REMARQUES
SUR LES MÉMOIRES PRÉCEDENS DE *M. BERNOULLI*,

PAR M. EULER.

I.

Il n'y a aucun doute, que M. *Bernoulli* n'ait infiniment mieux développé la partie physique, qui renferme la formation du son dans le mouvement des cordes, qu'aucun autre n'a fait avant lui. On s'étoit presque uniquement arrêté à la détermination méchanique du mouvement, dont une corde tenduë peut être ébranlée, sans rechercher assez soigneusement la nature des sons, qui en sont produits. Malgré l'infinité de manieres differentes dont on a trouvé qu'une corde peut être mise en vibrations, on ne voyoit pas comme il seroit possible, qu'une même corde puisse rendre à la fois plusieurs sons differens; & c'est à M. *Bernoulli*, que nous sommes redevables de cette heureuse explication, qui est sans doute de la derniere importance dans la Physique. Il est aussi évident, que cette belle idée s'étend à toutes les autres especes des corps sonores, & que le même corps peut rendre à la fois tous les sons differens, dont il est susceptible séparément; & c'est le sujet que M. *Bernoulli* a traité avec le même succès dans son second Mémoire.

II. M. *Bernoulli* tire toutes ces excellentes réfléxions uniquement des recherches, que feu M. *Taylor* a faites sur le mouvement des cordes, & soutient contre M. d'*Alembert* & moi, que la solution de *Taylor* est suffisante à expliquer tous les mouvemens, dont une corde est susceptible; de sorte que les courbes, qu'une corde prend pendant son mouve-

mouvement, soit toujours, ou une trochoïde allongée simple, ou un mêlange de deux ou plusieurs courbes de la même espece. Or quoiqu'un tel mêlange ne pût plus être regardé comme une trochoïde, & que la seule possibilité de la combinaison de plusieurs courbes de M. *Taylor* rende déjà sa solution insuffisante ; il me semble qu'elle est encore insuffisante à d'autres égards, & que le mouvement d'une corde pourroit être tel, qu'il seroit impossible de le rapporter à l'espece des trochoïdes Tayloriennes.

III. Si toutes les courbes, auxquelles la corde s'applique pendant son mouvement, étoient comprises dans cette équation,

$$y = \alpha \sin\frac{\pi x}{a} + \beta \sin\frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin\frac{3\pi x}{a} + \delta \sin\frac{4\pi x}{a} + \&c.$$

le sentiment de M. *Bernoulli* seroit juste ; vu que prenant chaque terme séparément, une telle équation $y = \mu \sin\frac{m\pi x}{a}$ donne toujours une des trochoïdes assignées par *Taylor* ; & notre équation seroit formée de plusieurs trochoïdes. Mais, dés que le nombre des termes dans cette équation devient infini, il me paroit encore douteux, si l'on peut dire, que la courbe soit composée d'une infinité de trochoïdes : le nombre infini semble détruire la nature d'une telle composition. Cependant j'avouë, que M. *Bernoulli* auroit pu parvenir à la découverte de toutes ces courbes par le seul raisonnement fondé sur la composition des trochoïdes Tayloriennes, & que l'équation rapportée, quand même elle seroit continuée à l'infini, en est une suite fort naturelle.

IV. Mais il y a des cas, où cette équation s'étendant à l'infini est réductible à une équation finie, & alors surtout ce seroit parler fort improprement, si l'on disoit, que la courbe étoit composée d'une infinité de trochoïdes ; l'équation même en fournissant une idée & construction beaucoup plus simple. Ainsi, lorsque les coëfficiens α, β,

γ, δ &c. forment une progreſſion géometrique, l'équation infinie ſe réduit à cette équation finie :

$$y = \frac{c \text{ ſin } \frac{\pi x}{a}}{1 - n \text{ coſ } \frac{\pi x}{a}}$$

qui renferme ſans contredit des courbes, qui peuvent convenir au mouvement d'une corde, même de l'aveu de M. *Bernoulli*, pourvu que n marque un nombre plus petit que l'unité. Cette corde devroit donc bien rendre à la fois une infinité de ſons, dont les plus hauts deviendroient de plus en plus foibles ; mais l'équation nous offre une idée beaucoup plus ſimple de cette courbe, que ſi nous voulions dire, qu'elle étoit compoſée d'une infinité de trochoïdes Tayloriennes.

V. Mais il y a plus : je n'avois donné cette équation,

$$y = \alpha \text{ ſin } \frac{\pi x}{a} + \beta \text{ ſin } \frac{2\pi x}{a} + \gamma \text{ ſin } \frac{3\pi x}{a} + \delta \text{ ſin } \frac{4\pi x}{a} + \&c.$$

que comme une ſolution particuliere de la formule, qui contient en général toutes les courbes, qui peuvent convenir à une corde miſe en mouvement : & il y a une infinité d'autres courbes, qui ne ſauroient être compriſes dans cette équation. Si M. *Bernoulli* tomboit d'accord là deſſus, il n'auroit pas avancé, que toutes les courbes d'une corde frappée réſultoient uniquement de la combinaiſon de deux ou pluſieurs courbes Tayloriennes ; & il auroit reconnu, que le raiſonnement fondé ſur cette combinaiſon n'eſt pas ſuffiſant à fournir une ſolution complette de la queſtion, dont il s'agit. Il n'auroit pas non plus regardé la méthode, dont M. d'*Alembert* & moi nous ſommes ſervis, comme trop embarraſſée pour arriver à une ſolution générale, qui ſe pourroit tirer d'une ſimple conſidération phyſique. La queſtion principale, que j'ai à déveloper, eſt donc : ſi toutes les courbes d'une corde miſe en mouvement ſont compriſes dans l'équation rapportée, ou non ?

VI.

VI. M *Bernoulli* ne conteste pas directement la négative, que j'avois avancée: il se contente de dire, qu'il n'est pas encore assés éclairci là dessus; cependant c'est uniquement sur ce point qu'est fondée la préférence, qu'il tache de donner à sa méthode sur celle, dont M. d'*Alembert*, & moi, nous sommes servis. Car si la considération de M. *Bernoulli* fournissoit toutes les courbes, qui peuvent avoir lieu dans le mouvement des cordes, il est certain qu'elle seroit infiniment préférable à notre méthode, qu'on ne pourroit plus regarder que comme un détour extrèmement épineux pour parvenir à une solution si aisée à trouver. Mais au contraire, si la considération de M. *Bernoulli* ne découvre pas toutes les courbes, qui peuvent convenir à une corde mise en mouvement, & qu'il y ait des cas, où la figure de la corde est absolument irréductible aux trochoïdes de M. *Taylor*; il est aussi incontestable, que la méthode de M. *Bernoulli*, quelque belle qu'elle soit en elle-même, ne soit de beaucoup inferieure à la méthode directe, qui fournit toutes les solutions possibles.

VII. Or il me semble que cette circonstance ne sauroit être révoquée en doute, dès qu'on considère, qu'on peut donner d'abord à la corde une figure quelconque. Car concevons, qu'on ait donné à la corde avant que de la relâcher, une figure, qui n'est pas comprise dans l'équation $y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2 \pi x}{a} +$ &c. & il n'y a aucun doute que la corde, après avoir été relâchée subitement, ne soit déterminée à un certain mouvement. Il est aussi certain que la figure qu'elle aura après le premier instant sera encore bien différente de cette équation; & quand même on voudroit soutenir, qu'après plusieurs instans elle s'assujettisse enfin à une figure comprise dans la dite équation, on ne sauroit disconvenir, qu'avant que cela arrive, le mouvement de la corde ne soit bien different de celui, que la considération de M. *Bernoulli* renferme. Ce premier mouvement n'étant donc pas certainement conforme aux loix tirées de la théorie de *Taylor*, me semble

ble tout à fait suffisant à faire voir, que cette théorie n'est pas capable de nous éclairer sur tous les mouvemens, dont une corde est susceptible.

VIII. On sera donc obligé d'avouër, que le mouvement de la corde, du moins pendant quelque tems depuis le commencement, dépend de la figure, qu'on aura donnée d'abord à la corde; laquelle étant absolument arbitraire, il est impossible de soutenir, que ce mouvement soit toujours d'accord avec lesdites loix. Il semble encore fort incertain, si un tel mouvement se réduise enfin parfaitement à la trochoïde de *Taylor*; & quand même cela arriveroit, comme M. *Bernoulli* a remarqué très ingénieusement qu'il arrive dans le mêlange de deux ou plusieurs trochoïdes, la cause ne sauroit être attribuée, qu'au rallentissement du mouvement, causé par des circonstances externes, auxquelles on ne fait point réfléxion dans le calcul. Ainsi cela ne doit pas même entrer dans la solution, où l'on fait abstraction de toutes causes, qui peuvent rallentir & altérer le mouvement. De là il s'ensuit, qu'une solution ne sauroit être jugée complette, à moins qu'elle n'embrasse tous les cas du mouvement, pour toutes les figures possibles, qu'on pourroit donner à la corde au commencement.

IX. Mais peut-être repliquera-t-on, que l'équation $y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \&c.$ à cause de l'infinité de coëfficiens indéterminés, est si générale, qu'elle renferme toutes les courbes possibles: & il faut avouër, que si cela étoit vray, la méthode de M. *Bernoulli* fourniroit une solution complette. Mais, outre que ce grand Géometre n'a pas fait cette objection, toutes les courbes comprises dans cette équation, quoiqu'on augmente le nombre des termes à l'infini, ont de certains caractères, qui les distinguent de toutes autres courbes. Car si l'on prend l'abscisse x négative, l'appliquée devient aussi négative, & égale à celle qui repond à l'abscisse positive x; de même l'appliquée qui répond à l'abscisse $a + x$, est négative, & égale à celle qui convient

vient à l'abſciſſe x. Donc ſi la courbe, qu'on aura donnée à la corde au commencement, n'a point ces propriétés, il eſt certain qu'elle n'eſt pas renfermée dans ladite équation. Or aucune courbe algébrique ne ſauroit avoir ces propriétés, qu'il faut donc toutes exclure de cette équation; & il n'y a aucun doute, qu'il n'en faille auſſi exclure une infinité de courbes tranſcendentes.

X. Mais, puisque la premiere courbe qu'on donne à la corde, eſt abſolument arbitraire, il peut arriver, & il arrivera même le plus ſouvent, que cette premiere courbure n'eſt expreſſible par aucune équation, ſoit algébrique, ſoit tranſcendente, & qu'elle n'eſt renfermée dans aucune loi de continuité. Une telle courbe ne ſera donc pas à plus forte raiſon compriſe dans l'équation alleguée. Suppoſons donc que la corde ait eu au commencement une telle figure quelconque, ſuppoſition d'autant moins impoſſible, que c'eſt plutôt la ſeule, qui puiſſe avoir lieu dans la pratique; & je demande quel ſera ſon mouvement, après qu'elle aura été relâchée? Il eſt bien certain que ce mouvement étant réel doit être déterminable, & il eſt auſſi certain, qu'il ne ſauroit être renfermé du moins pour les premiers inſtans, dans celui que M. *Bernoulli* a tiré des trochoïdes Tayloriennes: & partant cette ſolution, toute belle qu'elle eſt d'ailleurs, ne ſauroit avoir lieu que dans les cas, où par quelque hazard la corde a reçu au commencement une des figures compriſes dans l'équation mentionnée; tous les autres cas ſeront exclus de cette ſolution.

XI. Voilà donc l'étenduë, qu'il faut donner à mon avis au problème ſur les mouvemens des cordes: *Ayant donné au commencement à la corde une figure quelconque, ſoit algébrique, ſoit tranſcendente, ſoit même mécanique, il s'agit de déterminer le mouvement, que la corde pourſuivra après avoir été relâchée.* Sur ce pied il eſt bien clair, que la ſolution tirée de la combinaiſon des trochoïdes ne ſauroit être regardée, que comme très particuliere. Or, me demandera-t-on, une ſolution générale eſt-elle bien poſſible? Je crois que la ſolution, que j'en ai don-

donnée, n'eſt limitée à aucun égard, du moins je n'y puis decouvrir aucune faute, & perſonne n'en a encore montré l'inſuffiſance. Il eſt bien vrai que M. d'*Alembert*, quoiqu'il m'ait reproché que ma ſolution n'étoit pas differente de la ſienne, a avancé, mais ſans alléguer la moindre preuve, que ma ſolution ne s'étend pas à toutes les figures poſſibles, que la corde aura pu avoir au commencement; & il eſt dans le même ſentiment, que M. *Bernoulli* ſemble ſoutenir, que le mouvement d'une corde ne ſauroit être déterminé, à moins que ſa figure initiale ne ſoit compriſe dans l'équation, que j'ai déjà pluſieurs fois rapportée.

XII. Je ſouhaiterois fort, que M. d'*Alembert* m'eut indiqué en quoi je me ſuis trompé, quand je donnai ma ſolution pour générale, & applicable à toutes les courbes initiales, qu'on puiſſe donner à la corde. Mais, quoiqu'il en ſoit, cela ne fait rien à la recherche préſente, attendu qu'il eſt certain, qu'il y a une infinité de cas, où le mouvement d'une corde ne ſauroit être déterminé par le mêlange de pluſieurs trochoïdes. Pour le reſte je ne m'attends pas, que M. d'*Alembert* diſe, que dans ces cas le mouvement de la corde ne ſuive aucune loi; il ſera donc déterminable par ſa nature, & ſi ma ſolution eſt fauſſe, perſonne ne ſera plus capable de ſuppléer à ce défaut, que M. d'*Alembert* lui-même. Mais je doute fort, qu'il trouve jamais une ſolution differente de la mienne, du moins s'il veut s'arrêter aux mêmes hypotheſes, qu'il a faites dans ſa ſolution, & qui l'ont conduit à l'équation:

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \&c..$$

XIII. Cependant, pour m'aſſurer mieux de ma ſolution, je m'en vais traiter de nouveau ce même problème par une méthode un peu differente, & examiner plus ſoigneuſement tous les raiſonnemens, qui m'ont conduit à la détermination générale du mouvement des cordes, quelle qu'ait été leur figure initiale. Or d'abord il faut remarquer qu'on fonde le calcul ſur quelques hypotheſes, qui ſont fort ſouvent peu conformes à la verité. On ſuppoſe premièrement la corde

parfai-

parfaitement fléxible, & destituée de toute roideur; on ne tient pas non plus compte du ressort de la corde, quoique ces circonstances puissent très considérablement altérer le mouvement; & partant on ne peut pas alléguer les effets qui en sont causés, contre la bonté de la solution. Ensuite on suppose les vibrations de la corde infiniment petites, de sorte que la corde ne change pas de longueur pendant son mouvement, & que chaque point de la corde demeure toujours dans la même ligne droite perpendiculaire à l'axe: or il est évident que la petite augmentation de la longueur de la corde dans ses excursions, peut aussi contribuër quelque chose à l'altération du mouvement.

XIV. Il s'agit donc seulement d'une solution, qui soit conforme à ces hypotheses, & point du tout d'une telle, qui satisfasse parfaitement aux phénomenes, que l'expérience nous offre. Mrs. *Bernoulli* & d'*Alembert* ont fait ces mêmes hypotheses; & ils n'attendront donc rien de la mienne, qui approche davantage de la vérité. On n'a fait ces hypotheses que pour la facilité du calcul; car on pourroit bien tenir compte dans la solution, tant de la roideur de la corde, que de son allongement dans ses excursions, & donner aux vibrations une grandeur finie; mais on parviendroit à des formules si compliquées, qu'on n'en sauroit déduire aucune conclusion satisfaisante. Ce ne sont pas les principes mécaniques, qui nous abandonnent dans ces recherches; c'est plutôt l'analyse, qui n'est pas encore portée à ce degré de perfection, qu'il faudroit pour ces sortes de questions. Les bornes de l'analyse nous obligent à de telles hypotheses, pour faciliter en sorte la solution, qu'elle ne s'écarte pas trop sensiblement de la vérité.

XV. Considérons donc une corde fixée par ses deux bouts aux points A & B, & posons la distance, ou la longueur de la corde $AB = a$; soit l'épaisseur de la corde partout la même, & la masse ou le poids de toute la corde $= M$: soit de plus la tension de la corde, ou la force dont elle est tenduë $= F$, exprimée par un poids: donc si nous prenons Fig. 1

une partie quelconque $AP = x$, sa masse sera $= \frac{Mx}{a}$, & la masse de l'élément $Pp = \frac{M\,dx}{a}$. Supposons maintenant, que la corde ait été détournée au commencement à une figure quelconque, & qu'après un tems ecoulé $= t$, elle soit parvenuë à la figure AMB. Posant donc pour cette figure l'abscisse $AP = x$, & l'appliquée $PM = y$, celle-cy sera exprimée par une certaine fonction de l'abscisse x, & du tems t, que nous indiquerons par $y = \Phi : (x, t)$. Cette équation doit être telle, que si l'on pose $t = o$, elle exprime la courbe qu'on avoit donnée à la corde au commencement; ensuite si l'on donne à t une valeur déterminée, qui convient au tems écoulé, cette même équation exprimera la nature de la courbe, que la corde aura à cet instant.

XVI. Tout revient donc à trouver de quelle nature doit être la fonction de x & t, qui exprime la valeur de l'appliquée y. Pour cet effet il faut recourir aux principes mécaniques, par lesquels le mouvement de la corde est déterminé: mais, avant que de procéder à cette recherche, l'état de la corde nous découvre quelques propriétés, qui doivent necessairement convenir à notre fonction $y = \Phi : (x, t)$. Car, puisque la corde est fixée au point A, il est évident que posant $x = o$, cette fonction doit evanouïr, quelque valeur qu'on donne au tems t. Ensuite, puisque la corde est aussi fixée en B, si l'on pose $x = a$, la fonction doit aussi se réduire à zéro, quelque valeur que puisse avoir le tems t. Nous connoissons donc déjà, indépendamment des principes mécaniques, trois propriétés de notre fonction $y = \Phi : (x, t)$, dont la premiere est que posant $t = o$, elle exprime la courbe initiale de la corde, & les deux autres, que quelque valeur que le tems t puisse avoir, l'appliquée y evanouïsse toujours, tant pour $x = o$, que pour $x = a$.

XVII. Puisque la corde, après le tems t, est réduite à la figure AMB, voyons par quelle force chacun de ses élémens est sollicité; & il il eſt clair que dans cette recherche le tems t doit être regardé comme invariable. Or, en vertu de l'hypotheſe que les excurſions de la corde ſont infiniment petites, la tenſion de la corde dans l'état AMB, ſera la même dans tous les points de la corde, & partant $= F$. Donc, par la tenſion de l'élément précedent $M\mu$, le point M ſera ſollicité vers la direction MP par la force $F\left(\frac{dy}{dx}\right)$, où $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ marque la valeur de la fraction $\frac{dy}{dx}$ en poſant le tems t conſtant. Or par la tenſion de l'élément ſuivant Mm, prenant $Pp = Mm = dx$, le point M ſera ſollicité en ſens contraire par la force $F\left(\left(\frac{dy}{dx}\right) + d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)$: & partant combinant ces deux forces enſemble, le point M ſera ſollicité ſelon la direction MP par la force $-Fd\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Puiſque dans ce differentiel le tems t eſt encore pris pour conſtant, cette force ſera $= -Fdx\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, où la formule $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ exprime la valeur de $\frac{ddy}{dx^2}$ en ſuppoſant le tems t conſtant.

XVIII. Concevons que toute la maſſe de l'élément Mm, qui eſt $= \frac{M\,dx}{a}$ ſoit réünie au point M, & elle ſera ſollicitée dans la direction MP par la force $= -Fdx\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$; c'eſt donc de cette force que le mouvement de l'élément Mm ſera altéré, & puiſque ce mouvement ſe fait ſuivant la même direction MP, ſi nous voulons déterminer ce mouvement, nous devons regarder l'abſciſſe $AP = x$ comme conſtante, & nous tenir uniquement à la variabilité du tems t. Or les principes méchaniques nous donnent l'accélération de ce mouvement ſelon la direction $MP = -2\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, laquelle doit être égale à la force accélératrice, ou à la force motrice $-Fdx\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ diviſée par la maſſe $\frac{M\,dx}{a}$, d'où nous tirons cette équation :

$$-2\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{Fa}{M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) \text{ ou } \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{Fa}{2M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$$

Pour l'intelligence de cette équation il ſuffit de remarquer, que dans la formule $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ le ſeul tems t eſt regardé comme variable, & dans la formule $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ la ſeule abſciſſe x.

XIX. A' cette occaſion il ſera à propos d'expliquer davantage cette maniere d'indiquer les différentiels des fonctions de pluſieurs variables, en n'en faiſant varier qu'une ſeulement; puiſque cette conſidération eſt d'une très grande utilité dans quantité de problèmes méchaniques & hydrodynamiques. Soit donc y une fonction quelconque des variables x, t, u, &c. & en les faiſant varier toutes, le différentiel de y aura une telle forme $dy = Pdx + Qdt + Rdu$, où le membre Pdx marque le différentiel de y, en faiſant varier la ſeule quantité x, & regardant les autres t, & u comme conſtantes. De même le membre Qdt marque le différentiel de y en faiſant varier la ſeule quantité t, & le membre Rdu celui en faiſant varier la ſeule quantité u. Cette conſidération nous donne donc à connoitre les quantités finies P, Q, & R: or, pour ne pas avoir beſoin de tant de lettres, je les indique de la maniere ſuivante :

$$P = \left(\frac{dy}{dx}\right);\quad Q = \left(\frac{dy}{dt}\right);\quad R = \left(\frac{dy}{du}\right).$$

XX. Connoissant donc la signification de ces expressions & d'autres semblables, on les peut étendre à des différentiels de plus hauts degrés. Ainsi, puisque $P = \left(\frac{dy}{dx}\right)$, & que P est encore une fonction finie des quantités x, t, u, on aura une idée juste de l'expression $\left(\frac{dP}{dx}\right)$, au lieu de laquelle je mets $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, de sorte que posant $\left(\frac{dy}{dx}\right) = P$, cette expression $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ renferme la valeur de $\left(\frac{dP}{dx}\right)$. De même ayant $\left(\frac{dy}{dt}\right) = Q$, l'expression $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ sera la valeur de $\left(\frac{dQ}{dt}\right)$; & pareillement $\left(\frac{ddy}{du^2}\right) = \left(\frac{dR}{du}\right)$. On peut aussi changer dans les différentiations succesives les variables, & ainsi la valeur de $\left(\frac{dP}{dt}\right)$ sera exprimée par $\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)$, & celle de $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{ddy}{dt\,dx}\right)$. En conséquence de cela il y aura aussi :

$$\left(\frac{ddy}{dx\,du}\right) = \left(\frac{dP}{du}\right); \quad \left(\frac{ddy}{du\,dx}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{ddy}{dt\,du}\right) = \left(\frac{dQ}{du}\right); \quad \left(\frac{ddy}{du\,dt}\right) = \left(\frac{dR}{dt}\right).$$

XXI. Or on sait que dans un tel différentiel complet $dy = Pdx + Qdt + Rdu$, les quantités finies P, Q, R, sont dans une telle rélation entr'elles, que selon la même maniere d'exprimer il y a :

$$\left(\frac{dP}{dt}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right); \quad \left(\frac{dP}{du}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right); \quad \left(\frac{dQ}{du}\right) = \left(\frac{dR}{dt}\right)$$

De

De là nous aurons :

$$\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right) = \left(\frac{ddy}{dt\,dx}\right);\quad \left(\frac{ddx}{dx\,du}\right) = \left(\frac{ddy}{du\,dx}\right);\quad \left(\frac{ddy}{dt\,du}\right) = \left(\frac{ddy}{du\,dt}\right)$$

où il eſt fort remarquable, que ſi le dénominateur contient deux différens différentiels, il eſt indifférent en quel ordre ils ſoient ecrits. De là on comprendra aiſément la ſignification de ſemblables formules, lorsqu'elles renferment des différentiels plus hauts : ainſi pour connoitre la valeur de $\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)$, qu'on poſe $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = V$, & on aura $\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right) = \left(\frac{dV}{dx}\right)$. Pareillement ayant $\left(\frac{d^3 y}{dx^2\,dt}\right)$, ſi l'on met ou $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = V$ ou $\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right) = U$, la valeur de $\left(\frac{d^3 y}{dx^2\,dt}\right)$ ſera ou $= \left(\frac{dV}{dt}\right)$ ou $= \left(\frac{dU}{dx}\right)$, & cela nous éclaircit ſuffiſamment ſur la ſignification de ſemblables formules, qui renferment encore de plus hauts différentiels.

XXII. Voilà donc à quoi le problème ſur le mouvement de la corde eſt réduit : il s'agit de trouver pour y une telle fonction des deux variables x & t, qui ſatisfaſſe à cette équation : $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{Fa}{2M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, outre qu'elle renferme les propriétés marquées cy-deſſus. Mais, avant que de faire attention à ces propriétés, cherchons en général toutes les fonctions poſſibles de x & t, qui étant miſes pour y, rendent $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{Fa}{2M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$. C'eſt le problème, dont M. d'*Alembert* a donné le premier une ſolution générale ; & il ſeroit à ſouhaiter qu'on découvrit une méthode propre à réſoudre réfoudre d'autres formules femblables. Une telle méthode ferviroit à réfoudre quantité de problèmes, qu'on a été obligé d'abandonner jusqu'ici.

XXIII. Avant que d'entreprendre la réfolution de cette équation $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{Fa}{2M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, je remarque qu'elle a une étenduë infinie. Car fi P, Q, R, font de telles fonctions de x & t, qui fatisfont à cette équation, étant pofées pour y, de forte qu'il y ait tant $y = P$, que $y = Q$, & $y = R$, il eft clair que cette valeur

$$y = \alpha P + \beta Q + \gamma R,$$

fatisfera également à ladite équation. La raifon en eft, puisque y n'a qu'une feule dimenfion dans notre équation. Cette remarque nous conduit dabord à la folution de M. *Bernoulli*, prife dans un fens plus général; car fi les équations $y = P$, $y = Q$, & $y = R$, renferment chacune une efpece particuliere de vibration de la corde, la même corde fera auffi fusceptible d'un mouvement repréfenté par cette équation $y = \alpha P + \beta Q + \gamma R$; & cette même compofition a auffi lieu dans tous les autres genres de vibrations, pourvu qu'elles foient infiniment petites, puisque l'équation, qui exprime le mouvement, ne contient dans tous fes termes qu'une feule dimenfion de l'appliquée y. C'eft donc ici, qu'il faut chercher le vray fondement de la folution de M. *Bernoulli*.

XXIV. Pour la mefure du tems, que j'ai marqué ici par t, je ne m'arrête pas directement à déterminer la longueur du pendule ifochrone. Mon but principal eft d'affigner pour chaque moment la figure & l'état, où la corde fe trouve alors : c'eft de là qu'on connoitra le vray mouvement de chaque point de la corde, & il fera enfuite aifé de le comparer avec le mouvement d'un pendule. Il eft auffi néceffaire de traiter fur ce pied-là le mouvement des cordes, puisqu'on n'eft pas affuré, fi tous les élémens de la corde achevent leurs vibrations en même tems. Mais, pour avoir une mefure abfoluë du tems, on n'a

 qu'à

qu'à introduire la hauteur g par laquelle un corps grave tombe dans une seconde, & à écrire $2\,t\sqrt{g}$ au lieu de t, & alors la quantité t nous donnera le tems exprimé en minutes secondes. Posons donc $2\,t\sqrt{g}$ pour t, & partant $4g\,dt^2$ pour dt^2, & notre équation, qui renferme le mouvement de la corde sera $\frac{1}{4g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{Fa}{2M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ ou bien : $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fag}{M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$. Ainsi ce n'est pas sur le pendule isochrone, que je fonde la connoissance du mouvement des cordes comme M. *Bernoulli* me le reproche tant de fois.

XXV. Ayant réduit la considération du tems à une notion précise, posons pour abréger $\frac{2Fag}{M} = cc$, & il s'agit de résoudre l'équation $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, ou de chercher pour y toutes les fonctions de t & x, qui satisfassent à cette équation. Puisque le rapport des différentio-différentiels de y est donné par cette équation; je commencerai par chercher celui des premiers différentiels, ou plutôt des quantités $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ & $\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Or comme celui-là est constant, il est aisé de voir que celui-cy le sera aussi. Supposons donc $\left(\frac{dy}{dt}\right) = k\left(\frac{dy}{dx}\right)$; & prenant de part & d'autre les différentiels en supposant la seule x variable, nous aurons $\left(\frac{ddy}{dt\,dx}\right) = k\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$. Ensuite prenons aussi les différentiels en supposant la seule t variable, & nous aurons $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = k\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right)$. Donc, puisque $\left(\frac{ddy}{dx\,dt}\right) = \left(\frac{ddy}{dt\,dx}\right) = k\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, nous en tirerons $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = kk\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$,

&

& cette équation devant être la même avec la proposée, nous donne $kk = cc$, & partant ou $k = c$ ou $k = - c$.

XXVI. Donc toutes les fonctions de x & t, qui étant mises pour y satisfont à l'une ou à l'autre de ces deux équations,

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = + c \left(\frac{dy}{dx}\right) \quad \& \quad \left(\frac{dy}{dt}\right) = - c \left(\frac{dy}{dx}\right)$$

rempliront aussi en général les conditions renfermées dans notre équation, qui détermine le mouvement de la corde :

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = cc \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$$

ou bien cette équation différentio-différentielle renferme les deux équations différentielles précedentes à la fois. Et partant nous sommes parvenus à résoudre cette égalité $\left(\frac{dy}{dt}\right) = k \left(\frac{dy}{dt}\right)$, ce qui se fera le plus promptement par la considération, qu'il est

$$dy = dt \left(\frac{dy}{dt}\right) + dx \left(\frac{dy}{dx}\right)$$

d'où nous tirons à cause de $\left(\frac{dy}{dt}\right) = k \left(\frac{dy}{dx}\right)$

$$dy = kdt \left(\frac{dy}{dx}\right) + dx \left(\frac{dy}{dx}\right) \text{ ou } dy = (dx + kdt) \left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Il faut donc que $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ soit une fonction de la quantité $x + kt$, pour que la formule trouvée soit possible, & par conséquent l'intégration donnera pour y une fonction de $x + kt$.

XXVII. De là nous concluons réciproquement, que toute fonction de $x+kt$, étant mise pour y, satisfait à la condition exprimée par la formule $\left(\frac{dy}{dt}\right)=k\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Cela est aussi clair de soi-même; car marquant par $\Phi(x+kt)$ une fonction quelconque de la quantité $x+kt$, & son différentiel complet par $(dx+k\,dt)\,\Phi'(x+kt)$, où $\Phi'(x+kt)$ marquera une autre fonction finie de $x+kt$, qui dépend de la nature de la fonction $\Phi(x+kt)$; si nous posons $y=\Phi(x+kt)$, nous aurons $dy=(dx+k\,dt)\,\Phi'(x+kt)$ & partant suivant nôtre maniere d'exprimer

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)=k\Phi'(x+kt)\ \&\ \left(\frac{dy}{dx}\right)=\Phi'(x+kt)$$

d'où il est evident qu'il est $\left(\frac{dy}{dt}\right)=k\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Nous voilà donc arrivés à une construction générale de cette formule $\left(\frac{dy}{dt}\right)=\left(\frac{dy}{dx}\right)$ qui nous donne en quantités finies pour y une fonction quelconque de la quantité $x+kt$.

XXVIII. Or puisque k est, ou $=+c$, ou $=-c$, à nôtre équation differentio-differentielle $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ posant $cc=\frac{2Fag}{M}$, satisfera également & toute fonction de la quantité $x+ct$, & toute fonction de la quantité $x-ct$. Prenant donc Φ & Ψ pour des marques des fonctions quelconques, & l'une & l'autre de ces deux valeurs:

$$y=\Phi(x+ct)\quad\&\quad y=\Psi(x-ct)$$

satisfera également à l'équation, qui contient le mouvement de la corde:

corde: $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fag}{M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, posant $c = \sqrt{\frac{2Fag}{M}}$.
Donc à la même équation satisfera aussi en général cette valeur composée : $$y = \Phi(x + ct) + \Psi(x - ct).$$

XXIX. Pour éclaircir cela mieux, il faut remarquer que toute fonction, de quelque nature qu'elle soit, peut toûjours être représenter par une ligne courbe, dont l'appliquée exprime une certaine fonction de l'abscisse. Ayant donc construit pour la fonction marquée par Φ une ligne courbe ES, & pour la fonction marquée par Ψ une autre ligne courbe FT, si nous prenons dans celle-là l'abscisse $EQ = x + ct$, & dans celle-cy l'abscisse $FR = x - ct$, les appliquées seront : Fig. 2

$$QS = \Phi(x + ct) \quad \& \quad RT = \Psi(x - ct)$$

& la somme de ces deux appliquées, ou de leur multiple quelconque, nous fournira toûjours une valeur convenable pour y, qui satisfera à l'équation $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, & qui par consequent sera propre à nous représenter le mouvement véritable d'une corde, pourvu qu'elle soit conforme aux autres propriétés mentionnées au commencement.

XXX. Or, sans faire encore attention à ces propriétés, & m'arrêtant uniquement à l'équation $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, il est important de remarquer, que les deux courbes ES & FT sont absolument arbitraires, & qu'on les peut prendre à volonté ; car, quelles que soient ces deux courbes, si nous y prenons les abscisses $EQ = x + ct$ & $FR = x + ct$, & que nous posions $y = QS + RT$, ou bien $y = n(QS + RT)$, il est certain que cette valeur satisfait à notre

 équa-

équation ; ce qu'il feroit aussi aisé de prouver indépendamment de l'analyse, que je viens de déveloper. Or, ce qui est le principal, ces deux courbes appliquées de la maniere enseignée, satisfont également, soit qu'elles soient exprimibles par quelque équation, ou qu'elles soient tracées d'une maniere quelconque, de sorte qu'elles ne puissent être assujetties à aucune équation. Le Lecteur est prié de réflèchir bien sur cette circonstance, qui contient le fondement de l'universalité de ma solution, contestée par M. d'*Alembert*.

XXXI. Mais voyons maintenant, de quelle condition doivent être ces deux courbes, ou la nature des deux fonctions Φ & Ψ, afin que les premieres propriétés de la corde soient maintenues. Or d'abord il faut, que posant $x = o$, l'appliquée y evanouïsse toûjours, de quelque durée que soit le tems t: soit donc $x = o$, & il faut qu'il soit :

$$\Phi(ct) + \Psi(-ct) = o \quad \text{ou} \quad \Psi(-ct) = -\Phi(ct)$$

d'où l'on voit que la fonction exprimée par Ψ est égale à celle qui est exprimée par Φ, & que prenant les abscisses négatitives, les appliqueés deviennent aussi négatives en conservant les mêmes valeurs. Les deux courbes ES & FT se réduisent donc à une seule courbe, qui doit être telle, qu'aux abscisses négatives réponde une branche semblable à celle qui répond aux abscisses positives ; mais qu'elle tombe de l'autre côté de l'axe. Si donc Φ marque une telle fonction, que j'ai nommée autrefois impaire, puisqu'elle ne contient que des puissances impaires de la quantité, dont elle est fonction, notre équation sera : $y = \Phi(x + ct) + \Phi(x - ct)$.

XXXII. L'autre condition exige, que posant $x = a$, la valeur de y evanouïsse également, quelque quantité que puisse avoir le tems t: il faut donc qu'il soit : $\Phi(a + ct) + \Phi(a - ct) = o$.

La courbe doit donc être telle, que si l'on prend l'abscisse $= a$, & & qu'on y ajoute, ou en retranche la même quantité quelconque, les appliquées, qui répondent à deux telles abscisses soyent égales, mais affec-

affectées de divers ſignes. Cette courbe aura donc non ſeulement autour du point, où eſt pris le commencement des abſciſſes, des branches alternativement ſemblables, mais auſſi autour du point, où ſe termine l'abſciſſe $= a$. De là il s'enſuit, comme j'ai fait voir, qu'elle doit avoir une infinité de tels points éloignés entr'eux du même intervalle $= a$, auprès desquels les branches de la courbe ſoyent de part & d'autre alternativement ſemblables.

XXXIII. Si l'on examine plus exactement les raiſons, ſur lesquelles je viens de fonder l'identité des fonctions Φ & Ψ, & qu'on faſſe ſurtout attention, que les deux courbes ne ſont aſſujetties à aucune loi, on s'appercevra aiſément, que l'égalité $\Psi(-ct) = -\Phi(ct)$ pourroit auſſi avoir lieu, ſans que les deux fonctions fuſſent égales. Mais il faut encore avoir égard à une autre circonſtance renfermée dans la propoſition du problème, qui exige abſolument cette égalité des deux fonctions. On ſuppoſé que la courbe commence ſon mouvement du repos; donc il faut que, poſant le tems $t = 0$, la viteſſe de chaque point de la corde, qui eſt exprimée par $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ evanouïſſe. Or ayant trouvé $y = \Phi(x + ct) + \Psi(x - ct)$, la différentiation fournit

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = c\,\Phi'(x + ct) - c\,\Psi'(x - ct).$$

Poſons donc $t = 0$, & il faut qu'il ſoit $\Phi'(x) = \Psi'(x)$, d'où l'identité des fonctions Φ' & Ψ' & partant auſſi des fonctions Φ & Ψ s'enſuit ouvertement. Nous n'avons donc qu'une ſeule courbe, qui nous ſervira de régle pour déterminer le mouvement de la corde.

XXXIV. Cette courbe doit donc être telle, comme elle eſt préſentée dans la troiſième figure: ſi AB repréſente la longueur de la corde $= a$, la courbe ADB s'étendra de l'un & l'autre coté à l'infini, Fig. 3.
en ſorte que la portion AD'B' ſoit égale & ſemblable à la courbe ADB, & de l'autre côté de même la branche B'D'A ſoit égale & ſem-

ſemblable à la branche BDA. Or la courbe ADB eſt abſolument arbitraire, comme j'ai déjà fait voir; & il n'importe ſi elle eſt réguliere, ou compriſe dans quelque équation, ou ſi elle eſt irréguliere, ou tracée d'une maniere quelconque. Ayant donc décrit une telle courbe ADB quelconque, qui paſſe par les points A & B, on n'a qu'à réïterer la deſcription de la même courbe à l'infini, tant vers la droite que vers la gauche, en la poſant alternativement au deſſus & au deſſous de l'axe, de ſorte que partout les bouts ſemblables ſoient joints enſemble; ainſi en A on joigne la même courbe ADB par le bout A, & en B par le bout B, tout comme j'en ai enſeigné la conſtruction dans mon Mémoire ſur cette matiere.

XXXV. Ayant donc décrit une telle courbe quelconque, elle nous découvrira toujours un mouvement, dont la corde eſt ſuſceptible. Car poſant $t = 0$, nous en connoitrons d'abord la figure, que la corde doit avoir au commencement, pour que ce mouvement s'enſuive. Puiſque nous avons pour un tems quelconque t,

$$y = n\,\Phi\,(x + ct) + n\,\Phi\,(x - ct)$$

prenant pour n une fraction aſſés petite, afin que les appliquées dans la figure de la corde demeurent toujours quaſi infiniment petites, nous en tirerons pour la figure initiale de la corde cette équation :

$$y = n\,\Phi\,(x) + n\,\Phi\,(x) = 2\,n\,\Phi\,(x)$$

c'eſt à dire, prenant ſur notre courbe l'abſciſſe $AP = x$, l'appliquée PM priſe $2n$ fois nous donnera l'appliquée pour la figure initiale de la corde, qui convient à l'abſciſſe x. Donc, ſi les appliquées de la courbe AMB ſont aſſés petites, on pourra prendre $n = \frac{1}{2}$, & la figure arbitraire ADB elle-même repréſentera la figure initiale de la corde.

XXXVI. Réciproquement donc, dès qu'on connoit la figure initiale, qu'on aura donnée à la corde avant que de la relâcher, rien ne ſera plus aiſé que de décrire notre courbe infinie B′D′ADB′D &c. qui

nous

nous fera connoitre le mouvement, que la corde pourſuivra. On tracera la courbe AMDB, égale & ſemblable à la figure initiale de la corde, & on en réïtérera la conſtruction, tant vers la gauche au delà du point A, que vers la droite au delà du point B, alternativement au deſſus & au deſſous de l'axe, en ſorte que partout les bouts qu'on a joints enſemble ſoient les mêmes. Cette conſtruction a toujours lieu, de quelque nature que ſoit la figure initiale propoſée de la courbe, & il ne s'agit ici que de la portion ADB; laquelle quand elle-même auroit d'autres continuations de part & d'autre en vertu de ſa nature, elles n'entrent en aucune conſidération. Ainſi, ſi la figure ADB étoit un arc de cercle, ſans ſe ſoucier de la continuation naturelle du cercle, on répétera la deſcription de ce même arc de cercle ADB à l'infini alternativement au deſſus & au deſſous de l'axe; & la même régle a toujours lieu, de quelque nature que puiſſe être la figure initiale de la corde.

XXXVII. Les différentes parties ſemblables de cette courbe ne ſont donc liées entr'elles par aucune loi de continuité, & ce n'eſt que par la deſcription, qu'elles ſont jointes enſemble. Par cette raiſon il eſt impoſſible, que toute cette courbe ſoit compriſe dans quelque équation, à moins que par hazard la figure ADB ne ſoit telle, que ſa continuation naturelle entraine toutes les autres parties réïtérées; & c'eſt le cas, où la figure ADB eſt la trochoïde Taylorienne, ou ſelon M. *Bernoulli* un mélange de pluſieurs telles trochoïdes. C'eſt auſſi ſelon toute apparence la raiſon, pourquoi Mrs. *Bernoulli* & d'*Alembert* ont cru, que le problème n'étoit réſoluble que dans ces cas. Mais, de la maniere que je viens de conduire la ſolution, il n'eſt pas néceſſaire, que la courbe directrice ſoit exprimée par quelque équation, & la ſeule conſidération du trait de la courbe ſuffit à nous faire connoitre le mouvement de la corde, ſans l'aſſujettir au calcul. Je ferai auſſi voir, que ce mouvement n'eſt pas moins régulier, que ſi la figure initiale étoit une trochoïde, & par conſéquent la régularité du

 mou-

mouvement ne peut être alléguée en faveur des trochoïdes à l'exclusion de toutes les autres courbes, comme M. *Bernoulli* semble le soutenir.

XXXVIII. Or, pour déterminer par cette méthode le véritable
Fig. 4. mouvement de la corde, supposez que sa figure initiale aît été la courbe AMB (Fig. 4.), & il s'agit de déterminer la figure que la corde aura à chaque tems proposé de t secondes, depuis le commencement du mouvement. Pour cet effet qu'on décrive par la description réitérée de cette même courbe AMB, la courbe directrice AMDB, (Fig. 3.) continuée de part & d'autre à l'infini, comme j'ai enseigné cy-dessus; & pour connoitre le mouvement du point M, qui se fait par hypothese dans la droite MP, qu'on prenne dans la directrice (Fig. 3.) de part & d'autre du point P les intervalles $PQ = PR = ct$, & ayant tiré les appliquées QS & RT, qu'on prenne Pm (Fig. 4.) égale à la semi-somme de ces appliquées, ou $Pm = \frac{1}{2}(QS + RT)$; & le point m sera le lieu, où le point de la corde M se trouvera après le tems t. De là il sera aisé de juger de la vitesse du point m, en comparant son lieu avec celui, où il se trouvera à l'instant suivant.

XXXIX. Si l'on prend le tems t de tant de secondes, qu'il devienne $ct = a$, alors il faut prendre de part & d'autre du point P les intervalles $PQ' = PR' = a = AB$; & il est évident qu'il y aura $BQ' = B'R' = AP$, & partant les appliquées $Q'S'$ & $R'T'$ égales entr'elles. Donc, après ce tems $t = \frac{a}{c}$ le point de la corde M se trouvera de l'autre côté de l'axe AB en N, de sorte que $PN = Q'S'$: d'où il est évident qu'après ce tems toute la corde aura la figure ANB égale à la figure $B'T'DA$, & partant aussi égale à la figure initiale AMB, mais dans une situation renversée, de sorte que la figure ANB soit semblable à la figure BMA. Puisque les tangentes en S' & T' sont également inclinées à l'axe, en reculant les points Q' & R' infiniment peu également, la somme des

des appliquées demeurera la même, & partant après le tems $\frac{a}{c} + dt$ le point M de la corde sera encore en N: donc, lorsque la corde sera parvenuë dans la situation ANB, elle n'aura plus de mouvement.

XL. Une vibration ayant donc commencé par l'état initial AMB, elle finira par l'état ANB, & partant le tems de cette vibration sera $= \frac{a}{c}$ secondes, & il est évident que toutes les autres vibrations suivantes seront de la même durée. Pour mieux connoitre ce tems, on n'a qu'à se rappeller, que nous avons mis c pour la quantité $\sqrt{\frac{2Fag}{M}}$; donc le tems d'une vibration de la corde sera $= \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$ secondes; & cette expression paroit plus propre à nous faire connoitre ce tems, que la longueur d'un pendule simple isochrone. Il faut remarquer ici, que M marquant le poids de la corde, & F la force tendante aussi expressible par un poids, ces deux quantités M & F sont homogenes entr'elles, de même que les deux quantités a & g, dont celle-là marque la longueur de la corde, & celle-cy la hauteur, par laquelle un corps pesant tombe dans une seconde, qui est de $15\frac{5}{8}$ pieds de Rhin. De là on connoitra promptement le nombre de vibrations, que la corde rend dans une minute seconde, car ce nombre sera $= \sqrt{\frac{2Fg}{Ma}}$.

XLI. Il est certain qu'après le tems $t = \frac{a}{c}$ la corde parvienne dans la situation ANB; mais il pourroit bien arriver, qu'elle s'y fût trouvée déjà pendant ce tems une ou plusieurs fois, & dans ces cas le tems d'une vibration se réduiroit à la moitié, ou au tiers, ou à quelqu'autre partie aliquote. Cela dépend de la figure initiale qu'on aura donnée à la corde, laquelle, lorsqu'elle n'a qu'un ventre, comme dans la quatrième figure, le tems d'une vibration sera sans aucun doute

Fig. 5. $= \frac{a}{c} = \sqrt{\frac{Ma}{2Fg}}$ ſecondes. Mais, ſi la figure initiale de la corde avoit deux ventres égaux AEC, CFB, comme dans la cinquième figure, & que la partie AEB fut égale & ſemblable à la figure BFC, on voit par notre conſtruction, que le point C demeureroit toujours en repos, & que le mouvement de la corde ſeroit le même que celui d'une corde de la moitié de longueur, & d'une tenſion égale. Or il faut pour produire ces vibrations deux fois plus rapides, que le nœud de la figure initiale C ſe trouve préciſément au milieu de la longueur, & que les deux ventres AEC, BFC, ſoyent égaux & ſemblables entr'eux: car ſans cette condition le point C ne reſteroit point immobile.

XLII. Ce que M. *Bernoulli* a remarqué ſur le mêlange de deux ou pluſieurs trochoïdes, eſt également applicable à toutes les autres courbes imaginables. Car, quelle que ſoit la figure initiale de la corde AMB fig. 4. elle peut ſervir d'axe à une autre figure ſemblable à la fig. 5: & celle-cy pourroit encore ſervir d'axe à d'autres figures ſemblables à pluſieurs ventres. Dans ces cas le ſon total de la corde ſera un mêlange de pluſieurs ſons, dont l'un ſeroit l'octave, les autres la douzième, la quinzième, la dix-ſeptième, & ainſi de ſuite. Ce mêlange de ſons rendus par une corde à la fois, que M. *Bernoulli* a le premier ſi heureuſement expliqué, n'eſt donc pas un effet ſi eſſentiel de la combinaiſon des trochoïdes Tayloriennes, qu'il ne puiſſe également être produit par une ſemblable combinaiſon d'autres courbes quelconques. Et quand on fait réflexion à la maniere, dont on eſt accoutumé de frapper les cordes, il eſt très probable, qu'elles ne prennent jamais la figure des trochoïdes, ni qu'elles y approchent de plus en plus: puisque tous les phénomenes, que M. *Bernoulli* allégue, peuvent être également l'effet de toute autre figure quelconque.

XLIII. Il me ſemble que ces réflexions ſont ſuffiſantes à mettre ma ſolution à l'abri de toutes les objections, qui peuvent l'avoir renduë ſuſpecte à M. *Bernoulli*, & ſurtout à M. d'*Alembert*. Celui-cy n'ayant allé-

allégué aucune raiſon, s'eſt contenté d'avertir les Lecteurs de mon Mémoire, qu'ils ne s'imaginaſſent pas, que ma ſolution étoit ſi générale que je l'avois donnée, & qu'elle ne s'étendoit pas à des figures quelconques, qu'on auroit données à la corde au commencement. Mais M. *Bernoulli* ſemble ſoutenir, que pour la production des vibrations iſochrones il faille abſolument que la force accélératrice ſoit toujours proportionelle à l'eſpace parcouru, jusqu'au lieu naturel. Selon ce ſentiment, ayant trouvé en général la force accélératrice $= -\frac{Fa}{M} \cdot \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, il faudroit la poſer proportionelle à la diſtance y, pour avoir une telle équation $-\frac{Fa}{M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \frac{y}{c}$, dont l'intégrale, puisque la conſidération du tems n'y entre plus, ſeroit $y = n \sin x \sqrt{\frac{M}{Fac}}$, & pour que l'appliquée évanouïſſe auſſi en poſant $x = a$, il faudroit qu'il fut $\sqrt{\frac{M}{Fac}} = \frac{\lambda\pi}{a}$, marquant par λ un nombre entier quelconque. On auroit donc $c = \frac{Ma}{\lambda\lambda\pi\pi F}$, d'où réſultent en effet toutes les trochoïdes Tayloriennes.

XLIV. Mais, outre que cette ſuppoſition ſeroit auſſi contraire à la combinaiſon de deux ou pluſieurs trochoïdes, que M. *Bernoulli* reconnoit pourtant dans le mouvement d'une corde, je remarque que cette hypotheſe eſt abſolument arbitraire, & qu'une infinité d'autres forces ſont auſſi propres à produire l'iſochroniſme dans le mouvement des cordes. Si la force accélératrice devoit uniquement dépendre de l'appliquée y, de ſorte qu'elle fut toujours la même à la même diſtance y, quelque grande qu'ait été l'excurſion de la corde, je conviens qu'il n'y en auroit pas d'autres propres à procurer l'iſochroniſme, que celle qui ſeroit proportionelle à la diſtance y. Mais, dès qu'on accorde, que cette force pourroit auſſi dépendre du plus grand éloignement, on ne ſauroit

plus

plus disconvenir, qu'une infinité d'autres forces ne fut auſſi propre à ce deſſein. Or M. *Bernoulli* a fait voir lui-même, qu'il peut y avoir de l'iſochroniſme en des mouvemens, où la force ſollicitante du corps, n'eſt pas ſimplement proportionelle à la diſtance; & les manieres qu'il rapporte, ne ſont qu'un cas particulier de la méthode générale, dont j'enviſage ici le mouvement des cordes.

XLV. Tout ce que je viens de dire, ne regarde que les cordes, qui ſont de la même épaiſſeur par toute leur étenduë; & je conviens aiſément, que ſi l'épaiſſeur de la corde étoit variable, il feroit impoſſible d'en déterminer le mouvement auſſi généralement, que j'ai fait ici pour les cordes également épaiſſes. Mais ce n'eſt pas l'incommenſurabilité des tems de diverſes vibrations, dont la même corde eſt ſuſceptible, qui arrête la ſolution, comme M. *Bernoulli* ſemble l'inſinuer. C'eſt plutôt par une imperfection de l'analyſe même, qu'il n'eſt pas poſſible de conſtruire l'équation differentio-differentielle, qui renferme alors le mouvement. Car, comme pour les cordes d'une épaiſſeur uniforme j'ai trouvé cette équation $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{Fa}{2M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, qui a admis une conſtruction générale; ainſi les cordes d'une épaiſſeur variable conduiſent à une telle équation $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = X\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, où X eſt une certaine fonction de x, qui dépend de l'épaiſſeur. Or, puiſqu'il ne paroit pas, de quelle nature doit être la fonction y, pour qu'elle ſatisfaſſe à cette équation en général, c'eſt la cauſe véritable que la détermination du mouvement de ces cordes ſemble ſurpaſſer nos forces: cependant il n'eſt pas difficile de donner des ſolutions particulieres pour pluſieurs cas, ſemblables à celles qui ſont tirées des trochoïdes pour les cordes uniformement épaiſſes.

PRIN-