},$$

$$A = \frac{m - 2 + \nu}{m - 2} P, \quad B = \frac{(\nu + 3)m + 2(\nu - 3)}{2(m - 2)^2} \nu P, \quad C = \frac{(\nu + 1)m - 2}{m(m - 2)} P, \quad D = \frac{(\nu + 1)m - 2}{2\nu m^2} P,$$

où la longueur de la lunette est:

$$A + B + C = \frac{2m^3 + (\nu^2 + 7\nu - 6)m^2 + 2\nu(\nu - 7)m + 8}{2m(m - 2)^2} P,$$

surpasse celle du cas $\nu = 1$ de la quantité:

$$\frac{(\nu^2 + 7\nu - 8)\, m^2 + 2\,(\nu^2 - 7\nu + 6)\, m}{2m\,(m-2)^2}\, P = \frac{(\nu - 1)\,[(\nu + 8)\, m + 2\,(\nu - 6)]}{2\,(m-2)^2}\, P.$$

137. Ce cas $q = r$ fournit la commodité, si c'en est une, que les deux premiers oculaires sont égaux et qu'on peut employer pour le troisième le même oculaire, que la lunette à deux verres l'objectif étant le même, on peut aussi dans ce cas obtenir le même champ apparent qu'en général, sans supposer $q = r$. Mais on allonge de cette manière sans nécessité la lunette, et l'hypothèse la plus avantageuse est sans doute si l'on met $B = \frac{(2m + m\mathfrak{A} + \mathfrak{A})\, P}{m\mathfrak{A}^2}$. Qu'on prenne donc $\mathfrak{A} = \frac{m-2}{\nu}$, posant $\nu > 1$, et les déterminations seront:

$$p = P = \frac{3}{50}\, m^2, \quad q = \frac{\nu P}{m-2}, \quad r = \frac{2\nu P}{m\,(m-2)}, \quad s = \frac{2P}{m^2} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{2\nu n}{(\nu+1)\, m - 2},$$

$$A = \frac{(m + \nu - 2)\, P}{m-2}, \quad B = \frac{\nu\,[m^2 + (2\nu - 1)\, m - 2]\, P}{m\,(m-2)^2}, \quad C = \frac{2\,[(\nu+1)\, m - 2]\, P}{m^2\,(m-2)}, \quad D = \frac{[(\nu+1)\, m - 2]\, P}{\nu m^3},$$

d'où on trouve la longueur de la lunette:

$$A + B + C = \frac{m^4 + 2\,(\nu - 2)\, m^3 + (2\nu^2 - \nu + 6)\, m^2 - 2\,(3\nu + 4)\, m + 8}{m^2\,(m-2)^2}\, P,$$

qui est plus petite que la précédente de la quantité:

$$\frac{(\nu+1)\,(\nu+2)\, m^3 - 2\,(\nu^2 + 6\nu + 6)\, m^2 + 12\,(\nu + 2)\, m - 16}{2m^2\,(m-2)^2}\, P = \frac{[(\nu+1)\, m - 2]\,[(\nu+2)\, m - 4]}{2m^2\,(m-2)}\, P.$$

Il est clair que on a la commodité que le dernier oculaire demeure toujours le même, puisqu'à cause de $P = \frac{3}{50}\, m^2$ on a $s = \frac{6}{50} = 0{,}12$ pouces.

138. Quoique je n'aie développé que le cas $\mathfrak{B} = 1$, puisqu'il est le plus avantageux, je n'ai pas besoin de m'arrêter aux autres cas où $\mathfrak{B} > 1$. Car alors il faudrait qu'il fût $m > \lambda + \mathfrak{A}$, et partant le demi-diamètre du champ apparent deviendrait plus petit que $\frac{2n}{m + \mathfrak{A}}$; ce qui renfermerait une imperfection considérable. D'ailleurs, si nous regardons la longueur de la lunette, la seconde espèce l'emporte bien sur celle-ci, vu qu'elle fournit non seulement un aussi grand champ apparent, mais qu'elle réduit la lunette à une longueur beaucoup plus petite, qui souvent n'excède pas même la moitié. Or on peut remarquer ici en général que, toutes les fois que la lettre $\mathfrak{A}$ est positive, la longueur de la lunette devient fort considérable; car la distance de l'objectif au premier oculaire vaut déjà $A = \frac{(1 + \mathfrak{A})\, P}{\mathfrak{A}}$, et partant plus grande que P, sans conter les autres distances B, C; tandis que les cas où $\mathfrak{A}$ est négatif, fournissent des lunettes dont la longueur tout entière est au-dessous de P.

*

IV. Cas des lunettes à quatre verres, *où $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont positifs, mais $\mathfrak{C}$ négatif.*

139. Cette espèce représente encore les objets debout, et si nous posons $-\mathfrak{C}$, au lieu de $+\mathfrak{C}$, nos formules seront:

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}}, \quad C = \frac{(\mathfrak{C}-1)R}{\mathfrak{C}} = \frac{(m-\mathfrak{A}\mathfrak{B})R}{m}.$$

Ensuite on aura:

$$D = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{m^2} + \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} - \frac{(\mathfrak{C}-1)R}{\mathfrak{C}^2},$$

donc à cause de $(\mathfrak{C}-1)$ positif, il faut qu'il soit:

$$(1+\mathfrak{A})P + \mathfrak{A}^2(1+\mathfrak{B})Q > \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2(\mathfrak{C}-1)R \quad \text{ou} \quad > \mathfrak{A}\mathfrak{B}(m-\mathfrak{A}\mathfrak{B})R.$$

Ensuite nous avons:

$$p = P, \quad q = \frac{PQ}{P+\mathfrak{A}Q}, \quad r = \frac{QR}{Q+\mathfrak{B}R}, \quad s = \frac{R}{\mathfrak{C}},$$

et les trois valeurs de $\frac{n}{\varphi}$ seront:

$$\text{I.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + 1 + \mathfrak{A},$$

$$\text{II.} \quad \frac{n^I}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + \mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

$$\text{III.} \quad \frac{n^{II}}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} + \mathfrak{A}\mathfrak{B} - m = \frac{m^2D}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R}.$$

140. Si R est positif et partant le dernier oculaire concave, toutes ces trois formules sont positives, et puisque:

$$\frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} + \mathfrak{A}\mathfrak{B} > m,$$

la seconde donne $\frac{n^I}{\varphi} > m + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + \mathfrak{A}$, et partant on aurait $\varphi < \frac{n}{m}$; donc puisque le champ apparent serait plus petit qu'au cas des deux verres, j'exclus d'abord ce cas. Soit donc R négatif et partant $\mathfrak{C} < 1$ ou $m < \mathfrak{A}\mathfrak{B}$; et posant $-R$ au lieu de $+R$, nous aurons:

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}; \quad B = \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}}, \quad C = \frac{(\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m)R}{m}, \quad r = \frac{QR}{\mathfrak{B}R-Q}, \quad s = \frac{R}{\mathfrak{C}}$$

$$\text{et} \quad D = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{m^2} + \frac{(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} - \frac{(1-\mathfrak{C})R}{\mathfrak{C}^2}.$$

$$\text{I.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + 1 + \mathfrak{A}. \qquad \text{II.} \quad \frac{n^I}{\varphi} = -\frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} - \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + \mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}.$$

$$\text{III.} \quad \frac{n^{II}}{\varphi} = m + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}.$$

il faut qu'il soit:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} > \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R},$$

pour augmenter le champ apparent.

141. De là nous tirons d'abord $\frac{n^I + n^{II} - n}{\varphi} = m - 1$, et partant il faut rendre $n^{II} = n^I$ plus petit que n^I, d'où il s'ensuit:

$$m + \frac{2(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{2\mathfrak{A}(1+\mathfrak{B})Q}{\mathfrak{B}R} = \mathfrak{A} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q},$$

$$\mathfrak{B}R = \frac{2Q[(1+\mathfrak{A})P + \mathfrak{A}^2(1+\mathfrak{B})Q]}{\mathfrak{A}(2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A} - m)Q + (1+\mathfrak{A})P},$$

de là on obtient:

$$\frac{n^I}{\varphi} = \frac{n^{II}}{\varphi} = \frac{m+\mathfrak{A}}{2} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{2\mathfrak{A}Q},$$

puisque cette valeur doit être plus grande que $\frac{n}{\varphi}$, on aura:

$$\frac{m+\mathfrak{A}}{2} > 1 + \mathfrak{A} + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{2\mathfrak{A}Q}, \quad \text{ou} \quad \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} < m - \mathfrak{A} - 2;$$

donc il faut qu'il soit $m > \mathfrak{A} + 2$ ou $\mathfrak{A} < m - 2$; outre cela il faut avoir égard à cette condition $m < \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ donc $\mathfrak{A}\mathfrak{B} > \mathfrak{A} + 2$ ou $\mathfrak{B} > \frac{\mathfrak{A}+2}{\mathfrak{A}}$.

142. Posons donc $\frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} = m - \mathfrak{A} - \lambda$, de sorte que $\lambda > 2$, et nous aurons $\frac{n^I}{\varphi} = m - \frac{1}{2}\lambda$, par conséquent le demi-diamètre du champ apparent sera $\varphi = \frac{2n^I}{2m-\lambda}$. Or ayant maintenant $Q = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}(m-\mathfrak{A}-\lambda)}$, cette valeur substituée donne $R = \frac{2(1+\mathfrak{A})(m+\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\lambda)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\lambda)}$. Et de là les distances des verres proviennent:

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{(1+\mathfrak{A})(1+\mathfrak{B})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m-\mathfrak{A}-\lambda)}, \quad C = \frac{2(1+\mathfrak{A})(\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m)(m+\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\lambda)P}{m\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\lambda)}$$

$$\text{et} \quad D = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R}{m^2} \cdot \frac{n^I}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})(2m-\lambda)(m+\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\lambda)P}{m^2(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\lambda)},$$

et les distances de foyer:

$$p = P, \quad q = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}(m+1-\lambda)}, \quad r = \frac{2(1+\mathfrak{A})(m+\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\lambda)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2m-\lambda)},$$

et enfin:

$$s = \frac{2(1+\mathfrak{A})(m+\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\lambda)P}{m(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\lambda)}, \quad \text{donc} \quad D = \frac{(2m-\lambda)}{2m}s.$$

Il reste donc à remplir ces conditions qu'il soit:

$$q > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}l}, \quad r > \frac{6m\omega}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}l} \quad \text{et} \quad s > \frac{6\omega}{l},$$

cependant, si nous posons $\frac{\omega}{l} = \frac{1}{50}$, à cause de $P = \frac{3}{50}m^2$, nous aurons $\frac{6\omega}{l} = \frac{2P}{m^2}$, et nos conditions seront:

$$q > \frac{2P}{m\mathfrak{A}}, \quad r > \frac{2P}{m\mathfrak{A}\mathfrak{B}}, \quad s > \frac{2P}{m^2}.$$

143. Nous devons donc satisfaire à ces conditions:

$$\text{I.}\quad \frac{m(1+\mathfrak{A})}{m+1-\lambda} > 2.$$

$$\text{II.}\quad \frac{m(1+\mathfrak{A})(m+\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\lambda)}{(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2m-\lambda)} > 1.$$

$$\text{III.}\quad \frac{m(1+\mathfrak{A})(m+\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\lambda)}{(m-\mathfrak{A}-\lambda)(2\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\lambda)} > 1.$$

Or puisque $\mathfrak{A}\mathfrak{B} > m$, il s'ensuit $2\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \lambda > 2m - \lambda$, et partant la troisième formule est moindre que la seconde, d'où il suffit de remplir la troisième et la seconde sera d'autant plus remplie. On aura donc:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} > \frac{\lambda^2 + \lambda m\mathfrak{A} + \lambda\mathfrak{A} - m^2(\mathfrak{A}+1)}{2\lambda + m\mathfrak{A} + 2\mathfrak{A} - m},$$

et partant:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} - m > \frac{(\lambda + m\mathfrak{A} + \mathfrak{A})(\lambda - 2m)}{2\lambda + m\mathfrak{A} + 2\mathfrak{A} - m},$$

ce qui est toujours vrai à cause de $\lambda < 2m$.

144. Or λ doit être plus petit que $m - \mathfrak{A}$; donc si nous posons $\lambda = m - \mathfrak{A} - \pi$, nous aurons

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} > \frac{\pi^2 + \pi\mathfrak{A} - \pi m(2+\mathfrak{A}) - m\mathfrak{A}(1+\mathfrak{A})}{m(1+\mathfrak{A}) - 2\pi},$$

et si nous posons:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \frac{\pi^2 + \pi\mathfrak{A} - \pi m(2+\mathfrak{A}) - m\mathfrak{A}(1+\mathfrak{A})}{m(1+\mathfrak{A}) - 2\pi} + \varrho,$$

puisque $\mathfrak{A}\mathfrak{B} - m$ doit être une quantité positive, il faut qu'il soit:

$$\varrho > \frac{(m+\mathfrak{A}+\pi)[m(1+\mathfrak{A}) - \pi]}{m(1+\mathfrak{A}) - 2\pi}.$$

Or, à cause de $\varphi = \frac{2n}{m+\mathfrak{A}+\pi}$, il faut prendre π aussi petit qu'il est possible pour augmenter le champ apparent; cependant si l'on prend π trop petit, à cause de $m - \mathfrak{A} - \lambda = \pi$, la longueur de la lunette deviendrait énorme. Outre cela, puisque $\frac{m(1+\mathfrak{A})}{m+1-\lambda} > 2$, il faut prendre $\pi < \frac{m}{2}(\mathfrak{A}+1)$ ou $\mathfrak{A} + 1 > \frac{2\pi}{m-2}$; ensuite puisque $\lambda > 2$, on aura $m - \mathfrak{A} - \pi > 2$ et $\mathfrak{A} < m - \pi - 2$. On prendra donc pour $\mathfrak{A}$ et π des valeurs convenables, et posant $\varrho = \frac{(m+\mathfrak{A}+\pi)[m(1+\mathfrak{A}) - \pi]}{m(1+\mathfrak{A}) - 2\pi}$, on aura $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = m + \nu$ et $\mathfrak{B} = \frac{m+\nu}{\mathfrak{A}}$; $\lambda = m - \mathfrak{A} - \pi$; donc $\varphi = \frac{2n}{m+\mathfrak{A}+\pi}$; $1 + \mathfrak{B} = \frac{m+\mathfrak{A}+\nu}{\mathfrak{A}}$; $m - \mathfrak{A} - \lambda = \pi$; $\mathfrak{A}\mathfrak{B} - m = \nu$; $m + \mathfrak{A}\mathfrak{B} - \lambda = m + \nu + \mathfrak{A} + \pi$; $2\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \lambda = m + 2\nu + \mathfrak{A} + \pi$; $2m - \lambda = m + \mathfrak{A} + \pi$.

145. Prenant donc $\mathfrak{A}$ et π en sorte que le champ apparent devienne si grand qu'on souhaite et qu'il soit $\mathfrak{A} < m - \pi - 2$, et $\mathfrak{A} + 1 > \frac{2\pi}{m-2}$, et donnant a ν aussi une valeur quelconque positive, les déterminations de la lunette seront:

$$q = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{A}+\pi)}, \quad r = \frac{2(1+\mathfrak{A})(m+\nu+\mathfrak{A}+\pi)P}{\pi(m+\nu)(m+\mathfrak{A}+\pi)}, \quad s = \frac{2(1+\mathfrak{A})(m+\nu+\mathfrak{A}+\pi)P}{\pi m(m+2\nu+\mathfrak{A}+\pi)},$$

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{(1+\mathfrak{A})(m+\mathfrak{A}+\nu)P}{\pi\mathfrak{A}(m+\nu)}, \quad C = \frac{2(1+\mathfrak{A})\nu(m+\nu+\mathfrak{A}+\pi)P}{\pi m(m+\nu)(m+2\nu+\mathfrak{A}+\pi)}$$

$$\text{et} \quad D = \frac{(1+\mathfrak{A})(m+\mathfrak{A}+\pi)(m+\nu+\mathfrak{A}+\pi)}{\pi m^2(m+2\nu+\mathfrak{A}+\pi)}P \quad \text{enfin} \quad \varphi = \frac{2n}{m+\mathfrak{A}+\pi}.$$

Si l'on met $\nu = o$, l'intervalle entre les deux derniers oculaires C, s'évanouit et ces deux verres deviennent égaux, savoir $r = s = \frac{2(1+\mathfrak{A})P}{\pi m}$; ils tiennent alors lieu d'un seul, dont la distance de foyer n'est que la moitié; mais puisqu'ils admettent une plus grande ouverture, c'est de là que l'avantage d'un plus grand champ apparent résulte; car d'ailleurs c'est le cas de la première espèce des lunettes à trois verres.

146. Il y a dans cette espèce un cas bien remarquable, qui résulte en posant $\nu = \infty$; car alors les déterminations se réduisent aux formes suivantes:

$$p = P, \quad q = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}(1+\mathfrak{A}+\pi)}, \quad r = \frac{2(1+\mathfrak{A})P}{\pi(m+\mathfrak{A}+\pi)}, \quad s = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\pi m},$$

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\pi\mathfrak{A}}, \quad C = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\pi m}, \quad D = \frac{(1+\mathfrak{A})(m+\mathfrak{A}+\pi)P}{2\pi m^2},$$

et le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{2n}{m+\mathfrak{A}+\pi}$. Qu'on suppose par exemple $\mathfrak{A} = 2$; et $\pi = 1$, et on aura:

$$p = P, \quad q = \frac{3}{14}P, \quad r = \frac{3P}{2(m+6)}, \quad s = \frac{3P}{4m}, \quad \varphi = \frac{2n}{m+6},$$

$$A = \frac{3}{2}P, \quad B = \frac{3}{8}P, \quad C = \frac{3}{4m}P, \quad D = \frac{3(m+6)}{8m^2}P.$$

Mais ces lunettes, où m doit être plus grand que 8, deviennent trop longues par rapport à l'avantage qu'on en retire, et puisqu'on peut obtenir le même avantage par des lunettes beaucoup plus courtes; il ne serait pas à propos d'employer cette espèce; je m'en vais donc examiner l'espèce suivante.

V. Cas des lunettes à quatre verres,

où les deux nombres $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont négatifs et $\mathfrak{C}$ positif.

147. Cette espèce représentera les objets renversés. Posons donc dans nos formules générales $-\mathfrak{A}$ et $-\mathfrak{B}$ au lieu de $+\mathfrak{A}$ et $+\mathfrak{B}$, et nous aurons:

$$A = \frac{\mathfrak{A}-1}{\mathfrak{A}}P, \quad B = \frac{\mathfrak{B}-1}{\mathfrak{B}}Q, \quad C = \frac{1+\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}R,$$

pour l'oeil:

$$D = -\frac{(\mathfrak{A}-1)P}{m^2} - \frac{(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} + \frac{(1+\mathfrak{C})R}{\mathfrak{C}^2}.$$

Il faut donc qu'il soit $\mathfrak{A} > 1$, $(\mathfrak{B} - 1) Q > 1$ et:

$$(\mathfrak{A} - 1) P + \mathfrak{A}^2 (\mathfrak{B} - 1) Q < \mathfrak{A}^2 \mathfrak{B}^2 (1 + \mathfrak{C}) R \text{ ou } < \mathfrak{A}\mathfrak{B} (m + \mathfrak{A}\mathfrak{B}) R;$$

ensuite:
$$p = P, \quad q = \frac{PQ}{P - \mathfrak{A} Q}, \quad r = \frac{QR}{Q - \mathfrak{B} R}, \quad s = \frac{R}{\mathfrak{C}} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B} R}{m},$$

et les valeurs de $\frac{n}{\varphi}$;

$$\text{I.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A} - 1) P}{\mathfrak{A} Q} - \mathfrak{A} + 1.$$

$$\text{II.} \quad \frac{n^I}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A} - 1) P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B} R} - \frac{(\mathfrak{A} - 1) P}{\mathfrak{A} Q} + \frac{\mathfrak{A} (\mathfrak{B} - 1) Q}{\mathfrak{B} R} + \mathfrak{A} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}.$$

$$\text{III.} \quad \frac{n^{II}}{\varphi} = - \frac{(\mathfrak{A} - 1) P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B} R} - \frac{\mathfrak{A} (\mathfrak{B} - 1) Q}{\mathfrak{B} R} + \mathfrak{A}\mathfrak{B} + m.$$

148. Pour augmenter le champ apparent au-delà des lunettes à deux verres, il faut qu'il soit

$$\frac{(\mathfrak{A} - 1) P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B} R} + \frac{\mathfrak{A} (\mathfrak{B} - 1) Q}{\mathfrak{B} R} > \mathfrak{A}\mathfrak{B} \quad \text{et} \quad < \mathfrak{A}\mathfrak{B} + m,$$

et alors ces trois formules fournissent cette égalité:

$$\frac{n + n^I + n^{II}}{\varphi} = m + 1, \quad \text{et partant} \quad \varphi = \frac{n + n^I + n^{II}}{m + 1}.$$

Donc le plus grand champ apparent qu'on puisse obtenir est lorsque chaque lettre n, n^I, n^{II} reçoit la plus grande valeur dont elle est susceptible, savoir $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$ au moins. Le meilleur moyen est donc de les rendre égales entr'elles, pour qu'il en résulte $\varphi = \frac{3n}{m + 1}$, de sorte que dans ce cas le demi-diamètre du champ apparent devient trois fois plus grand qu'au cas des deux verres. On posant $n = n^I = n^{II}$, on aura $\frac{n}{\varphi} = \frac{m + 1}{3}$; d'où l'on tire:

$$Q = \frac{3 (\mathfrak{A} - 1) P}{\mathfrak{A} (m + 3\mathfrak{A} - 2)}, \quad \text{et} \quad R = \frac{3 (\mathfrak{A} - 1) (m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2) P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B} (m + 3\mathfrak{A} - 2) (2m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 1)};$$

ou bien:
$$\frac{Q}{P} = \frac{3 (\mathfrak{A} - 1)}{\mathfrak{A} (m + 3\mathfrak{A} - 2)} \quad \text{et} \quad \frac{R}{Q} = \frac{m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2}{\mathfrak{B} (2m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 1)}.$$

149. De là on trouve les autres déterminations:

$$A = \frac{(\mathfrak{A} - 1) P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{3 (\mathfrak{A} - 1) (\mathfrak{B} - 1) P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B} (m + 3\mathfrak{A} - 2)}, \quad C = \frac{3 (\mathfrak{A} - 1) (m + \mathfrak{A}\mathfrak{B}) (m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2) P}{m \mathfrak{A}\mathfrak{B} (m + 3\mathfrak{A} - 2) (2m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 1)},$$

$$\text{et} \quad D = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B} R}{m^2} \cdot \frac{m + 1}{3} = \frac{(m + 1) (\mathfrak{A} - 1) (m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2) P}{m^2 (m + 3\mathfrak{A} - 2) (2m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 1)},$$

$$p = P, \quad q = \frac{3 (\mathfrak{A} - 1) P}{\mathfrak{A} (m + 1)}, \quad r = \frac{3 (\mathfrak{A} - 1) (m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2) P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B} (m + 1) (m + 3\mathfrak{A} - 2)}, \quad s = \frac{3 (\mathfrak{A} - 1) (m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2) P}{m (m + 3\mathfrak{A} - 2) (2m + 3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 1)}.$$

Mais il faut de plus qu'il soit $q > \frac{2P}{m\mathfrak{A}}$, $r > \frac{2P}{m\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$, $s > \frac{2P}{m^2}$; ou bien:

$$\text{I.}\quad \frac{3(\mathfrak{A}-1)}{m+1} > \frac{2}{m}.$$

$$\text{II.}\quad \frac{3(\mathfrak{A}-1)(m+3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2)}{(m+1)(m+3\mathfrak{A}-2)} > \frac{2}{m}.$$

$$\text{III.}\quad \frac{3(\mathfrak{A}-1)(m+3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2)}{(m+3\mathfrak{A}-2)(2m+3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-1)} > \frac{2}{m}.$$

Puisque $\mathfrak{B} > 1$, la seconde formule est plus grande que la première, de sorte qu'il suffit de remplir celle-ci qui donne $\mathfrak{A} > \frac{5m+2}{3m}$. Donc, si nous posons $\mathfrak{A} = 2$, la troisième donne $\mathfrak{B} > \frac{m^2-20m-8}{6(m-8)}$.

150. Si nous avions pris $\mathfrak{A}$ plus grand, la valeur de $\mathfrak{B}$ serait devenue plus petite et même égale à l'unité, auquel cas la distance B s'évanouirait. Mais il faut remarquer, qu'en augmentant la valeur de $\mathfrak{A}$, la distance A et partant la longueur de la lunette devient plus grande, d'où il convient de donner à $\mathfrak{B}$ la plus grande valeur qui soit possible. Pour cet effet posons $\mathfrak{B} = \infty$ et puisque la seconde formule s'accomplit d'elle-même, il ne reste qu'à satisfaire à la première et à la troisième:

$$\text{I.}\quad \frac{3(\mathfrak{A}-1)}{m+1} > \frac{2}{m} \quad \text{et} \quad \text{III.}\quad \frac{3(\mathfrak{A}-1)}{m+3\mathfrak{A}-2} > \frac{2}{m},$$

puisque $\mathfrak{A} > 1$, celle-ci renferme déjà celle-là; il faut donc prendre $\mathfrak{A}$ en sorte qu'il soit $> \frac{5m-4}{3(m+2)}$. Or posant $\mathfrak{B} = \infty$, les déterminations des lunettes sont:

$$p = P = \frac{3}{50}m^2, \quad q = \frac{3(\mathfrak{A}-1)P}{(m+1)\mathfrak{A}}, \quad r = \frac{9(\mathfrak{A}-1)P}{(m+1)(m+3\mathfrak{A}-2)}, \quad s = \frac{3(\mathfrak{A}-1)P}{m(m+3\mathfrak{A}-2)},$$

$$A = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{3(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}(m+3\mathfrak{A}-2)}, \quad C = \frac{3(\mathfrak{A}-1)P}{m(m+3\mathfrak{A}-2)}, \quad D = \frac{(m+1)(\mathfrak{A}-1)P}{m^2(m+3\mathfrak{A}-2)};$$

le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{3n}{m+1}$, qui est précisément trois fois plus grand qu'au des lunettes à deux verres convexes.

151. Donc si nous nous proposons de rendre la lunette la plus courte qu'il soit possible, il donner à $\mathfrak{A}$ la moindre valeur dont elle est susceptible. Posons donc $\mathfrak{A} = \frac{5m-4}{3m-6}$, et les terminations des lunettes les plus parfaites de cette espèce seront:

$$p = P = \frac{3}{50}m^2 \text{ pouces}, \quad q = \frac{6P}{5m-4}, \quad r = \frac{6P}{m(m+1)}, \quad s = \frac{2P}{m^2},$$

$$A = \frac{2(m+1)P}{5m-4}, \quad B = \frac{6(m-1)P}{m(5m-4)}, \quad C = \frac{9P}{m^2}, \quad D = \frac{2(m+1)P}{3m^3},$$

donnent le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{3n}{m+1}$.

La longueur de la lunette est:

$$A + B + C = \frac{2(m+1)(m^2-1)}{m^2(5m-4)}P,$$

laquelle était au cas des lunettes à deux verres $= \frac{m+1}{m} P$; de sorte que celle-là est à celle-ci comme: $2(m+4)(m-1)$ à $m(5m-4)$, ou comme $2m^2+6m-8$ à $5m^2-4m$; donc si la multiplication m est fort grande ou seulement $m > 15$, les lunettes de cette espèce sont plus que deux fois plus courtes.

152. Considérons quelques exemples, et soit $m = 25$ et partant $P = 37{,}5$ pouces, lequel objectif suffit à observer les satellites de Jupiter, et les déterminations de la lunette seront:

$$p = 37{,}5, \quad q = \frac{225}{121} = 1{,}8595, \quad r = \frac{9}{16} = 0{,}3461, \quad s = \frac{3}{25} = 0{,}12,$$

$$A = \frac{1950}{121} = 16{,}1157, \quad B = \frac{207}{121} = 1{,}7107, \quad C = \frac{3}{25} = 0{,}12, \quad D = 0{,}0416.$$

Et si nous posons $n = \frac{1}{5}$, le demi-diamètre du champ apparent sera $\varphi = \frac{3}{130} = 1^0, 19', 20''$; si nous avions mis $n = \frac{1}{4}$, nous aurions $\varphi = 1^0, 39', 20''$. Or si l'on joignait à ce même objectif un seul oculaire convexe, pour en former une lunette commune à deux verres, le demi-diamètre du champ apparent ne serait que $26', 27''$, en posant $n = \frac{1}{5}$; et au cas $n = \frac{1}{4}$ on aurait $\varphi = 33', 7''$. Mais ce plus grand champ apparent n'est pas le seul avantage qu'on retire de cette lunette a 4 verres: elle en est aussi plus courte; toute sa longueur, en y ajoutant la distance de l'oeil, n'étant que de 17,988 pouces ou presque de 18 pouces, pendant que la lunette à 2 verres a 40,56 ou $40\frac{1}{2}$ pouces de longueur. Voilà donc une lunette de 18 pouces fort propre à observer les satellites de Jupiter.

153. Posons aussi $m = 50$, et la distance de foyer de l'objectif doit être de 150 pouces. Une lunette de deux verres serait longue 156,06 pouces et découvrirait un champ apparent dont le demi-diamètre serait $13', 29''$. Or une lunette à 4 verres de cette espèce où $m = 50$ aura les déterminations suivantes:

$$p = 150 \text{ pouces}, \quad q = \frac{150}{41} = 3{,}6585, \quad r = \frac{6}{17} = 0{,}3529, \quad s = \frac{3}{25} = 0{,}12,$$

$$A = \frac{2550}{41} = 62{,}1951, \quad B = \frac{147}{41} = 3{,}5122, \quad C = \frac{3}{25} = 0{,}12, \quad D = 0{,}0408;$$

le demi-diamètre du champ apparent étant de $40', 27''$, posant $n = \frac{1}{5}$ et de $50', 34''$ posant $n = \frac{1}{4}$. Toute la longueur de cette lunette est donc 65,8681 ou presque de 66 pouces, et partant presque plus que de la moitié plus courte que celles à deux verres qui multiplient autant de fois. En comptant 12 pouces pour un pied, on aura une lunette de $5\frac{1}{2}$ pieds qui grossit les objets autant qu'une à deux verres de 13 pieds de longueur, avec la même clarté et qui découvre outre cela un champ neuf fois plus grand. Une telle lunette sera d'un grand usage dans l'astronomie.

154. Posons de plus $m = 100$, et la distance de foyer de l'objectif doit être $p = 600$ pouces. Si l'on en faisait une lunette à deux verres, nous avons vu ci-dessus que le demi-diamètre du champ apparent serait de $6', 49''$ et toute la longueur de la lunette de 612,06 pouces. Or si nous

Donnons le même objectif à une lunette de 4 verres de cette espèce, les déterminations seront suivantes:

$$p = 600 \text{ pouces}, \quad q = \frac{275}{31} = 7{,}2581, \quad r = \frac{36}{101} = 0{,}3564, \quad s = \frac{3}{25} = 0{,}12,$$

$$A = \frac{7575}{31} = 244{,}3548, \quad B = \frac{441}{62} = 7{,}1129, \quad C = 0{,}12, \quad D = 0{,}0404;$$

le demi-diamètre du champ apparent étant de $20', 27''$, posant $n = \frac{1}{5}$; et toute la longueur de la lunette est 251,6281 pouces ou de 21 pieds à peu près, qui rendra donc non seulement les mêmes et encore de plus grands services qu'une lunette ordinaire de 51 pieds. Une telle lunette sera propre à observer même les satellites de Saturne et, puisqu'elle découvre à la fois la lune tout entière, son usage doit être très important dans l'astronomie.

155. De même une lunette ordinaire de 200 pieds pourra être réduite à une de 80 pieds et partant mise en pratique. Soit donc $m = 200$, et on doit prendre $p = 2400$ pouces pour la distance foyer de l'objectif, et une lunette ordinaire à deux verres serait longue 2412 pouces et ne découvrirait qu'un champ dont le demi-diamètre $3', 25''$. Mais faisant de cet objectif une lunette de cette espèce, on aura les déterminations suivantes:

$$p = 2400, \quad q = 14{,}4578, \quad r = 0{,}3582, \quad s = 0{,}12 \text{ pouces},$$

$$A = 968{,}6747, \quad B = 14{,}3133, \quad C = 0{,}12, \quad D = 0{,}0402 \text{ pouces};$$

dont toute la longueur ne sera que de 983,1482 pouces ou environ de 82 pieds, tandisque la lunette de deux verres, qui grossit également, a 201 pieds de longueur. Outre cela le demi-diamètre du champ apparent est ici 3 fois plus grand et $10', 15''$, avantage qui est très considérable étant joint à une longueur au delà de deux fois plus courte.

156. Il n'y a donc aucun doute que cette espèce ne renferme des lunettes très excellentes à cause du grand champ qu'elles découvrent que par rapport à leur longueur. Nous avons remarqué ces mêmes avantages dans les lunettes à trois verres et maintenant nous voyons qu'on peut porter à un plus haut degré par l'addition du 4ème verre. Cependant il semble qu'on puisse encore davantage raccourcir ces lunettes en posant, comme nous avons trouvé d'abord, $\mathfrak{A} = \frac{5m+2}{3m}$ et $\mathfrak{B} = 1$, car alors la distances A devient plus petite $= \frac{2(m+1)}{5m+2} P$, et la distance B s'évanouit entièrement; mais la distance C devient d'autant plus grande et partant les déterminations seront:

$$p = P, \quad q = \frac{6}{5m+2} P, \quad r = \frac{6}{5m+2} P, \quad s = \frac{1}{2m} P,$$

$$A = \frac{2(m+1)}{5m+2} P, \quad B = 0, \quad C = \frac{(m+1)(3m+2)}{2m(5m+2)} P, \quad D = \frac{m+1}{6m^2} P.$$

Ainsi posant $m = 100$ et $P = 600$, on aura:

$$p = 600, \quad q = 7{,}171, \quad r = 7{,}171, \quad s = 3,$$

$$A = 241{,}434, \quad B = 0, \quad C = 181{,}980, \quad D = 1{,}01,$$

*

de sorte que cette lunette est beaucoup plus longue que la précédente. Il est donc plus geux de se tenir aux déterminations précédentes où il a été supposé $\mathfrak{B} = \infty$.

VI. Cas des lunettes à quatre verres,

où $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$ sont négatifs et $\mathfrak{B}$ positif.

157. Les lunettes de cette espèce représentent encore les objets renversés, et en faisant développement de nos formules, comme auparavant, on pourra faire en sorte que le demi-diamètre du champ apparent devient aussi $\varphi = \frac{3n}{m+1}$; nous n'avons qu'à y mettre $\mathfrak{B}$ négatif, puisque $\mathfrak{C}$ devient de soi-même négatif. Nous avons donc, après avoir satisfait aux premières conditions,

$$A = \frac{\mathfrak{A}-1}{\mathfrak{A}} P, \quad B = \frac{3(\mathfrak{A}-1)(\mathfrak{B}+1)}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m+3\mathfrak{A}-2)} P, \quad C = \frac{3(\mathfrak{A}-1)(\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)}{m\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m+3\mathfrak{A}-2)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2m+1)} P,$$

$$\text{et} \quad D = \frac{(m+1)(\mathfrak{A}-1)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)}{m^2(m+3\mathfrak{A}-2)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2m+1)} P;$$

et ensuite:

$$p = P, \quad q = \frac{3(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}(m+1)}, \quad r = \frac{3(\mathfrak{A}-1)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m+1)(m+3\mathfrak{A}-2)}, \quad s = \frac{3(\mathfrak{A}-1)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)}{m(m+3\mathfrak{A}-2)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2m+1)}$$

et les autres conditions à remplir sont:

$$\text{I.} \quad \frac{3(\mathfrak{A}-1)}{m+1} > \frac{2}{m}, \qquad \text{II.} \quad \frac{3(\mathfrak{A}-1)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)}{(m+1)(m+3\mathfrak{A}-2)} > \frac{2}{m}, \qquad \text{III.} \quad \frac{3(\mathfrak{A}-1)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)}{(m+3\mathfrak{A}-2)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2m+1)} > \frac{2}{m}.$$

158. Donc pour que les distances A, B, C, D soyent positives, il faut qu'il soit $\mathfrak{A} > 1$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B} > m$, et partant $3\mathfrak{A}\mathfrak{B} - 2m + 2 > m + 2$. Par conséquent il suffit de remplir la première et la troisième condition, puisque la seconde y est déjà renfermée. Or la première donne $\mathfrak{A} > 1$; donc puisqu'il est avantageux de prendre $\mathfrak{A}$ si petit qu'il est possible, posons $\mathfrak{A} = \frac{5m+2}{3m}$; la troisième condition donne $6\mathfrak{A}\mathfrak{B} < m^2 + 5m - 2$, et il faut qu'il soit $\mathfrak{A}\mathfrak{B} > m$; ce qui ne saurait avoir lieu, à moins qu'il ne fût $m^2 + 5m - 2 > 6m$ ou $m^2 > m + 2$ ou $m > 2$, ce qu'on peut toujours supposer. Ayant donc pris $\mathfrak{A} = \frac{5m+2}{3m}$, il faut qu'il soit:

$$\mathfrak{B} < \frac{m(m^2+5m-2)}{2(5m+2)} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B} > \frac{3m^2}{5m+2}.$$

Or, plus on prend grand $\mathfrak{B}$ et plus deviendra petite la distance B, et la valeur de $\mathfrak{A}$ rend déjà la distance A plus petite qu'au cas précédent. Cependant la distance B devient plus grande, puisqu'il n'est pas permis de prendre $\mathfrak{B} = \infty$.

159. Or posant $\mathfrak{A} = \frac{5m+2}{3m}$, pour rendre la distance A la plus petite qu'il soit possible, les déterminations de la lunette seront:

$$p = P, \quad q = \frac{6P}{5m+2}, \quad r = \frac{6[(5m+2)\mathfrak{B} - m^2 + 2m]P}{(m+1)(m+2)(5m+2)\mathfrak{B}}, \quad s = \frac{2[(5m+2)\mathfrak{B} - m^2 + 2m]P}{m(m+2)[(5m+2)\mathfrak{B} - 2m^2 + m]}$$

$$A = \frac{2(m+1)P}{5m+2}, \qquad B = \frac{6m(\mathfrak{B}+1)P}{(m+2)(5m+2)\mathfrak{B}}, \qquad C = \frac{2[(5m+2)\mathfrak{B}-3m^2][(5m+2)\mathfrak{B}-m^2+2m]P}{m(m+2)(5m+2)\mathfrak{B}[(5m+2)\mathfrak{B}-2m^2+m]}$$

$$\text{et} \qquad D = \frac{2(m+1)[(5m+2)\mathfrak{B}-m^2+2m]P}{3m^2(m+2)[(5m+2)\mathfrak{B}-2m^2+m]},$$

pourvu qu'on prenne:

$$\mathfrak{B} > \frac{3m^2}{5m+2} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{B} < \frac{m(m^2+5m-2)}{2(5m+2)}.$$

Or, puisqu'il semble avantageux de prendre $\mathfrak{B}$ si grand qu'il est possible, posons $\mathfrak{B} = \frac{m(m^2+5m-2)}{2(5m+2)}$, les déterminations seront:

$$p = P, \qquad q = \frac{6}{5m+2}P, \qquad r = \frac{6}{m^2+5m-2}P, \qquad s = \frac{2}{m^2}P,$$

$$A = \frac{2(m+1)P}{5m+2}, \qquad B = \frac{6(m+1)(m+2)P}{(5m+2)(m^2+5m-2)}, \qquad C = \frac{2(m+1)(m-2)P}{m^2(m^2+5m-1)} \qquad \text{et} \qquad D = \frac{2(m+1)P}{3m^3}.$$

160. Puisque m marque toujours un nombre assez considérable, l'application sera rendue plus aisée par ces formules:

$$q = \frac{6}{5}P\left(\frac{1}{m} - \frac{2}{5m^2} + \frac{4}{25m^3} - \frac{8}{125m^4}\right) = \frac{9}{125}\left(m - \frac{2}{5} + \frac{4}{25m} - \frac{8}{125m^2}\right),$$

$$r = 6P\left(\frac{1}{m^2} - \frac{5}{m^3} + \frac{27}{m^4}\right) = 3s\left(1 - \frac{5}{m} + \frac{27}{m^2}\right) = \frac{9}{25}\left(1 - \frac{5}{m} + \frac{27}{m^2}\right),$$

$$s = \frac{2}{m^2}P = \frac{6}{50} \quad \text{à cause de} \quad P = \frac{3}{50}m^2.$$

$$A = \frac{2}{5}P + \frac{1}{3}q,$$

$$B = q - \frac{2}{5}r + \frac{144}{25m^3}P - \frac{3888}{125m^4}P = q - \frac{2}{5}r + \frac{216}{625m} - \frac{5832}{3125m^2},$$

$$C = 5\left(1 - \frac{6}{m} + \frac{30}{m^2}\right),$$

$$D = 5\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3m}\right);$$

le demi-diamètre du champ apparent est toujours $\varphi = \frac{3n}{m+1}$. Soit $m = 25$ et $P = 37{,}5$, et les déterminations pour ce cas seront:

$$p = 37{,}5, \qquad q = 1{,}77, \qquad r = 0{,}30, \qquad s = 0{,}12,$$

$$A = 15{,}59, \qquad B = 1{,}67, \qquad C = 0{,}09, \qquad D = 0{,}0416;$$

d'où la longueur de la lunette est 17,39 qui est presque d'un pouce plus petite qu'au cas précédent, de sorte que ce cas comprend l'espèce la plus parfaite des lunettes à 4 verres.

Table des lunettes à 4 verres,

qui semblent les plus parfaites.

Multiplication.	Distances de foyer du 1r oculaire.	du 2d oculaire.	du 3e oculaire.	Distances de l'objectif au 1r ocul.	du 1r ocul. au 2d ocul.	du 2d oc. au 3e oc.	du 3e oc. à l'oeil.	Demi-diam. du champ app. moyen.
m	q	r	s	AB	BC	CD	DE	
5	0,33	0,19	0,12	0,71	0,30	$0,04\frac{1}{2}$	0,05	5° 43′ 11″
10	0,69	0,24	0,12	2,63	0,62	0,07	0,04	3 7 7
15	1,05	0,27	0,12	5,75	0,97	0,08	0,04	2 8 42
20	1,41	0,29	0,12	10,07	1,31	0,09	0,04	1 38 3
25	1,77	0,30	0,12	15,59	1,67	0,09	0,04	1 19 16
30	2,13	0,31	0,12	22,31	2,03	0,10	0,04	1 6 30
35	2,49	0,31	0,12	30,23	2,38	0,10	0,04	0 57 16
40	2,85	0,32	0,12	39,35	2,74	0,11	0,04	0 50 18
45	3,21	0,32	0,12	49,67	3,10	0,11	0,04	0 44 51
50	3,57	0,33	0,12	61,19	3,45	0,11	0,04	0 40 27
60	4,29	0,33	0,12	87,83	4,16	0,11	0,04	0 33 51
70	5,01	0,33	0,12	119,22	4,88	0,11	0,04	0 29 3
80	5,73	0,34	0,12	155,51	5,59	0,11	0,04	0 25 27
90	6,45	0,34	0,12	196,55	6,31	0,11	0,04	0 22 39
100	7,17	0,34	0,12	242,39	7,03	0,11	0,04	0 20 27
120	8,61	0,34	0,12	348,47	8,47	0,11	0,04	0 17 3
140	10,05	0,35	0,12	473,75	9,91	0,12	0,04	0 14 39
160	11,49	0,35	0,12	618,23	11,36	0,12	0,04	0 12 48
180	12,93	0,35	0,12	781,91	12,79	0,12	0,04	0 11 28
200	14,37	0,35	0,12	964,79	14,23	0,12	0,04	0 10 15
225	16,17	0,35	0,12	1220,39	16,03	0,12	0,04	0 9 9
250	17,97	0,35	0,12	1505,99	17,83	0,12	0,04	0 8 12
275	19,77	0,35	0,12	1821,59	19,63	0,12	0,04	0 7 27
300	21,57	0,35	0,12	2167,19	21,43	0,12	0,04	0 6 51
350	25,17	0,36	0,12	2948,39	25,03	0,12	0,04	0 5 54
400	28,77	0,36	0,12	3849,59	28,63	0,12	0,04	0 5 9
450	32,37	0,36	0,12	4870,79	32,23	0,12	0,04	0 4 33
500	35,97	0,36	0,12	6011,99	35,83	0,12	0,04	0 4 6

Les distances de foyer de l'objectif doivent être prises des tables précédentes.

VII. Cas des lunettes à quatre verres,

$\mathfrak{A}$ étant positif et $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ négatifs.

161. Ces lunettes représentent encore les objets renversés, mais puisque $\mathfrak{A}$ est positif, leur longueur sera plus grande qu'au cas précédent.

Or posant $-\mathfrak{B}$ et $-\mathfrak{C}$ pour $+\mathfrak{B}$ et $+\mathfrak{C}$ dans les formules principales, nous aurons:

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})}{\mathfrak{A}} P, \quad B = \frac{\mathfrak{B}-1}{\mathfrak{B}} Q, \quad C = \frac{\mathfrak{C}-1}{\mathfrak{C}} R \quad \text{et} \quad D = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{m^2} - \frac{(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} - \frac{(\mathfrak{C}-1)R}{\mathfrak{C}^2}$$

de sorte qu'à cause de $(\mathfrak{B}-1)Q > 0$ et $(\mathfrak{C}-1)R > 0$, il faut qu'il soit:

$$(1+\mathfrak{A})P > \mathfrak{A}^2(\mathfrak{B}-1)Q + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2(\mathfrak{C}-1)R.$$

Ensuite les distances de foyer sont:

$$p = P, \quad q = \frac{PQ}{P+\mathfrak{A}Q}, \quad r = \frac{QR}{Q-\mathfrak{B}R}, \quad s = -\frac{R}{\mathfrak{C}},$$

les trois valeurs de $\frac{n}{\varphi}$:

$$\text{I.}\quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + \mathfrak{A} + 1,$$

$$\text{II.}\quad \frac{n^I}{\varphi} = + \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} - \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} - \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

$$\text{III.}\quad \frac{n^I}{\varphi} = - \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}\mathfrak{B} + m = - \frac{m^2 D}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R}.$$

162. J'ai donné à ces formules les signes, afin qu'on en puisse tirer le plus grand champ apparent, et partant il faut que R soit une quantité négative et par conséquent $\mathfrak{C} < 1$. De là nous tirons:

$$\frac{n + n^I + n^{II}}{\varphi} = m + 1 \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{n + n^I + n^{II}}{m+1};$$

lorsque on obtient le plus grand champ apparent en rendant à n, n^I, n^{II} les plus grandes valeurs dont ces lettres sont susceptibles. Posons donc $n^I = n^{II} = n$, pour avoir $\varphi = \frac{3n}{m+1}$, et à cause $\frac{n}{\varphi} = \frac{n^I}{\varphi} = \frac{n^{II}}{\varphi} = \frac{m+1}{3}$, nous aurons:

$$\text{I.}\quad \frac{m-2}{3} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}Q} + \mathfrak{A}; \quad \text{donc} \quad Q = \frac{3(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}(m-3\mathfrak{A}-2)},$$

$$\text{II.}\quad \frac{2(m+1)}{3} = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} - \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} + 1 + \mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

d'où l'on tire:

$$R = \frac{3(1+\mathfrak{A})(m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m-3\mathfrak{A}-2)(2m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-1)};$$

et puisque R doit être une quantité négative, il faut qu'il soit ou $3\mathfrak{A} > m-2$ ou $3\mathfrak{A}\mathfrak{B} > m-2$.

163. Or ces valeurs étant substituées donnent les déterminations suivantes:

$$p = P, \quad q = \frac{3(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}(m+1)}, \quad r = \frac{3(1+\mathfrak{A})(m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m+1)(m-3\mathfrak{A}-3}, \quad s = \frac{3(1+\mathfrak{A})(m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2)P}{m(m-3\mathfrak{A}-2)(2m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-1)},$$

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{3(1+\mathfrak{A})(\mathfrak{B}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m-3\mathfrak{A}-2)}, \quad C = \frac{3(1+\mathfrak{A})(m-\mathfrak{A}\mathfrak{B})(m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2)P}{m\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m-3\mathfrak{A}-2)(2m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-1)}$$

$$\text{et} \quad D = - \frac{(1+\mathfrak{A})(m+1)(m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2)P}{m^2(m-3\mathfrak{A}-2)(2m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-1)}.$$

Maintenant nous devons satisfaire à ces conditions:

$$\text{I.}\quad \frac{3(1+\mathfrak{A})}{m+1} > \frac{2}{m},$$

$$\text{II.}\quad \frac{3(1+\mathfrak{A})(m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2)}{(m+1)(m-3\mathfrak{A}-2)} > \frac{2}{m},$$

$$\text{III.}\quad \frac{3(1+\mathfrak{A})(m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2)}{(m-3\mathfrak{A}-2)(2m-3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-1)} > \frac{2}{m};$$

où il faut observer que s est une quantité positive étant $s = +\frac{3mD}{m+1}$, et puisque $C < 1$ nous avons $m < \mathfrak{AB}$, et partant:

$$C = \frac{-3(1+\mathfrak{A})(\mathfrak{AB}-m)(m-3\mathfrak{AB}+2)P}{m\mathfrak{AB}(m-3\mathfrak{A}-2)(2m-3\mathfrak{AB}-1)}.$$

164. Il faut donc que $\frac{m-3\mathfrak{AB}-2}{(m-3\mathfrak{A}-2)(2m-3\mathfrak{AB}-1)}$, soit une quantité négative et que $\frac{\mathfrak{B}-1}{m-3\mathfrak{A}-2}$ soit une quantité positive, d'où résultent deux cas à considérer selon que $\mathfrak{B} > 1$ ou $\mathfrak{B} < 1$. Soit donc d'abord $\mathfrak{B} > 1$ et il faut qu'il soit $3\mathfrak{A} < m-2$ et $3\mathfrak{AB} > m-2$, mais pourtant $3\mathfrak{AB} < 2m-1$. Or la première condition exige $3m\mathfrak{A} + 3m > 2m+1$, ce qui est toujours vrai, et les deux autres doivent être présentées en sorte:

$$\text{II.}\quad \frac{3(1+\mathfrak{A})(3\mathfrak{AB}-m+2)}{(m+1)(m-3\mathfrak{A}-2)} > \frac{2}{m} \quad \text{et} \quad \text{III.}\quad \frac{3(1+\mathfrak{A})(3\mathfrak{AB}-m+2)}{(m-3\mathfrak{A}-2)(2m-3\mathfrak{AB}-1)} > \frac{2}{m};$$

mais puisque $m-3\mathfrak{AB}-2 < 0$, en ajoutant de part et d'autre $m+1$, on aura $2m-3\mathfrak{AB}-1 < m$ et partant en satisfaisant à la II., l'autre sera aussi remplie. De là nous tirons en égalant la seconde à $\frac{2}{m}$:

$$\mathfrak{AB} = \frac{(m-2)(5m+2)+3\mathfrak{A}(m^2-4m-2)}{9m(1+\mathfrak{A})},$$

et cette valeur satisfait aussi à la condition $3\mathfrak{AB} < 2m-1$. Mais dans ce cas on trouve $\mathfrak{AB} < m$, de sorte que la distance C deviendrait négative.

165. Soit donc $\mathfrak{B} < 1$ et partant $3\mathfrak{A} > m-2$, d'où la fraction $\frac{m-3\mathfrak{AB}-2}{2m-3\mathfrak{AB}-1}$ doit être positive, par conséquent ou $3\mathfrak{AB} < m-2$ ou $3\mathfrak{AB} > 2m-1$. Au premier cas on aura:

$$\text{II.}\quad \frac{3(1+\mathfrak{A})(m-3\mathfrak{AB}-2)}{(m+1)(3\mathfrak{A}-m+2)} > \frac{2}{m} \quad \text{et} \quad \text{III.}\quad \frac{3(1+\mathfrak{A})(m-3\mathfrak{AB}-2)}{(3\mathfrak{A}-m+2)(2m-3\mathfrak{AB}-1)} > \frac{2}{m},$$

où $2m-3\mathfrak{AB}-1$ étant $> m+1$, la III. formule renferme la seconde. Mais la condition $\mathfrak{AB} < \frac{m-2}{3}$ répugne à celle qui exige $\mathfrak{AB} > m$. Il ne reste donc que le cas $3\mathfrak{AB} > 2m-1$ qui donne:

$$\text{II.}\quad \frac{3(1+\mathfrak{A})(3\mathfrak{AB}-m+2)}{(m+1)(3\mathfrak{A}-m+2)} > \frac{2}{m}, \qquad \text{III.}\quad \frac{3(1+\mathfrak{A})(3\mathfrak{AB}-m+2)}{(3\mathfrak{A}-m+2)(3\mathfrak{AB}-2m+1)} > \frac{2}{m};$$

ou à cause de $\mathfrak{AB} > m$ il est $3\mathfrak{AB}-2m+1 > m+1$, de sorte que la III. formule renferme la seconde. Posons donc:

$$\frac{3\mathfrak{AB}-m+2}{3\mathfrak{AB}-2m+1} > \frac{2(3\mathfrak{A}-m+2)}{3m(1+\mathfrak{A})},$$

et de là on tirera:

$$3\mathfrak{AB} > \frac{(m-2)(7m-2)+3\mathfrak{A}(m^2-6m+2)}{5m-4+3\mathfrak{A}(m-2)}.$$

Or cela est toujours vrai, si $\mathfrak{AB} > m$.

166. Nous n'avons donc qu'à remplir ces conditions:

$$\text{I.}\quad \mathfrak{B} < 1, \qquad \text{II.}\quad \mathfrak{A} > \frac{m-2}{3} \qquad \text{et} \qquad \text{III.}\quad \mathfrak{A}\mathfrak{B} > m,$$

où la troisième renferme déjà la seconde à cause de $\mathfrak{B} < 1$. Ayant donc pris $\mathfrak{B} < 1$, on n'a qu'à prendre $\mathfrak{A} > \frac{m}{\mathfrak{B}}$; et les déterminations de la lunette seront:

$$p = P, \quad q = \frac{3(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}(m+1)}, \quad r = \frac{3(1+\mathfrak{A})(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(m+1)(3\mathfrak{A}-m+2)}, \quad s = \frac{3(1+\mathfrak{A})(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)P}{m(3\mathfrak{A}-m+2)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2m+1)},$$

$$A = \frac{(1+\mathfrak{A})P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{3(1+\mathfrak{A})(1-\mathfrak{B})P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(3\mathfrak{A}-m+2)}, \quad C = \frac{3(1+\mathfrak{A})(\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)P}{m\mathfrak{A}\mathfrak{B}(3\mathfrak{A}-m+2)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2m+1)}$$

$$\text{et} \quad D = \frac{(1+\mathfrak{A})(m+1)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-m+2)P}{m^2(3\mathfrak{A}-m+2)(3\mathfrak{A}\mathfrak{B}-2m+1)}.$$

Alors le demi-diamètre du champ apparent moyen sera $\varphi = \frac{3n}{m+1}$. Une des limites principales de cette espèce de lunettes provient en posant $\mathfrak{B} = 1$ et $\mathfrak{A} = m$, qui donne:

$$p = P, \quad q = r = s = \frac{3}{m}P, \quad A = \frac{1+m}{m}P, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = \frac{(1+m)}{m^2}P;$$

elle se déduit des lunettes à deux verres convexes, en triplant le verre oculaire pour lui donner une ouverture trois fois plus grande. On peut aussi faire que l'une ou l'autre des distances B et C s'évanouisse.

167. Un cas particulier mérite encore d'être remarqué, si l'on met $\mathfrak{B} = 0$ et $\mathfrak{A} = \infty$, mais de sorte que $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ soit un nombre fini $> m$; soit donc $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mu$ et les déterminations de la lunette seront:

$$p = P, \quad q = \frac{3P}{m+1}, \quad r = \frac{(3\mu-m+2)P}{\mu(m+1)}, \quad s = \frac{(3\mu-m+2)P}{m(3\mu-2m+1)},$$

$$A = P, \quad B = \frac{P}{\mu}, \quad C = \frac{(\mu-m)(3\mu-m+2)P}{\mu m(3\mu-2m+1)}, \quad D = \frac{(m+1)(3\mu-m+2)P}{3m^2(3\mu-2m+1)},$$

pourvu qu'on prenne $\mu > m$. Donc si l'on met $\mu = \infty$, on aura:

$$p = P, \quad q = \frac{3P}{m+1}, \quad r = \frac{3P}{m+1}, \quad s = \frac{P}{m},$$

$$A = P, \quad B = 0, \quad C = \frac{P}{m}, \quad D = \frac{m+1}{3m^2}P.$$

Si l'on met $\mu = m$, on aura l'autre limite de ce cas:

$$p = P, \quad q = \frac{3P}{m+1}, \quad r = \frac{2P}{m}, \quad s = \frac{2P}{m},$$

$$A = P, \quad B = \frac{P}{m}, \quad C = 0, \quad D = \frac{2(m+1)}{3m^2}P;$$

tous les autres cas où $\mu > m$ sont compris entre ces deux limites.

168. Posons pour donner un exemple $\mu = \frac{4m+1}{3}$, pour avoir $3\mu - m + 2 = 3(m+1)$ et $3\mu - 2m + 1 = 2(m+1)$, et les déterminations de nos lunettes seront:

$$p = P, \quad q = \frac{3P}{m+1}, \quad r = \frac{9P}{4m+1}, \quad s = \frac{3P}{2m},$$

$$A = P, \quad B = \frac{3P}{4m+1}, \quad C = \frac{3(m+1)P}{2m(4m+1)}, \quad D = \frac{(m+1)P}{2m^2}.$$

Ainsi posant $m = 50$ ou $P = 150$ pouces, la lunette doit être construite en sorte:

$$p = 150, \quad q = 8{,}823, \quad r = 6{,}716, \quad s = 4{,}5,$$

$$A = 150, \quad B = 2{,}239, \quad C = 1{,}141, \quad D = 1{,}53;$$

et la longueur de la lunette est $= 153{,}38$ pouces, un peu plus grande que si l'on n'employait que deux verres. Mais l'avantage de ces lunettes s'évanouit toujours à l'égard des espèces précédentes qui, étant au-delà de la moitié plus courtes, découvrent un aussi grand champ. Il ne reste donc qu'à examiner la huitième espèce.

VIII. Cas des lunettes à quatre verres,

les trois nombres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ étant négatifs.

169. Ces lunettes représentent les objets debout, et posant la multiplication $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = m$, les déterminations, après avoir mis $-\mathfrak{A}$, $-\mathfrak{B}$, $-\mathfrak{C}$, pour $+\mathfrak{A}$, $+\mathfrak{B}$, $+\mathfrak{C}$, seront:

$$A = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}}, \quad B = \frac{(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}}, \quad C = \frac{(\mathfrak{C}-1)R}{\mathfrak{C}}$$

$$\text{et} \quad D = -\frac{(\mathfrak{A}-1)P}{m^2} - \frac{(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2} - \frac{(\mathfrak{C}-1)R}{\mathfrak{C}^2} = -\frac{\mathfrak{A}A - \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}B - \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}C}{m^2}.$$

Cette distance étant donc nécessairement négative, il faut appliquer l'oeil immédiatement au dernier verre oculaire et avoir égard au limite qui répond à l'ouverture de la pupille et qui donne:

$$\frac{\omega}{\varphi} = \frac{A}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} + \frac{\mathfrak{A}B}{\mathfrak{C}} + \mathfrak{A}\mathfrak{B}C,$$

les autres étant:

$$\text{I.} \quad \frac{n}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}Q} - \mathfrak{A} + 1 = \frac{\mathfrak{A}}{Q} - \mathfrak{A} + 1,$$

$$\text{II.} \quad \frac{n^I}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} - \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}Q} + \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} + \mathfrak{A} - \mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

$$\text{III.} \quad \frac{n^{II}}{\varphi} = \frac{(\mathfrak{A}-1)P}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}R} + \frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-1)Q}{\mathfrak{B}R} - \mathfrak{A}\mathfrak{B} + m = \frac{\mathfrak{C}}{R} \cdot \frac{\omega}{\varphi},$$

$$\text{et} \quad p = P, \quad q = \frac{PQ}{P - \mathfrak{A}Q}, \quad r = \frac{QR}{Q - \mathfrak{B}R}, \quad s = -\frac{R}{\mathfrak{C}}.$$

Mais puisque le champ apparent devient fort petit je ne m'arrête pas à développer plus amplement ce cas.