

XXXIV.

Fragmentum ex Adversariis mathematicis depromptum.

Mechanica.

III.

(N. Fuss.)

PROBLEMA. (Fig. 278.). Si corpus super curva ascendat in medio resistente, fueritque $AP = a$ et $AM = s$, celeritas vero in $M = u$, et resistentiae formula $= \Delta + bu + cuu$, ita ut sit $udu + dx + (\Delta + bu + cuu) ds = 0$ invenire aequationem inter x et s , ut ista aequatio resolutionem admittat.

SOLUTIO. Primo quidem patet hanc aequationem resolubilem fieri casu $dx = cds$; tum enim statim habetur $ds = \frac{-udu}{a + \Delta + bu + cuu}$. Praeter hunc vero casum difficile est alios invenire; unde sequens solutio eo magis est notatu digna. Ponatur $ds = \frac{dq}{f - cq}$, ac statuatur $dx = \frac{aqdq - \Delta dq}{f - cq}$; tum enim aequatio induet hanc formam: $(f - cq)udu + aqdg + budg + cuudg = 0$. Hic ponatur $u = qv$, ac prodibit

$$\frac{dq}{q(f - cq)} = \frac{-v dv}{a + bv + fv^2},$$

sicque quantitas q per v definiri poterit; tum vero etiam $u = qv$ per v definitur, at vero x et s dantur per q . Hinc jam porro tempus assignari poterit ex formula $dt = \frac{ds}{u} = \frac{dq}{(f - cq)qv}$, unde si loco $\frac{dq}{q(f - cq)}$ ejus valor substituitur, erit $dt = \frac{-dv}{a + bv + fv^2}$. Sic tempus t etiam functioni ipsius v aequabitur $= T: \frac{q}{u}$, scilicet t aequabitur functioni nullius dimensionis binarum q et u . Unde patet totum tempus ascensus fore constans. Incipit enim ubi $s = 0$, at s ita definiri potest per q , ut posito $s = 0$, fiat $q = 0$; ergo in determinatione temporis integrale ita sumi debet, ut evanescat sumto $q = 0$. Ascensus vero terminatur, ubi celeritas u evanescit, unde totum tempus ascensus reperitur ex integrali invento ponendo $u = 0$, quod propterea erit quantitas constans, quaecunque fuerit celeritas initialis in a . Evidens igitur est curvam hoc modo inventam simul esse *tautochronam* in hoc medio resistente.

PROBLEMA. Proposita aequatione differentiali $udu + dx + ds(a + bu + cuu) = 0$, quaeritur qualis functioni ipsius s loco x assumi debeat, ut ista aequatio resolutionem admittat.

SOLUTIO. Ponatur $dx + ads = Sds$, ut habeatur haec aequatio:

$$udu + ds(S + bu + cuu) = 0.$$

Haec aequatio fingatur integrabilis reddi, si dividatur per hanc formulam $Aqq + Bqu + Cuu$, ubi q designet certam functionem ipsius s . Quare cum in genere formula $Pdu + Qds$ integrationem admittat, si fuerit

$$\left(\frac{dP}{ds}\right) = \left(\frac{dQ}{du}\right),$$

pro nostro casu erit:

$$P = \frac{u}{Aqq + Bqu + Cuu} \quad \text{et} \quad Q = \frac{S + bu + cuu}{Aqq + Bqu + Cuu}.$$

Jam quia q supponitur functio ipsius s , ponatur $dq = rds$, ac reperietur:

$$\left(\frac{dP}{ds}\right) = \frac{-2Aqr - Bruu}{(Aqq + Bqu + Cuu)^2}, \quad \text{deinde} \quad \left(\frac{dQ}{du}\right) = \frac{Abqq + 2Acqu - BSq + Bequ - 2CSu - Cbuu}{(Aqq + Bqu + Cuu)^2}.$$

Hinc igitur oriatur ista aequatio:

$$Abqq - BSq + 2Aqr(r + cq) - 2CSu + Bequ + Bruu - Cbuu = 0,$$

quorum trium membrorum singula ad nihilum redigi debent. Ex primo fit:

$$Abqq - BSq = 0, \quad \text{unde} \quad S = \frac{Abq}{B}.$$

Secundum membrum dat $2Aqr + 2Acqu - 2CSu = 0$, quae loco S substituto valore abit in:

$$2Aqr + 2Acqu - \frac{2ACbq}{B} = 0, \quad \text{unde} \quad r = \frac{Cb - Bcq}{B}.$$

Tertium membrum praebet $Bcq + Br - Cb = 0$, unde iterum prodit $r = \frac{Cb - Bcq}{B}$, qui ambo valores

ipsius r cum sint inter se aequales, nihil amplius determinandum restat, quare cum $r = \frac{dq}{ds}$, habebitur

$$\frac{dq}{ds} = \frac{Cb - Bcq}{B} \quad \text{hincque} \quad ds = \frac{Bdq}{Cb - Bcq}. \quad \text{Hincque jam fiet} \quad cs = \int \frac{Bcdq}{Cb - Bcq} = l \frac{\Delta}{Cb - Bcq}.$$

Quodsi jam velimus, ut sumto $s = 0$ etiam q evanescat, esse debet $\Delta = Cb$, sicque habebitur:

$$cs = l \frac{Cb}{Cb - Bcq}, \quad \text{ideoque} \quad e^{cs} = \frac{Cb}{Cb - Bcq}, \quad \text{unde fit} \quad q = \frac{Cb(e^{cs} - 1)}{Bce^{cs}} = \frac{Cb}{Bc}(1 - e^{-cs}).$$

Valore autem ipsius q invento, erit $S = \frac{ACbb}{cBB}(1 - e^{-cs})$; quare cum sit:

$$dx + ads = Sds, \quad \text{erit} \quad x = \int Sds - as = \frac{ACbb}{cBB} \left(s + \frac{1}{c} e^{-cs} \right) - as + \text{Const.}$$

Unde ut sumto $s = 0$ fiat $x = 0$, fiet:

$$\text{Const.} = \frac{ACbb}{cBB}, \quad \text{consequenter} \quad x = \frac{ACbb}{cBB} - as + \frac{ACbb}{cBB} \left(s + \frac{1}{c} e^{-cs} \right).$$

Hic ergo litterae A, B, C penitus arbitrio nostro relinquuntur; interim tamen patet, statui non posse $B = 0$; tum vero fieri debet $Cb > Bcq$, donec q certum valorem obtinuerit, in quo terminus scilicet q maximum habet valorem. Invento autem divisore $Aqq + Bqu + Cuu$ integratio, aequationis nulla amplius laborat difficultate, scilicet per logarithmos et arcus circulares.

PROBLEMA. Proposita aequatione $udu + dx + (a + bu + cuu) ds = 0$, ubi x sit certa functio ipsius s , venire valorem formulae integralis $t = \int \frac{ds}{u}$.

SOLUTIO. Ponatur brevitatis gratia $udu + dx + (a + bu + cuu) ds = dW$, ut sit $dW = 0$. Jam certus multiplicator M dabitur, ut formula $\frac{ds}{u} + MdW$ integrationem admittat. Cum igitur sit $dW = 0$, $dt = \frac{ds}{u} + MdW$, quae formula cum sit integrabilis, inde definietur ipsum tempus t . Sumatur

$$M = \frac{p}{u(\alpha q + \beta qu + \gamma uu)},$$

ubi p et q sint certae functiones ipsius s , eritque:

$$dt = \frac{ds}{u} + \frac{pudu + pdx + pa's + pbuds + cpuuds}{u(\alpha q + \beta qu + \gamma uu)}.$$

hinc ergo numerator erit $\alpha qds + \beta quds + \gamma uu ds + pudu + pdx + apds + bpuds + cpuuds$, denominatore existente $u(\alpha q + \beta qu + \gamma uu)$. Nunc autem fiat $dt = \frac{qdu - udq}{\alpha q + \beta qu + \gamma uu}$, quippe quae formula semper potest integrari, ponatur enim $u = qv$, eritque $dt = \frac{dv}{\alpha + \beta v + \gamma vv}$. Facta autem hac aequalitate:

$$\alpha qds + \beta quds + \gamma uu ds + pudu + pdx + apds + bpuds + cpuuds = qdu - udq,$$

fieri debet:

$$\alpha qds + pdx + apds = 0, \quad p = q, \quad \beta quds + bpuds = 0, \quad \gamma uu ds + cpuuds = -udq;$$

unde $ds = \frac{dq}{\gamma + cp}$ et $dx = -\frac{(\alpha p + \alpha q) ds}{p} = -(a + \alpha p) ds$. Ubi notetur, cum posito $u = qv$ sit $dt = \frac{dv}{\alpha + \beta v + \gamma vv}$ ideoque $t = f : v = f : \frac{u}{q}$, ideoque t aequabitur functioni nullius dimensionis ipsarum q et u : quare totum tempus exprimetur numero absoluto, ideoque curva erit *tautochrone*.

FINIS.