

# UNE DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE BERNSTEIN SUR LES REPRÉSENTATIONS DE QUASI-CARRÉ-INTÉGRABLE DE $GL_n(F)$ OÙ $F$ EST UN CORPS LOCAL NON ARCHIMÉDIEN

---

ASHER N. AUDEL  
JUILLET 2004

---

Mémoire de DEA Mathématiques Pures  
sous la direction de Monsieur Guy Henniart  
Département de Mathématiques  
Université Paris-Sud XI-Orsay

## Première partie 1. Groupes réductifs

Soit  $k$  un corps algébriquement clos et  $F \subset k$  un sous-corps. Pour l'instant,  $F$  est un corps quelconque, mais plus tard, il sera toujours local non archimédien à corps résiduel fini. Soit  $\mathbf{G}$  un groupe algébrique défini sur  $F$  (un  $F$ -groupe). Si  $N, N' \subset \mathbf{G}$  sont deux  $F$ -sous-groupes unipotents (resp. normaux) connexes fermés, alors  $N \cdot N'$  l'est aussi (voir [9] Ch. 2.2.7). Donc, il existe un  $F$ -sous-groupe unipotent (resp. résoluble) normal connexe fermé maximal de  $\mathbf{G}$ ; c'est le *radical unipotent*  $R_u(\mathbf{G})$  (resp. *radical*  $R(\mathbf{G})$ ) de  $\mathbf{G}$ . On a  $R_u(\mathbf{G}) = R(\mathbf{G})_u$ . Si  $R_u(\mathbf{G})$  (resp.  $R(\mathbf{G})$ ) est trivial on appelle  $\mathbf{G}$  *réductif* (resp. *semi-simple*).

**Proposition 0.1.** *Si  $\mathbf{G}$  est un  $F$ -groupe algébrique réductif, alors  $R(\mathbf{G}) = Z(\mathbf{G})^0$ , i.e. la composante connexe de l'élément neutre du centre de  $\mathbf{G}$ . En particulier,  $Z(\mathbf{G})^0$  est un  $F$ -groupe aussi.*

*Démonstration.* Voir [4] Prop. 11.21 et Thm. 18.2. □

Maintenant soit  $G$  le groupe des  $F$ -points d'un  $F$ -groupe algébrique réductif  $\mathbf{G}$ . En général, on écrit un  $F$ -groupe algébrique en caractères gras et son groupe des  $F$ -points en caractères normaux.

**Exemple 0.2.** Le groupe additif  $\mathbf{G}_a = k$  et le groupe multiplicatif  $\mathbf{G}_m = k^\times$  sont les premiers exemples de groupes algébriques, ils peuvent tous les deux être définis sur  $F$ .

Soit  $\mathbf{M}_{n \times n}$  l'ensemble des matrices  $n \times n$  sur  $k$ . On appelle le sous-ensemble ouvert,  $\mathbf{GL}_n = \{M \in \mathbf{M}_{n \times n} : \det(M) \neq 0\}$  avec multiplication des matrices pour opération de groupe, le *groupe linéaire général*. Il peut toujours être défini sur  $F$ , et son groupe des  $F$ -points est noté  $GL_n(F)$ .

Si un groupe algébrique  $\mathbf{G}$  est affine comme variété, alors on l'appelle un *groupe algébrique linéaire*. Tout sous-groupe fermé de  $\mathbf{GL}_n$  est linéaire. Les groupes de matrices classiques  $\mathbf{SL}_n$ ,  $\mathbf{O}_n$ ,  $\mathbf{SO}_n$ , et  $\mathbf{Sp}_{2n}$  sont les exemples principaux.

Si  $A$  est une  $k$ -algèbre de dimension  $n$ , le groupe des automorphismes  $\text{Aut}(A)$  peut s'identifier comme un sous-groupe fermé de  $\mathbf{GL}_n$  en choisissant une base pour  $A$ . En particulier, si  $V$  est un espace vectoriel sur  $k$  de dimension  $n$ , on appelle  $\mathbf{GL}(V) = \text{Aut}(V)$ , qui est isomorphe comme groupe algébrique à  $\mathbf{GL}_n$ .

On va s'intéresser principalement aux groupes linéaires généraux  $G = G_n = GL_n(F)$ , donc en développant toute la théorie générale pour un groupe réductif quelconque on va traduire tous les résultats pour les  $G_n$ .

## 1. SOUS-GROUPES PARABOLIQUES

**1.1. Caractères rationaux.** Soit  $\mathbf{G}$  un  $F$ -groupe algébrique. On appelle le groupe des morphismes de groupes algébriques,  $X(\mathbf{G}) = \text{Hom}(\mathbf{G}, \mathbf{G}_m)$ , le groupe de *caractères rationaux* de  $\mathbf{G}$  et son sous-groupe de  $F$ -morphisme  $X(\mathbf{G})_F$  le groupe de *caractères  $F$ -rationaux*.

**Définition 1.1.** On appelle  $\mathbf{G}$  *diagonalisable* si  $X(\mathbf{G})$  engendre  $k[\mathbf{G}]$  comme  $k$ -module. Si de plus  $X(\mathbf{G})_F$  engendre  $k[\mathbf{G}]$  (ou de manière équivalente,  $X(\mathbf{G})_F$  engendre  $F[\mathbf{G}]$ ) alors on appelle  $\mathbf{G}$   *$F$ -déployé*.

**Définition 1.2.** On définit un *tore (algébrique)* de  $G$  comme sous-groupe algébrique  $k$ -isomorphe à  $\mathbf{G}_m \times \cdots \times \mathbf{G}_m$ . On définit un *tore* de  $G$  comme sous-groupe  $T \subset G$  tel que  $T \otimes k$  est un tore de  $\mathbf{G}$ . Alors,  $T$  est  *$F$ -déployé* si en fait  $T \simeq F^\times \times \cdots \times F^\times$ .

**Proposition 1.3.** Soit  $\mathbf{G}$  un  $F$ -groupe algébrique. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

- a)  $\mathbf{G}$  est diagonalisable (resp.  $F$ -déployé),
- b)  $\mathbf{G}$  est isomorphe (resp.  $F$ -isomorphe) à un sous-groupe fermé d'un tore,
- c)  $X(\mathbf{G})$  est un groupe abélien de rang fini (resp.  $X(\mathbf{G}) = X(\mathbf{G})_F$ ).

De plus,  $\mathbf{G}$  est connexe et diagonalisable si et seulement si  $\mathbf{G}$  est isomorphe à un tore si et seulement si  $X(\mathbf{G})$  est libre.

*Démonstration.* Voir [4] §8, [7] §16, et [9] Ch. 3.2. □

**1.2. Sous-groupes de Borel.** On définit tous les sous-groupes d'un groupe algébrique réductif  $\mathbf{G}$  qui nous intéressent (surtout les tores et les sous-groupes paraboliques et de Levi) à l'aide de la géométrie. Pour le groupe  $\mathbf{GL}_n$  on trouve les définitions invariantes, en termes des drapeaux, qui peuvent s'appliquer au groupe  $\mathbf{GL}_n(F)$ . Les mêmes sortes de définitions existent pour les autres groupes classiques, mais on ne les détaille pas.

**Définition 1.4.** On définit un *sous-groupe de Borel* de  $\mathbf{G}$  comme sous-groupe résoluble connexe fermé maximal de  $\mathbf{G}$ . Tous les sous-groupes de Borel de  $\mathbf{G}$  sont conjugués. On appelle un sous-groupe fermé de  $\mathbf{G}$  *parabolique* s'il contient un sous-groupe de Borel.

**Théorème 1.5.** Soit  $\mathbf{G}$  un  $F$ -groupe algébrique réductif. Alors, on a les propriétés suivantes :

- a) tous les  $F$ -sous-groupes de Borel de  $G$  sont conjugués sur  $G$ ,
- b) tous les  $F$ -tores maximaux de  $\mathbf{G}$  sont conjugués sur  $G$ ,
- c) si  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{P}'$  sont deux  $F$ -sous-groupes paraboliques conjugués de  $G$ , alors ils sont conjugués sur  $G$ .

*Démonstration.* Voir [4] Thm. 20.9. □

On fixe un ( $F$ -)sous-groupe de Borel  $\mathbf{B} \subset \mathbf{G}$  et un tore ( $F$ -déployé) maximal  $\mathbf{T}$  dans le centre de  $\mathbf{B}$ . Soit  $\mathbf{P}$  un ( $F$ -)sous-groupe parabolique qui contient  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{N} = R_u(\mathbf{P})$  son radical unipotent. Il existe un unique ( $F$ -)sous-groupe réductif connexe  $\mathbf{M} \subset \mathbf{P}$  tel que  $\mathbf{T} \subset Z(\mathbf{M})$  (en fait,  $\mathbf{T} = Z_G(\mathbf{M})$  par [4] Prop. 20.4); c'est le *sous-groupe de Levi* du sous-groupe parabolique  $\mathbf{P}$ . On sait que  $\mathbf{P}$  normalise  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{M} \cap \mathbf{N}$  est trivial donc il y a une décomposition (semi-directe) de Levi  $\mathbf{P} = \mathbf{M}\mathbf{N}$ . Deux tels sous-groupes de Levi sont conjugués par un élément de  $\mathbf{N}$ , voir [7] §30.

En gros, cela est la situation générale qui comprend les ( $F$ -)sous-groupes paraboliques, réductifs, et unipotents de  $\mathbf{G}$ . Le sous-groupe de Levi  $\mathbf{M}$  détermine le sous-groupes parabolique  $\mathbf{P}$ , et comme réciproque, on a la suivante :

**Proposition 1.6.** Soit  $\mathbf{N}$  un sous-groupe unipotent fermé de  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{P} = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{N})$ . On suppose que  $\mathbf{N}$  est contenu dans un sous-groupe de Borel de  $\mathbf{G}$  et que  $R_u(\mathbf{P}) \subset \mathbf{N}$ . Alors,  $\mathbf{P}$  est un sous-groupe parabolique de  $\mathbf{G}$  avec  $\mathbf{N} = R_u(\mathbf{P})$ .

*Démonstration.* Voir [7] Prop. 20.3. □

**Exemple 1.7.** Soit  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_n = \mathbf{GL}_n$ . Le  $F$ -sous-groupe de Borel standard  $\mathbf{B} \subset \mathbf{G}$  est le groupe des matrices triangulaires supérieures, son tore  $F$ -déployé maximal  $\mathbf{T}$  est le groupe des matrices diagonales, et son radical unipotent  $\mathbf{U} = R_u(\mathbf{B})$  est le groupe des matrices triangulaires supérieures ayant 1 sur la diagonale. Les sous-groupes paraboliques standard sont numérotés par les partitions ordonnées de  $n$ , i.e. les vecteurs  $\beta = (n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}_+^r$  tels que  $n_1 + \dots + n_r = n$ . Une partition  $\beta$  de  $n$  coupe l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  en blocs  $\{I_1, \dots, I_r\}$ , où

$$I_1 = \{1, \dots, n_1\}, \dots, I_r = \{n_1 + \dots + n_{r-1} + 1, \dots, n\}.$$

On appelle  $\alpha$  une sous-partition de  $\beta$ , et on écrit  $\alpha \leq \beta$ , si tout bloc de  $\alpha$  est contenu dans un bloc de  $\beta$ .

Soit  $\beta = (n_1, \dots, n_r)$  une partition de  $n$ , alors le sous-groupe parabolique standard correspondant  $\mathbf{P}_\beta$  est le groupe des matrices triangulaires supérieures par blocs ; le sous-groupe de Levi correspondant  $\mathbf{M}_\beta = \mathbf{G}_{n_1} \times \dots \times \mathbf{G}_{n_r}$ , plongée dans  $\mathbf{G}_n$  comme sous-groupe des matrices diagonales par blocs ; et le radical unipotent correspondant  $\mathbf{N}_\beta$  est le groupe des matrices triangulaires supérieures ayant des matrices identité sur la diagonale,

$$\begin{pmatrix} g_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & g_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 & & \\ & \ddots & \\ & & g_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n_1} & * & * \\ & \ddots & * \\ & & \mathbf{1}_{n_r} \end{pmatrix}$$

respectivement, où  $g_i \in \mathbf{G}_{n_i}$  et  $\mathbf{1}_{\beta_i}$  est la matrice identité dans  $\mathbf{G}_{n_i}$ . Si  $\alpha \leq \beta$ , alors  $\mathbf{M}_\alpha$  est un sous-groupe de Levi de  $\mathbf{M}_\beta$  et  $\mathbf{P}_\alpha \subset \mathbf{P}_\beta$ .

Pour avoir une description plus invariante, en identifiant  $\mathbf{GL}_n(F) \simeq \mathbf{GL}(V)$  pour un espace vectoriel  $V$  de dimension  $n$  sur  $k$ , on définit un *drapeau* dans  $V$  par une suite strictement croissante de sous-espaces

$$W = \{W_0 \subset \dots \subset W_r\},$$

où  $W_0$  n'est pas trivial et  $W_r = V$ . Alors, tout sous-groupe parabolique  $\mathbf{P} \subset \mathbf{GL}(V)$  est le stabilisateur d'un drapeau dans  $V$ , i.e.  $pW_i = W_i$  pour tout  $p \in \mathbf{P}$  et  $0 \leq i \leq r$ . Évidemment, un sous-groupe de Borel de  $\mathbf{GL}(V)$  est le stabilisateur d'un drapeau complet, i.e. un drapeau de longueur  $r = n - 1$ . On voit que toutes ces définitions peuvent être données pour  $\mathbf{GL}_n(F)$ .

**Définition 1.8.** Soit  $G = G_n = \mathbf{GL}_n(F) \simeq \mathbf{GL}(V)$  pour un  $F$ -espace vectoriel  $V$  de dimension  $n$ . On définit un sous-groupe parabolique  $P$  de  $G$  par le stabilisateur d'un drapeau  $\{W_0 \subset \dots \subset W_r\}$  de  $V$ , i.e.  $P$  est l'ensemble des  $g \in G$  tels que  $gW_i = W_i$  pour  $0 \leq i \leq r$ , et un sous-groupe de Borel de  $G$  par le stabilisateur d'un drapeau complet. Il existe un sous-groupe distingué  $N \subset P$  qui agit trivialement sur tous les espaces  $W_{i+1}/W_i$  ; c'est le radical unipotent de  $P$ . On a la décomposition de Levi,  $P = MN$ , où  $M = \prod_{i=0}^{r-1} \mathbf{GL}(W_{i+1}/W_i)$ . On identifie le sous-groupe de Borel standard  $B$  avec le groupe des matrices triangulaires supérieures.

**1.3. Décomposition de Bruhat.** Soit  $\mathbf{G}$  un groupe algébrique réductif et  $\mathbf{T}$  un tore maximal de  $\mathbf{G}$ . On définit le *groupe de Weyl* de  $\mathbf{G}$  relatif à  $\mathbf{T}$ ,

$$W = W(\mathbf{G}, \mathbf{T}) = N_G(\mathbf{T})/Z_G(\mathbf{T}).$$

Tous les tores maximaux de  $\mathbf{G}$  sont conjugués, donc les groupes de Weyl relatifs aux tores maximaux sont isomorphes (voir [4] Ch. IV.11.19). On a aussi  $Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}) = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})^0$  donc  $W$  est un groupe fini. On choisit toujours les représentants de  $W(\mathbf{G}, \mathbf{T})$  dans  $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}) \subset \mathbf{G}$  quand ils sont utiles.

**Théorème 1.9** (Décomposition de Bruhat). *Soit  $\mathbf{B}$  un sous-groupe de Borel contenant  $\mathbf{T}$ , alors, on a la décomposition disjointe*

$$\mathbf{G} = \coprod_{w \in W(\mathbf{G}, \mathbf{T})} \mathbf{B}w\mathbf{B}.$$

*Démonstration.* Voir [4] IV.14.12. □

## 2. ALGÈBRES DE LIE ET RACINES

Une autre perspective sur les groupes réductifs, et désormais linéaires, est celle de la théorie des groupes de Lie.

**2.1. Racines.** Soit  $\mathbf{T}$  un tore défini sur  $k$  et soit  $r : \mathbf{T} \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  une représentation de  $\mathbf{T}$  dans un espace vectoriel  $V$  de dimension finie sur  $k$ . Comme  $\mathbf{T}$  est abélien et par le lemme de Shur, toute représentation irréductible de  $\mathbf{T}$  est de degré un, i.e. un caractère rationnel, donc

$$V = \bigoplus_{\alpha \in X(\mathbf{T})} V_{\alpha},$$

où  $V_{\alpha}$  est l'espace propre de  $\alpha$ ,

$$V_{\alpha} = \{v \in V : r(t)v = \alpha(t)v, \quad \forall t \in \mathbf{T}\}.$$

Les caractères  $\alpha \in X(\mathbf{T})$  tels que  $V_{\alpha}$  soit non-trivial sont appelés les *poids* de  $\mathbf{T}$  dans  $V$ . Évidemment, il n'y en a qu'un nombre fini.

Maintenant, si  $\mathbf{T}$  est un tore maximal de  $\mathbf{G}$ , alors  $\mathbf{T}$  agit sur  $\mathbf{G}$  par conjugaison,  $\mathrm{Int} : \mathbf{T} \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathbf{G})$ , où  $\mathrm{Int}(t)g = tgt^{-1}$ . Donc, le différentiel  $d(\mathrm{Int}) = \mathrm{Ad} : \mathbf{T} \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$  est une représentation de  $\mathbf{T}$  dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $\mathbf{G}$ . On appelle l'ensemble des poids non-nuls correspondants  $\Phi = \Phi(\mathbf{G}, \mathbf{T})$  les *racines* de  $\mathbf{G}$  relatives à  $\mathbf{T}$ . On a la décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\mathbf{T}} \oplus \prod_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

D'après [4] IV.14.8, si  $\mathbf{G}$  est réductif et  $\mathbf{T}$  un tore maximal, l'ensemble des racines  $\Phi(\mathbf{G}, \mathbf{T})$  forme un *système abstrait réduit de racines* de l'espace vectoriel  $E = X(\mathbf{T}/R(\mathbf{G})) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  avec  $W(\mathbf{G}, \mathbf{T})$  son groupe de Weyl dans le sens de [5] Chp. VI, §1 ou [7] App. On résume ces définitions ci-dessus. Il y a une notion bien défini d'une  $F$ -racine, qui est exprimée dans [4] Chp. V, §21.

**2.2. Systèmes abstraits de racines.** Soit  $V$  un espace vectoriel réel de dimension finie et  $V^*$  sa duale réelle. Soit  $v \in V$ . On appelle  $s_v \in \mathrm{GL}(V)$  une *réflexion* autour de  $v$  si  $s_v(v) = -v$  et si  $s_v$  fixe un sous-espace  $H \subset V$  de codimension un. Donc, on a

$$s_v(w) = w - \langle w, v^* \rangle v, \quad w \in V,$$

où  $v^* \in V^*$  a noyau  $H$  et  $\langle v, v^* \rangle = 2$ . Si  $\Phi$  est un ensemble fini qui engendre  $V$  alors il existe au plus une seule réflexion autour de  $v$  qui stabilise  $\Phi$ .

Finalement, un *système abstrait de racines*  $\Phi$  de  $V$  est un ensemble de  $V$  qui satisfait :

- a)  $\Phi$  est fini, engendre  $V$ , et ne contient pas de zéro.
- b) Pour tout  $\alpha \in \Phi$  il existe une réflexion  $s_{\alpha}$  qui stabilise  $\Phi$ , donc elle est unique.
- c) Si  $\alpha, \beta \in \Phi$ , alors  $\langle \beta, \alpha^* \rangle \in \mathbb{Z}$ .

Les éléments de  $\Phi$  sont les racines de  $V$ . Si encore  $\Phi$  satisfait

d) Si  $\alpha, \beta \in \Phi$  et  $\beta = c\alpha$ , alors  $c = \pm 1$ .

on l'appelle *réduit*. On appelle le groupe  $W(\Phi) \subset GL(V)$  engendré par les réflexions  $s_\alpha$  pour  $\alpha \in \Phi$  le *groupe de Weyl* de  $\Phi$ ; c'est un groupe fini. Fixe un  $\lambda \in V^*$  tel que  $\langle \alpha, \lambda \rangle \neq 0$  pour tout  $\alpha \in \Phi$ , alors on définit un sous-ensemble des *racines positives*

$$\Phi^+ = \{\alpha \in \Phi : \langle \alpha, \lambda \rangle > 0\}.$$

En posant  $\Phi^- = -\Phi^+$ , on a la décomposition disjointe  $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$ . On définit une *base*  $\Delta$  de  $\Phi$  par

i)  $\Delta$  est une base de l'espace  $V$ , et

ii) toute racine dans  $\Phi^+$  est une combinaison linéaire  $\sum_{\alpha \in \Delta} n_\alpha \alpha$  où  $n_\alpha \in \mathbb{Z}_+$ ,

ou de manière équivalente,

i')  $\alpha \in \Phi^+$  et  $\alpha$  n'est pas la somme de deux éléments de  $\Phi^+$ .

On appelle les éléments de  $\Delta$  les *racines simples* et on note  $S = \{s_\alpha : \alpha \in \Delta\}$  l'ensemble des *réflexions simples*.

Il faut rappeler que pour l'ensemble de racines  $\Phi(\mathbf{G}, \mathbf{T})$  d'un groupe réductif relatives à son tore maximal, le choix d'un sous-groupe de Borel  $\mathbf{B} = \mathbf{T}\mathbf{U}$  fait définir l'ensemble des racines positives par  $\alpha \in \Phi(\mathbf{G}, \mathbf{T})^+$  si  $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{u}$ , où  $\mathfrak{u}$  est l'algèbre de Lie de  $\mathbf{U}$ .

**Proposition 2.1.** *Si  $\Phi$  est un système abstrait réduit de  $V$  et  $W = W(\Phi)$  son groupe de Weyl, alors*

a)  $S$  engendre  $W$  comme groupe,

b)  $\Phi = \bigcup_{w \in W} w\Delta$ .

*Remarque 2.2.*

**Exemple 2.3.** Soit  $\mathbf{G} = \mathbf{GL}_n$  et  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n \simeq \mathbf{M}_{n \times n}$  son algèbre de Lie. Pour  $t \in \mathbf{T}$ , l'action de  $\text{Ad}(t)$  sur  $\mathfrak{g}$  est aussi par conjugaison

$$\text{Ad}(t)g = tgt^{-1}, \quad t \in \mathbf{T} \subset \mathfrak{g}, \quad g \in \mathfrak{g}.$$

Les matrices  $e_{ij}$  qui sont nulles sauf un 1 dans la place  $i, j$  forment une base de  $\mathfrak{g}$ . Pour  $t = \text{diag}(t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{T}$  on a

$$\text{Ad}(t)e_{ij} = t_i t_j^{-1} e_{ij}.$$

Évidemment, les caractères  $t \mapsto t_i t_j^{-1}$  pour  $1 \leq i, j \leq n$  sont les racines de  $\mathbf{G}$  relatives à  $\mathbf{T}$ . En prenant toujours le sous-groupe de Borel standard, on trouve

$$(1) \quad \begin{aligned} \Phi &= \{e_i - e_j : i \neq j\} \\ \Phi^+ &= \{e_i - e_j : i < j\} \\ \Delta &= \{e_i - e_{i+1} : i < n\}, \end{aligned}$$

où  $e_i \in X(\mathbf{T})$  est la projection défini par  $e_i(\text{diag}(t_1, \dots, t_n)) = t_i$ . Le groupe de Weyl  $W = W(\mathbf{G}, \mathbf{T}) = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$  est isomorphe à  $S_n$ , le groupe de permutations de  $\{1, \dots, n\}$ , et on choisit les représentants canoniques  $\dot{w}$  de  $W$  dans  $\mathbf{G}$  par la représentation régulière de  $S_n$ , i.e. les matrices standard de permutation. On a l'action de  $W$  sur  $\Phi$  par

$$(2) \quad (w\alpha)(t) = \alpha(\dot{w}^{-1}t\dot{w}), \quad \alpha \in \Phi, \quad t \in \mathbf{T}.$$

On utilise les mêmes ensembles de racines, compris correctement, pour le groupe de  $F$ -points  $G_n$ .

2.3. **Sous-groupes de Levi standard.** Pour un sous-ensemble  $\Theta \subset \Delta$ , on pose

$$\begin{aligned} W_\Theta &= \langle s_\alpha : \alpha \in \Theta \rangle, & \Phi_\Theta &= \text{span}_{\mathbb{Z}}(\Theta) \cap \Phi, \\ T_\Theta &= \left( \bigcap_{\alpha \in \Theta} \ker(\alpha) \right)^0, & M_\Theta &= Z_G(T_\Theta), \\ P_\Theta &= \coprod_{w \in W_\Theta} BwB, & N_\Theta &= R_u(P_\Theta). \end{aligned}$$

On voit que  $P_\Delta = G$  et  $T_\Delta$  est le tore maximal dans  $Z(G)$ , et aussi que,  $P_\emptyset = B$  et  $T_\emptyset = T$ .

**Proposition 2.4.** *Le sous groupe de Levi standard  $M_\Theta$  est un groupe réductif connexe avec tore maximal  $T$  et sous-groupe de Borel standard  $B_\Theta = B \cap M_\Theta$  et*

- $\Phi(M_\Theta, T) = \Phi_\Theta$  et  $W(M_\Theta, T) = W_\Theta$ ,
- en choisissant le Borel  $B_\Theta$ ,  $\Phi_\Theta^+ = \Phi^+ \cap \Phi_\Theta$  avec base correspondant  $\Theta$ ,
- $P_\Theta = M_\Theta N_\Theta$  est un sous-groupe parabolique de  $G$  contenant  $B$ ,
- si  $P$  est un sous-groupe parabolique de  $G$  contenant  $B$ , alors  $P = P_\Theta$  pour un unique sous-ensemble  $\Theta \subset \Delta$ .

*Démonstration.* Voir [9] Ch. 8.4. □

On appelle les  $P_\Theta$  les sous-groupes paraboliques standard les  $M_\Theta$  les sous-groupes de Levi standard. On appelle  $M$  un sous-groupe de Levi de  $G$  s'il est un conjugué d'un sous-groupe de Levi standard.

**Exemple 2.5.** Pour  $G_n = \text{GL}_n(F)$ , on a déjà décrit tous les sous-groupes paraboliques standard à l'aide des partitions en exemple 1.7. Maintenant, on traduit ces descriptions en termes des racines simples (décrites en exemple 2.3) de  $G_n$ . Pour simplifier un peu, on note  $\epsilon_i = e_i - e_{i+1} \in \Delta$ . D'abord, si  $\Theta = \{\epsilon_i\} \subset \Delta$ , alors

$$T_\Theta = \ker(\epsilon_i)^0 = \{\text{diag}(t_1, \dots, t_n) \in T : t_i = t_{i+1}\},$$

donc dans ce cas là  $M_\Theta$  est le sous-groupe de Levi qui correspond à la partition  $(1, \dots, 2, \dots, 1)$ , où bien sûr, le 2 est dans la position  $i$ .

En générale, soit  $\beta = (n_1, \dots, n_r)$  une partition de  $n$  quelconque et soit  $b = \{b_1, \dots, b_{r-1}\}$  l'ensemble de sommes partielles des  $n_i$ , i.e.  $b_i = \sum_{j=1}^i n_j$ . Soit  $[n] = \{1, \dots, n-1\}$ . Finalement, on pose

$$\Theta_\beta = \{\epsilon_i \in \Delta : i \in [n] \setminus b\}.$$

Alors, on voit facilement que  $P_{\Theta_\beta} = P_\beta$ ,  $M_{\Theta_\beta} = M_\beta$ , et  $T_{\Theta_\beta} = T_\beta$ .

### 3. CARACTÈRE MODULE

**Définition 3.1.** Soit  $P = MN$  un sous-groupe parabolique de  $G$ . On définit le *caractère module* de  $P$ ,  $\delta_P : P \rightarrow \mathbb{R}_+^\times$  par

$$(3) \quad \delta_P(p) = \delta_P(mn) = |\det \text{Ad}_n(m)|_F, \quad p = mn \in P,$$

où  $\mathfrak{n}$  est l'algèbre de Lie de  $N$  et  $\text{Ad}_n : M \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{n})$  est la représentation adjointe de  $M$  dans  $\mathfrak{n}$ .

Soit  $\Theta \subset \Delta$ ,  $P_\Theta = M_\Theta N_\Theta$  le sous-groupe parabolique correspondant, et  $\delta_{P_\Theta}$  son caractère module. Pour  $\alpha \in \Phi$  soit  $m(\alpha) = \dim(\mathfrak{g}_\alpha)$ . Sur le tore maximal de  $P_\Theta$  on a bien une formule pour  $\delta_{P_\Theta}$ .

**Proposition 3.2.** *Soit  $\Theta \subset \Theta' \subset \Delta$ , alors on a*

a)  $\delta_{P_\Theta}$  est l'unique caractère de  $P_\Theta$  trivial sur  $N_\Theta$  tel que

$$\delta_{P_\Theta}|_{T_\Theta} = \prod_{\alpha \in \Phi^+} |\alpha^{m(\alpha)}|_F,$$

b)  $\delta_{P_\Theta}|_{P_{\Theta'}} = \delta_{P_{\Theta'}}$ .

*Démonstration.* Voir [6] 1.6. □

**Exemple 3.3.** Soit  $G = G_n$  et  $B = TU$  son sous-groupe de Borel standard. Alors,

$$\delta_B(t) = |t_1|_F^{n-1} |t_2|_F^{n-3} \cdots |t_n|_F^{-(n-1)},$$

où  $t = \text{diag}(t_1, \dots, t_n) \in T$ . En particulier, on voit que  $\delta_B|_{Z(G)}$  soit trivial.

### 3.1. Mesure de Haar.

**Définition 3.4.** Soit  $G$  un groupe localement compact,  $V$  un espace vectoriel complexe, et  $C_c^\infty(G, V)$  l'espace des fonctions  $f : G \rightarrow V$  localement constantes, i.e. pour tout  $g \in G$  il existe un sous-groupe ouvert  $K_g \subset G$  tel que  $f(gk) = f(g)$  pour tout  $k \in K_g$ , et de support compact. Quand  $V = \mathbb{C}$  on écrit simplement  $C_c^\infty(G)$ . On appelle  $C_c^\infty(G, V)$  l'espace de Schwartz-Bruhat de  $G$  à valeurs dans  $V$  et on le note  $\mathcal{S}(G, V)$ .

Si  $f \in \mathcal{S}(G, V)$ , alors il existe un sous-groupe compact ouvert  $K \subset G$  tel que  $f(gk) = f(g)$  pour tout  $g \in G$  et  $k \in K$ . Alors, on peut écrire

$$\mathcal{S}(G, V) = \bigcup_{K \subset G} \mathcal{S}(G, V)^K,$$

où  $\mathcal{S}(G, V)^K$  est le sous-espace des  $f \in \mathcal{S}(G, V)$  tel que  $f(gk) = f(g)$  pour tout  $g \in G$  et  $k \in K$  et où l'union est prise sur tous les sous-groupes compacts ouverts  $K \subset G$ . Cela entraîne que

$$\mathcal{S}(G, V) = \mathcal{S}(G) \otimes V.$$

On dispose des opérateurs de translation à gauche et à droite dans l'espace  $\mathcal{S}(G, V)$ ,

$$L_g(f)(x) = f(gx), \quad R_g(f)(x) = f(xg), \quad g, x \in G.$$

Une autre façon de définir le caractère module est le suivant. Soit  $\mu$  une mesure de Haar à gauche de  $G$ , et soit  $N$  un sous-groupe fermé de  $G$  avec mesure de Haar  $\mu_N$ . On définit le *caractère module topologique de  $N$* ,  $\text{mod}_N : N_G(N) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ , par le module topologique de l'endomorphisme  $\text{Int}(n)$ , i.e. pour  $n \in N_G(N)$ ,

$$\int_N f(nxn^{-1}) d\mu_N(x) = \text{mod}_N(n) \int_N f(x) d\mu_N(x),$$

pour  $f \in \mathcal{S}(N)$ .

**Proposition 3.5.** Si  $G$  est unimodulaire et  $P = MN$  est un sous-groupe parabolique, alors  $\text{mod}_N : N_G(N) = P \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  est un caractère continue et

$$(4) \quad \delta_P = \text{mod}_N^{-1}.$$

## Deuxième partie 2. Représentations admissibles

Le cadre naturel pour l'étude des représentations des groupes réductifs sur un corps local est l'étude des représentations des groupes plus généraux, dans le langage de [3], les  $l$ -groupes. Un  $l$ -groupe  $G$  est, par définition, un groupe topologique totalement discontinu localement compact.

## 4. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

**Définition 4.1.** Soit  $V$  un espace vectoriel complexe, pas nécessairement de dimension finie, et  $\pi : G \rightarrow \text{GL}(V)$  un homomorphisme continu de groupe, alors le couple  $(\pi, V)$  est appelé une *représentation* de  $G$ . L'espace  $V$  est naturellement un  $G$ -module et est appelé *l'espace de la représentation*  $\pi$ . Comme d'habitude, on écrit peu soigneusement  $\pi$  à la fois pour l'homomorphisme et pour l'espace de la représentation correspondant.

Une représentation  $(\pi, V)$  de  $G$  est appelé *lisse* si pour tout  $v \in V$ , le stabilisateur de  $v$  dans  $G$ ,

$$\text{stab}_G(v) = \{g \in G : \pi(g)v = v\},$$

est un sous-groupe ouvert de  $G$ . Si  $(\pi, V)$  et  $(\pi', V')$  sont deux représentations lisses de  $G$ , alors on dénote par

$$\text{Hom}_G(\pi, \pi') = \{f \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V') : f(\pi(g)v) = \pi'(g)f(v), \forall v \in V, g \in G\}$$

l'espace des *opérateurs d'entrelacement* de  $\pi$  dans  $\pi'$ . On dit que  $\pi$  et  $\pi'$  sont isomorphes s'il existe un opérateur d'entrelacement bijectif de  $\pi$  dans  $\pi'$ . On pose  $\text{Rep } G$  la catégorie des représentations lisses de  $G$  avec opérateurs d'entrelacement comme morphismes.

Si  $(\pi, V) \in \text{Rep } G$  et  $W \subset V$  est un sous-espace, alors on l'appelle  *$G$ -invariant* s'il est un sous- $G$ -module, i.e. si  $\pi(g)w \in W$  pour tout  $w \in W$  et  $g \in G$ . Un sous-espace  $G$ -invariant  $W \subset V$  définit une *sous-représentation*  $(\pi|_W, W) \in \text{Rep } G$  et une représentation de *quotient*  $(\bar{\pi}, V/W) \in \text{Rep } G$  où  $\bar{\pi}$  est la composé avec la projection canonique  $V \rightarrow V/W$ . Si  $W'' \subset W' \subset V$  sont deux sous-espaces  $G$ -invariants, alors on appelle *sous-quotient* de  $\pi$  une représentation de la forme  $W'/W''$ . On appelle  $(\pi, V) \in \text{Rep } G$  *irréductible* si  $V$  est irréductible comme  $G$ -module, i.e. si ses seuls sous-espaces  $G$ -invariants sont  $V$  et  $\{0\}$ . On note  $\text{Irr } G$  l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations irréductibles de  $G$ . On appelle  $(\pi, V) \in \text{Rep } G$  de *longueur finie* si elle a un nombre fini de sous-quotients irréductibles et *semisimple* si elle est une somme direct de ses sous-quotients irréductibles.

On appelle  $(\pi, V) \in \text{Rep } G$  *admissible* si pour tout sous-groupe compact ouvert  $K \subset G$ , le sous-espace des invariants dans  $V$  par  $K$ ,

$$V^K = \{v \in V : \pi(k)v = v, \forall k \in K\},$$

est de dimension finie. Elles sont jolies en le sens suivant..

**Proposition 4.2.** Soit  $(\pi, V) \in \text{Rep } G$  et  $K \subset G$  un sous-groupe compact ouvert. Alors,  $\pi$  est admissible si et seulement si  $\pi|_K$  est semisimple avec tout facteur irréductible de dimension finie et une multiplicité finie de toute classe d'isomorphisme.

*Démonstration.* Voir [6] §2.1.4. □

**Théorème 4.3** (Jacquet). Si  $(\pi, V) \in \text{Irr } G$ , alors elle est admissible.

*Démonstration.* Voir [3] Ch. 2 §3.25 pour  $\text{GL}_n(F)$ . □

**4.1. Caractère central.** On demande la propriété d'admissibilité d'une part pour avoir toujours le lemme de Shur.

**Lemme 4.4** (Shur). Soit  $G$  un  $l$ -groupe et  $(\pi, V) \in \text{Irr } G$  admissible. Alors,  $\text{Hom}_G(\pi, \pi)$  est de dimension un.

**Corollaire 4.5.** Si  $G$  est un  $l$ -groupe abélien, alors  $(\pi, V) \in \text{Irr } G$  est admissible et de dimension un.



**Définition 4.6.** On définit un *caractère (complexe)* de  $G$  comme un homomorphisme continu  $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$ . Le caractère  $\chi$  de  $G$  est appelé *unitaire* si  $|\chi(g)| = 1$  pour tout  $g \in G$ . Si  $(\pi, V) \in \text{Rep } G$ , alors on définit  $(\chi\pi, V)$  par

$$(\chi\pi)(g) = \chi(g) \cdot \pi(g),$$

pour tout  $g \in G$ .

**Définition 4.7.** Si  $(\pi, V) \in \text{Irr}(G)$ , alors le centre  $Z(G)$  de  $G$  agit sur  $V$  toujours par un caractère  $\omega_\pi$ , appelé le *caractère central* de  $\pi$ , i.e.

$$\pi(z)v = \omega_\pi(z)v$$

pour tout  $z \in Z(G)$  et  $v \in V$ . On note  $\text{Irr}^u G$  le sous-ensemble de  $\text{Irr } G$  de représentations à un caractère central unitaire.

#### 4.2. Représentations unitaires.

**Définition 4.8.** Si  $(\pi, V) \in \text{Rep } G$ , on l'appelle *unitaire* s'il existe un produit scalaire  $G$ -invariant  $(\cdot, \cdot)$  dans  $V$ , i.e. une forme bilinéaire hermitienne définie positive telle que

$$(\pi(g)v, \pi(g)w) = (v, w), \quad g \in G, v, w \in V.$$

Évidemment, tout sous-quotient de  $\pi$  est aussi unitaire.

En fait, toute représentation unitaire admissible est semisimple.

**Proposition 4.9.** Soit  $(\pi, V) \in \text{Rep } G$  unitaire admissible et  $W \subset V$  un sous-espace  $G$ -invariant. Si on pose  $W^\perp = \{v \in V : (v, w) = 0 \forall w \in W\}$ , alors  $W^\perp$  est aussi  $G$ -invariant et  $V = W \oplus W^\perp$ .

**Corollaire 4.10.** Si  $(\pi, V) \in \text{Rep } G$  unitaire admissible, alors  $\pi$  est semisimple, où bien sûr, toute composante irréductible est aussi unitaire.

*Démonstration.* Voir [6] §2.1.14. □

**Remarque 4.11.** Soit  $(\pi, V) \in \text{Irr } G$  unitaire admissible. On voit que pour  $z \in Z(G)$ ,

$$(\pi(z)v, \pi(z)w) = \omega_\pi(z)\overline{\omega_\pi(z)}(v, w) = (v, w), \quad v, w \in V$$

et donc  $(\pi, V) \in \text{Irr}^u G$ .

**4.3. Contragrédiente.** Soit  $(\pi, V) \in \text{Rep } G$ . On pose  $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$  l'espace dual, et  $V^\vee$  son partie lisse, i.e. le sous-espace des vecteurs invariants par un sous-groupe ouvert de  $G$ . On définit  $\pi^*$  comme  $\pi^*(g) = {}^t\pi(g^{-1})$  sur  $V^*$ , i.e.

$$\langle v, \pi^*(g)v^* \rangle = \langle \pi(g^{-1})v, v^* \rangle, \quad v \in V, v^* \in V^*,$$

et on pose  $\pi^\vee = \pi^*|_{V^\vee}$ . Alors, on appelle  $(\pi^\vee, V^\vee) \in \text{Rep } G$  la représentation de *contragrédiente* de  $(\pi, V)$ .

**Proposition 4.12.** Si  $(\pi, V) \in \text{Rep } G$  est admissible, alors

- a)  $\pi^\vee$  est admissible.
- b)  $(\pi^\vee)^\vee \simeq \pi$ .
- c)  $\pi$  est irréductible si et seulement si  $\pi^\vee$  l'est aussi.

*Démonstration.* Voir [3] Ch. 2.15. □

#### 4.4. Représentations de quasi-carré-intégrable.

**Définition 4.13.** Soit  $(\pi, V) \in \text{Rep } G$  et  $v \in V$ ,  $v^\vee \in V^\vee$ . On appelle *élément de matrice* de  $\pi$  une fonction  $c_{v,v^\vee} : G \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $c_{v,v^\vee}(g) = \langle \pi(g^{-1})v, v^\vee \rangle$  pour tout  $g \in G$ .

**Définition 4.14.** Si  $(\pi, V) \in \text{Irr } G$ , alors on l'appelle de *carré-intégrable* si  $\pi \in \text{Irr}^u G$  et pour tout  $v \in V$  et  $v^\vee \in V^\vee$ , on a

$$\int_{G/Z(G)} |c_{v,v^\vee}(g)|^2 d\mu(g) < \infty.$$

**Lemme 4.15.** Si  $(\pi, V) \in \text{Irr } G$ , alors il existe un caractère  $\chi : G \rightarrow \mathbb{R}^\times$  tel que  $\chi\pi \in \text{Irr}^u G$ .

**Définition 4.16.** Soit  $(\pi, V) \in \text{Rep } G$ . On l'appelle de *quasi-carré-intégrable* si il existe un caractère  $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$  tel que  $\chi\pi$  est de carré-intégrable.

Une sorte de réciproque de la remarque 4.11 qui concerne les représentations unitaires existe pour les représentations de quasi-carré-intégrable.

**Proposition 4.17.** Si  $(\pi, V) \in \text{Irr } G$  est admissible et de carré-intégrable, alors elle est unitaire.

*Démonstration.* On prend  $v^\vee \in V^\vee$  non nul et on définit

$$(v, w) = \int_{G/Z(G)} c_{v,v^\vee}(g) \bar{c}_{w,v^\vee}(g) d\mu(g), \quad v, w \in V.$$

L'intégrale converge grâce à l'inégalité de Schwartz et définit évidemment un produit scalaire  $G$ -invariant.  $\square$

*Remarque 4.18.* En combinant la remarque 4.11 et la proposition 4.17 on arrive au résultat suivant. Si  $(\pi, V) \in \text{Irr } G$  est admissible et de quasi-carré-intégrable, alors  $\pi \in \text{Irr}^u G$  si et seulement si  $\pi$  est une représentation unitaire.

**4.5. Produits tensoriels.** Soient  $G_i$  des  $l$ -groupes et  $(\pi_i, V_i) \in \text{Rep } G_i$  pour  $1 \leq i \leq r$ . Soit

$$G = G_1 \times \cdots \times G_r, \quad \pi = \pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r, \quad \text{et} \quad V = V_1 \otimes \cdots \otimes V_r.$$

On définit la représentation de produit tensoriel  $(\pi, V) \in \text{Rep } G$  par

$$\pi(g)v = \pi(g_1, \dots, g_r)(\otimes v_i) = \otimes \pi_i(g_i)v_i,$$

où  $g = (g_1, \dots, g_r) \in G$  et  $v = \otimes v_i \in V$ .

**Proposition 4.19.** Si tous les  $\pi_i$  sont admissibles, alors

- a)  $\pi$  est admissible.
- b) Si tous les  $\pi_i$  sont irréductibles, alors  $\pi$  l'est aussi.
- c) Inversement, si  $\pi \in \text{Irr } G$  est admissible, alors il existe  $\pi_i \in \text{Irr } G_i$  admissibles et uniques (à isomorphisme près) telles que  $\pi \simeq \otimes \pi_i$ .

*Démonstration.* Voir [3] §2.16.  $\square$

**4.6. Induction et réduction parabolique.** Pour la suite, soit  $G$  le groupe des  $F$ -points d'un groupe algébrique réductif défini sur  $F$ . Soit  $P = MN$  un sous-groupe parabolique. Si  $(\rho, W) \in \text{Rep } M$ , alors, on étend  $\rho$  à  $P$  en mettant  $N$  dans son noyau.

*Induction.* Soit  $(\rho, W) \in \text{Rep } M$ . D'abord, on définit l'espace  $L(G, \rho)$  des fonctions  $f : G \rightarrow W$  qui vérifient

$$\text{a) } f(mng) = (\delta_P^{1/2} \rho)(m) f(g) \text{ pour tout } m \in M, n \in N, g \in G.$$

b) Il existe un sous-groupe compact ouvert  $N_f \subset G$  tel que  $f(gg') = f(g)$  pour tout  $g' \in N_f$ .

En suite, on définit la *représentation induite normalisée*  $(\mathbf{i}_M^G \rho, L(G, \rho)) \in \text{Rep } G$  par translation à droite sur  $L(G, \rho)$ ,

$$(\mathbf{i}_M^G \rho)(g)f = R_g f, \quad g \in G, f \in L(G, \rho).$$

*Réduction.* Soit  $(\pi, V) \in \text{Rep } G$ . D'abord, on définit le sous-espace  $V(N) \subset V$

$$V(N) = \text{span}_{\mathbb{C}}\{\pi(n)v - v : n \in N, v \in V\},$$

et on pose  $V_N = V/V(N)$ . On remarque que  $V(gNg^{-1}) = \pi(g)V(N)$  pour tout  $g \in G$ . Comme  $M$  normalise  $N$ , l'espace  $V(N)$  est invariant pour l'action de  $M$ . On définit la *représentation réduite normalisée* ou *foncteur de Jacquet normalisé*,  $(\mathbf{r}_M^G \pi, V_N) \in \text{Rep } M$ , par l'action naturelle (normalisée) sur le quotient,

$$(\mathbf{r}_M^G \pi)(m)(v + V(N)) = \delta_P^{-1/2}(m) \pi(m)v + V(N), \quad m \in M, v \in V.$$

*Propriétés.*

**Proposition 4.20.** Soit  $(\pi, V) \in \text{Rep } G$ ,  $P = MN$  un sous-groupe parabolique standard de  $G$ , et  $(\rho, W) \in \text{Rep } M$ . On a les propriétés suivantes :

a) Les foncteurs

$$\mathbf{i}_M^G : \text{Rep } M \rightarrow \text{Rep } G, \quad \mathbf{r}_M^G : \text{Rep } G \rightarrow \text{Rep } M,$$

sont exacts.

b) Le foncteur  $\mathbf{r}_M^G$  est adjoint à gauche à  $\mathbf{i}_M^G$ , i.e.

$$\text{Hom}_M(\mathbf{r}_M^G \pi, \rho) = \text{Hom}_G(\pi, \mathbf{i}_M^G \rho);$$

c'est la "réciprocité de Frobenius".

c) Si  $L \subset M \subset G$  est encore un sous-groupe de Levi standard, alors ces foncteurs sont transitifs, i.e.

$$\mathbf{i}_M^G \circ \mathbf{i}_L^M = \mathbf{i}_L^G, \quad \mathbf{r}_L^M \circ \mathbf{r}_M^G = \mathbf{r}_L^G.$$

d) Si  $\rho$  et  $\pi$  sont admissibles (resp. et de longueur finie), alors  $\mathbf{i}_M^G \rho$  et  $\mathbf{r}_M^G \pi$  le sont aussi.

e) Si  $\rho$  est unitaire, alors  $\mathbf{i}_M^G \rho$  l'est aussi.

f) Ces foncteurs sont compatibles avec le caractère central, i.e.

$$\omega_{\mathbf{i}_M^G \rho} = \omega_\rho|_{Z(G)}, \quad \omega_{\mathbf{r}_M^G \pi} = \omega_\pi.$$

*Démonstration.* Voir [2] §1.9, 2.3, et [6] §3.1.4. La dernière partie est évidente si on calcule

$$\mathbf{i}_M^G(z)f(x) = f(xz) = f(zx) = \delta_P^{1/2}(z)\rho(m)f(x) = \omega_\rho(z)f(x),$$

$$\mathbf{r}_M^G(z)(v + V(N)) = \delta_P^{-1/2}(z)\pi(z)v + V(N) = \omega_\pi(z)(v + V(N)),$$

pour tout  $z \in Z(G)$ ,  $f \in L(G, \rho)$ ,  $x \in G$ , et  $v \in V$ , comme  $\delta_P$  est trivial sur  $Z(G)$ .  $\square$

#### 4.7. Représentations cuspidales.

**Définition 4.21.** On appelle  $(\pi, V) \in \text{Rep } G$  *quasi-cuspidale* si  $\mathbf{r}_M^G \pi = 0$  pour tout sous-groupe de Levi  $M$ , ( $M \neq G$ ) et *cuspidale* si de plus elle est admissible. Soit  $\mathcal{C}(G)$  l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations cuspidales irréductibles.

**Exemple 4.22.** Toute représentation admissible irréductible d'un tore est cuspidale.

Il y a quelques autres conditions équivalentes pour caractériser une représentation cuspidale dues à Jacquet.

**Théorème 4.23.** Soit  $(\pi, V) \in \text{Irr } G$  admissible. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\pi$  est cuspidale.
- $\pi^\vee$  est cuspidale.
- Pour tout  $v \in V$  et  $v^\vee \in V^\vee$  l'élément de matrice  $c_{v, v^\vee}$  est de support compact sur  $G/Z(G)$ .
- Un seul élément de matrice  $c_{v, v^\vee}$  est de support compact sur  $G/Z(G)$ .
- Pour tout sous-groupe de Levi  $M$  de  $G$ , ( $M \neq G$ ) et toute  $(\rho, W) \in \text{Rep } M$  admissible,  $\pi$  n'est pas une sous-représentation de  $\mathbf{i}_M^G \rho$ .

Pour les trois premières conditions, il ne faut pas supposer que  $\pi$  soit irréductible.

*Démonstration.* Voir [6] §5.3. □

*Remarque 4.24.* Si  $(\pi, V) \in \text{Irr}(G)$  est cuspidale, alors  $\pi$  est bien sûr de quasi-carré-intégrable, et donc le résultat de la remarque 4.18 peut s'appliquer à  $\pi$ , i.e.  $\pi$  est unitaire si et seulement si  $\pi \in \text{Irr}^u G$ .

**Théorème 4.25.** Soit  $(\pi, V) \in \text{Irr } G$  admissible. Alors, il existe un sous-groupe de Levi  $M \subset G$  et une  $(\rho, W) \in \mathcal{C}(M)$  telle que  $\pi$  est un sous-représentation de  $\mathbf{i}_M^G \rho$ .

*Démonstration.* Voir [3] Ch. 2 §3.25 pour  $G = \text{GL}_n(F)$ . □

*L'action du groupe de Weyl.* Si  $M$  est un sous-groupe de Levi standard de  $G$ , on note  $W_M$  son groupe de Weyl,  $W = W_G$  et on considère toujours que  $W_M \subset W$ . Pour un  $w \in W$ , on choisit un représentant  $\dot{w} \in N_G(Z)$  et on définit l'application  $w : G \rightarrow G$  par  $w(g) = \dot{w}g\dot{w}^{-1}$ . Si  $M$  est un sous-groupe de Levi standard de  $G$ , alors  $Z_G(T) \subset M$ , donc pour tout  $w \in W_M \subset W_G$ , on a  $\dot{w} \in M$ .

**Définition 4.26.** Soit  $M$  et  $M'$  deux sous-groupes de Levi de  $G$  et on pose

$$W(M, M') = \{w \in W : w(M) = M'\}.$$

On appelle  $M$  et  $M'$  *associés*, et on écrit  $M \sim M'$ , si  $W(M, M') \neq \emptyset$ . Tout  $w \in W(M, M')$  définit un foncteur  $w : \text{Rep } M \rightarrow \text{Rep } M'$  par

$$w\rho(m') = \rho(\dot{w}^{-1}m'\dot{w}), \quad m' \in M'.$$

On appelle  $\rho \in \text{Rep } M$  et  $\rho' \in \text{Rep } M'$  aussi *associées*, et on écrit  $\rho \sim \rho'$ , si  $\rho' \simeq w\rho$  pour un certain  $w \in W(M, M')$ .

**Exemple 4.27.** Pour le groupe  $\text{GL}_n(F)$  où  $F$  est un corps local non archimédien, si  $\beta$  et  $\beta'$  sont deux partitions de  $n$ , alors  $M = M_\beta$  et  $M' = M_{\beta'}$  sont associés si et seulement si  $\beta$  et  $\beta'$  sont identiques à une permutation près. L'ensemble de telles permutations est identifiée à  $W(M, M')/W_M$ . De même, les représentations  $\rho = \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r \in \mathcal{C}(M)$  et  $\rho' = \rho'_1 \otimes \cdots \otimes \rho'_r \in \mathcal{C}(M')$  sont associées si et seulement si  $(\rho_1, \dots, \rho_r)$  et  $(\rho'_1, \dots, \rho'_r)$  sont identiques à permutation près.

Par le théorème 4.25, toute  $\pi \in \text{Irr } G$  est une sous-représentation d'une  $\mathbf{i}_M^G \rho$ . En fait, le sous-groupe de Levi  $M$  et la représentation  $\rho \in \mathcal{C}(M)$  sont essentiellement uniques à association près.

**Théorème 4.28.** *Soit  $M$  et  $M'$  deux sous-groupes de Levi de  $G$ ,  $\rho \in \mathcal{C}(M)$ , et  $\rho' \in \mathcal{C}(M')$ . Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a)  $M \sim M'$  et  $\rho \sim \rho'$ .
- b)  $\text{Hom}_G(\mathbf{i}_M^G \rho, \mathbf{i}_{M'}^G \rho') \neq 0$ .
- c)  $\mathbf{i}_M^G \rho$  et  $\mathbf{i}_{M'}^G \rho'$  ont un sous-quotient en commun.

*Démonstration.* Voir [2] Thm. 2.9. □

*Le sous groupe parabolique “renversé”.*

*Remarque 4.29.* On se rappelle que  $W$  agit sur les racines  $\Phi$  de  $G$  relatives à  $T$  par l'équation 2. Si  $M = M_\Theta$  et  $M' = M_{\Theta'}$  pour  $\Theta, \Theta' \subset \Delta$ , alors

$$W(M, M') = \{w \in W : w\Theta = \Theta'\}.$$

**Définition 4.30.** Si  $w \in W$ , on définit sa longueur,

$$\ell(w) = \#\{\alpha \in \Phi^+ : w^{-1}\alpha \in \Phi^-\}.$$

**Proposition 4.31.** *Soit  $M = M_\Theta$  et  $M' = M_{\Theta'}$  sous-groupes de Levi standard de  $G$ , pour  $\Theta, \Theta' \subset \Delta$  non vides. Alors,*

- a) *tout classe de  $W/W_M$  contient un unique élément  $w$  caractérisé par les conditions suivantes équivalentes :*
  - i)  $w$  est l'élément de moins grande longueur dans  $wW_M$ ,
  - ii)  $w\Theta \subset \Phi^+$  ;
- b) *tout double classe  $W_{M'} \backslash W/W_M$  contient un unique élément  $w$  caractérisé par les conditions suivantes équivalentes :*
  - i)  $w$  est l'élément de moins grande longueur dans  $W_{M'} w W_M$ ,
  - ii)  $w$  est l'élément de moins grande longueur dans  $W_{M'} w$  et dans  $w W_M$ ,
  - iii)  $w^{-1}\Theta' \subset \Phi^+$  et  $w\Theta \subset \Phi^+$ .

*Démonstration.* Voir [6] Lem. 1.1.2 et Prop. 1.1.3. □

Cette proposition veut dire qu'il y a des représentants canoniques de l'ensemble des classes  $W/W_M$  et des double classes  $W_{M'} \backslash W/W_M$  dans  $W$ ,

$$\begin{aligned} [W/W_M] &= \{w \in W : w\Theta \subset \Phi^+\} \\ [W_{M'} \backslash W/W_M] &= \{w \in W : w^{-1}\Theta' \subset \Phi^+ \text{ et } w\Theta \subset \Phi^+\}. \end{aligned}$$

On pose  $w_{\ell, M}$  l'élément de plus grande longueur dans  $W_M$ ,  $w_\ell = w_{\ell, G}$ , et  $w_{M^-} = w_\ell w_{\ell, M}$ . Alors,  $w_{M^-}$  est l'élément de plus grande longueur dans  $[W/W_M]$ , voir [6] Prop. 1.1.4. Il est caractérisé par

$$(5) \quad w_{M^-} \Theta \subset \Phi^+ \quad \text{et} \quad w_{M^-} (\Delta \setminus \Theta) \subset \Phi^-.$$

En fait, on a  $w_{M^-} \Theta \subset \Delta$  et on note  $\Theta^- = w_{M^-} \Theta$  et  $M^- = M_{\Theta^-}$ . On a  $w_{M^-} \in W(M, M^-)$ . Si  $M$  est un sous-groupe de Levi standard, on appelle  $M^-$  son sous-groupe de Levi renversé. Pour le groupe  $G = G_n$ , le nom “renversé” est justifié.

**Proposition 4.32.** Si  $\beta = (n_1, \dots, n_r)$ , alors  $M_\beta^- = M_{\beta^-}$ , où  $\beta^- = (n_r, \dots, n_1)$ . Plus précisément,  $w_{M_\beta^-}$  agit sur un élément de  $M_\beta$  en renversant ses blocs dans la diagonale.

*Démonstration.* Soit  $\beta = (n_1, \dots, n_r)$  et  $w \in W$  l'élément qui a comme représentant

$$\dot{w} = \begin{pmatrix} & & & \mathbf{1}_{n_r} \\ & & & \\ & & \ddots & \\ & & & \\ \mathbf{1}_{n_1} & & & \end{pmatrix}.$$

Alors, on a évidemment  $\dot{w}M_\beta\dot{w}^{-1} = M_{\beta'}$  donc  $w \in W(M_\beta, M_{\beta'})$ . Il suffit de montrer que  $w$  satisfait l'équation 5.

Comme en l'exemple 2.5, si on pose  $b_0 = 0$  et  $b_i = \sum_{j=1}^i n_j$  pour  $1 \leq i \leq r$ , alors,

$$\Delta \setminus \Theta_\beta = \{e_{b_i} - e_{b_{i+1}} : 1 \leq i < r\},$$

où  $\Theta_\beta$  est l'ensemble de racines qui correspond au sous-groupe de Levi standard  $M_\beta$ . Comme  $w \in W(M_\beta, M_{\beta'})$  on a  $w\Theta_\beta = \Theta_{\beta'} \subset \Delta$ . On voit aussi que pour tout  $1 \leq i < r$ , l'action de  $\dot{w}^{-1}$  sur  $M_{\beta'}$  par conjugaison, donc l'action de  $w$  sur  $\Phi$ , correspond à la permutation

$$\begin{aligned} b_i &\mapsto b_{r-i+1} \\ b_i + 1 &\mapsto b_{r-i-1} + 1, \end{aligned}$$

et en particulier, comme  $b_{r-i+1} > b_{r-i-1} + 1$ , on a  $w(\Delta \setminus \Theta_\beta) \subset \Phi^-$ .  $\square$

### Troisième partie 3. Théorie de représentation de $GL_n(F)$

Soit  $F$  un corps local non archimédien,  $\mathcal{O}$  son anneau d'entiers,  $\varpi$  une uniformisante, et  $q$  le nombre d'éléments de son corps résiduel. Soit  $G = G_n = GL_n(F)$ . Soit  $\beta = (n_1, \dots, n_r)$  une partition de  $n$  et  $M_\beta$  le sous-groupe de Levi de  $G_n$  correspondant.

**Définition 4.33.** Soient  $\rho_i \in \text{Rep } G_{n_i}$ . On définit

$$\rho_1 \times \cdots \times \rho_r = \mathbf{i}_{M_\beta}^G(\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r) \in \text{Rep } G.$$

Comme l'induction est transitive (par la proposition 4.20 c), cette "multiplication" est associative.

*Des précisions.* Comme toute représentation irréductible lisse de  $G$  est admissible par théorème 4.3, par la proposition 4.19, le foncteur de produit tensoriel

$$\begin{aligned} \otimes : \prod \text{Rep } G_{n_i} &\rightarrow \text{Rep } M_\beta \\ (\rho_1, \dots, \rho_r) &\mapsto \otimes \rho_i \end{aligned}$$

induit une bijection

$$(6) \quad \otimes : \prod \text{Irr } G_{n_i} \rightarrow \text{Irr } M_\beta.$$

On va utiliser cette "décomposition" en écrivant les foncteurs  $\mathbf{i}_{M_\beta}^G$  et  $\mathbf{r}_{M_\beta}^G$  "en coordonnées".

**Proposition 4.34.** Soit  $\alpha \leq \beta$  deux partitions. Si  $\beta = (n_1, \dots, n_r)$ , on décompose  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ , où  $\alpha_i$  est une partition de  $n_i$ , en partitions induisent par les blocs de  $\beta$ , i.e.  $M_\alpha = \prod M_{\alpha_i}$ . Soient  $\rho_i \in \text{Rep } M_{\alpha_i}$  et  $\pi_i \in \text{Rep } G_{n_i}$  pour  $1 \leq i \leq r$ . Alors,

$$\mathbf{i}_{M_\alpha}^{M_\beta}(\otimes \rho_i) = \otimes \mathbf{i}_{M_{\alpha_i}}^{G_{n_i}} \rho_i, \quad \mathbf{r}_{M_\alpha}^{M_\beta}(\otimes \pi_i) = \otimes \mathbf{r}_{M_{\alpha_i}}^{G_{n_i}} \pi_i.$$

*Démonstration.* Voir [10] §1.5 et [2] §1.9.  $\square$

*Support cuspidal.* Par proposition 4.34,  $\rho = \otimes \rho_i \in \text{Rep } M_\beta$  est cuspidale si et seulement si tous les  $\rho_i$  sont cuspidales, d'où, par proposition 4.19, on a une bijection

$$\otimes : \prod \mathcal{C}(G_{n_i}) \rightarrow \mathcal{C}(M_\beta).$$

On pose  $\mathcal{C} = \bigcup_n \mathcal{C}(G_n)$ .

**Définition 4.35.** Soit  $\pi \in \text{Irr } G$ . Par le théorème 4.25, il existe une partition  $\beta = (n_1, \dots, n_r)$  et une  $\rho = \otimes \rho_i \in \mathcal{C}(M_\beta)$  telle que  $\pi$  est une sous-représentation de  $\rho_1 \times \dots \times \rho_r$ . Le multien-semble  $\{\rho_1, \dots, \rho_r\}$  de  $\mathcal{C}$  est déterminé par  $\pi$ ; c'est le *support cuspidal* de  $\pi$  et on écrit  $\text{supp}(\pi) = \{\rho_1, \dots, \rho_r\}$ , cf. [10] §1.10. Dans cette situation, on appelle souvent  $M_\beta$  le sous-groupe de Levi "le plus profond" qui correspond à  $\pi$ .

## 5. LA CLASSIFICATION DE ZELEVINSKY

5.1. **Segments.** On définit le caractère  $\nu : G_n \rightarrow \mathbb{R}_+^\times$  par

$$\nu(g) = |\det(g)|_F, \quad g \in G.$$

Le théorème suivant due à Bernstein et Zelevinsky donne des situations où l'induite d'une représentation cuspidale irréductible est encore irréductible.

**Théorème 5.1.** Soient  $\rho_i \in \mathcal{C}(G_{n_i})$ . Si  $\rho_i \neq \nu \rho_j$  pour tous indices  $i$  et  $j$ , alors  $\rho_1 \times \dots \times \rho_r$  est irréductible.

*Démonstration.* Voir [2] §4.2. □

**Définition 5.2.** On définit un *segment* par un sous-ensemble  $\Delta \subset \mathcal{C}$  de la forme

$$\Delta = \{\rho, \nu\rho, \dots, \nu^k\rho = \rho'\} \subset \mathcal{C},$$

où  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\rho \in \mathcal{C}$ , et on écrit  $\Delta = [\rho, \rho']$ . On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des segments de  $\mathcal{C}$ .

Si  $\Delta = [\rho, \rho'] \in \mathcal{S}$ , alors par [10] §2.10,  $\rho \times \nu\rho \times \dots \times \rho'$  a une unique sous-représentation irréductible; on la note  $\langle \Delta \rangle$ . Si  $\rho \in \mathcal{C}(G_m)$  et  $\rho' = \nu^{k-1}\rho$ , alors  $\langle \Delta \rangle \in \text{Irr } G_n$ , où  $n = km$ . Si  $\beta = (m, m, \dots, m)$  est une partition de  $n$ , alors à l'aide de la réciprocity de Frobenius, on a

$$(7) \quad \mathbf{r}_{M_\beta}^{G_n}(\langle \Delta \rangle) = \rho \otimes \nu\rho \otimes \dots \otimes \rho',$$

et en fait, cette propriété peut caractériser  $\langle \Delta \rangle$ . Plus généralement on connaît tous les foncteurs de Jacquet de  $\langle \Delta \rangle$ .

**Proposition 5.3.** Soit  $\rho \in \mathcal{C}(G_m)$  et  $\rho' = \nu^{k-1}\rho$ , donc  $\langle \Delta \rangle \in \text{Irr } G_n$ , où  $n = km$ . Alors,

$$\mathbf{r}_{M(l, n-l)}^{G_n}(\langle \Delta \rangle) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \nmid l \\ \langle [\rho, \nu^{p-1}\rho] \rangle \otimes \langle [\nu^p\rho, \rho'] \rangle & \text{si } l = mp \end{cases}.$$

*Démonstration.* Voir [10] §3.4. □

**Exemple 5.4.** Soit  $\rho \in \text{Irr } G_1$ , i.e.  $\rho : G_1 = F^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  est un caractère de  $F^\times$ . Si  $\rho' = \nu^{n-1}\rho$  et on pose  $\pi = \langle [\rho, \rho'] \rangle \in \text{Irr } G_n$ , alors  $\pi$  est un caractère de  $G_n$  et

$$\pi(g) = \nu^{(n-1)/2}(g)\rho(\det g), \quad g \in G_n,$$

en particulier, si  $\nu^{(n-1)/2}\rho$  est unitaire alors  $\pi$  l'est aussi.

**Proposition 5.5.** Soit  $\Delta \in \mathcal{S}$ . Alors,  $\langle \Delta \rangle \in \text{Irr}^u G_n$  si et seulement si  $\Delta$  est centré, i.e.

$$\Delta = \{\nu^{-(k-1)/2}\rho_0, \dots, \nu^{(k-1)/2}\rho_0\} \subset \mathcal{C},$$

où  $\rho_0 \in \mathcal{C}(G_m)$  est unitaire et  $km = n$ .

*Démonstration.* C'est essentiellement à dire que les foncteurs d'induction et de Jacquet sont compatibles avec le caractère central. On pose  $G = G_n$ ,  $Z = Z(G)$ ,  $\pi = \langle \Delta \rangle \in \text{Irr } G$ , et  $M = M_\beta$  où  $\beta = (m, \dots, m)$  et  $km = n$ .

$\Leftarrow$ ) On pose  $\rho = \nu^{-(k-1)/2} \rho_0 \otimes \dots \otimes \nu^{(k-1)/2} \rho_0 \in \mathcal{C}(M)$ , où  $\rho_0 \in \mathcal{C}(G_m)$  est unitaire. On voit facilement que  $\omega_\rho|_Z$  est un caractère unitaire qui, par la proposition 4.20f, est égale à  $\omega_{\mathbf{i}_M^G \rho}$ . Comme  $\pi$  est une sous-représentation de  $\mathbf{i}_M^G \rho$ , son caractère central est également unitaire.

$\Rightarrow$ ) En utilisant le lemme 4.15, et la proposition 4.20f,

$$\mathbf{r}_M^G \langle \Delta \rangle = \nu^{-(k-1)/2+s} \rho_0 \otimes \dots \otimes \nu^{(k-1)/2+s} \rho_0 \in \mathcal{C}(M)$$

pour une certaine  $\rho_0 \in \mathcal{C}(G_m)$  unitaire et  $s \in \mathbb{R}$ . Alors,  $\omega_\pi = \omega_{\mathbf{r}_M^G \langle \Delta \rangle}|_Z$  est un caractère unitaire si et seulement si  $s = 0$ .  $\square$

*Multisegments.* On définit un *multisegment* de  $\mathcal{C}$  par un multiensemble  $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$  de segments, et on note  $\mathcal{O}$  l'ensemble des multisegments de  $\mathcal{C}$ .

**Définition 5.6.** Soient  $\Delta_1 = [\rho_1, \rho'_1], \Delta_2 = [\rho_2, \rho'_2] \in \mathcal{S}$ . On dit que  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont *liés* si  $\Delta_1 \not\subset \Delta_2$ ,  $\Delta_2 \not\subset \Delta_1$ , et  $\Delta_1 \cup \Delta_2$  est aussi un segment. On dit que  $\Delta_1$  *précède*  $\Delta_2$ , et on écrit  $\Delta_1 < \Delta_2$ , s'ils sont liés et  $\rho_2 = \nu^k \rho_1$  pour  $k \in \mathbb{Z}_+$ .

**Théorème 5.7.** Soient  $\Delta_1, \dots, \Delta_r \in \mathcal{S}$ . Alors  $\langle \Delta_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta_r \rangle$  est irréductible si et seulement si  $\Delta_i$  et  $\Delta_j$  ne sont pas liés pour tous  $i$  et  $j$ .

*Démonstration.* Voir [10] §4.3.  $\square$

**5.2. Classification des représentations irréductibles.** À l'aide des représentations  $\langle \Delta \rangle$ , on a la classification suivante de  $\text{Irr } G_n$ .

**Théorème 5.8** (Classification de Bernstein et Zelevinsky). Soient  $\Delta_1, \dots, \Delta_r \in \mathcal{S}$ . On dit que le multisegment  $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$  satisfait la condition  $(\star)$  si pour tous  $i < j$  on a  $\Delta_i \not\prec \Delta_j$

- Si le multisegment  $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$  satisfait la condition  $(\star)$ , alors  $\langle \Delta_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta_r \rangle$  a une unique sous-représentation irréductible ; on la note  $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle$ .
- Les représentations  $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle$  et  $\langle \Delta'_1, \dots, \Delta'_r \rangle$  sont isomorphes si et seulement si les multisegments  $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$  et  $(\Delta'_1, \dots, \Delta'_r)$  sont identiques (à une permutation près).
- Tout représentation lisse irréductible de  $G_n$  est isomorphe à une  $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle$ .

*Démonstration.* Voir [10] §6.  $\square$

*Remarque 5.9.* Soit  $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$  un multisegment qui vérifient la condition  $(\star)$  avec  $\Delta_i = [\rho_i, \rho'_i]$ . Par la proposition 4.20 bc et la proposition 4.34, le facteur cuspidale irréductible "évident"

$$\rho_1 \otimes \dots \otimes \rho'_1 \otimes \dots \otimes \rho_r \otimes \dots \otimes \rho'_r \in \mathcal{C}(M),$$

est un sous-quotient de  $\mathbf{r}_M^G \langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle$ , où  $M$  est le sous-groupe de Levi "le plus profond" correspondant.

On peut énoncer ce théorème sous une forme différente en utilisant les notations suivantes. Pour tout  $a \in \mathcal{O}$  non-vide on peut choisir un ordre  $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$  sur  $a$  qui satisfait la condition  $(\star)$ . Par le théorème 5.8 b, la représentation  $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle$  ne dépend que de multisegment  $a$  ; on la note  $\langle a \rangle$ . Pour le multiensemble vide  $\emptyset \in \mathcal{O}$  on définit  $\langle \emptyset \rangle$  comme la représentation triviale du groupe  $G_0 = \{\mathbf{1}\}$ .



**Théorème 5.10.** *Si on pose  $\text{Irr} = \bigcup_n \text{Irr } G_n$ , alors l'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &\rightarrow \text{Irr} \\ a &\mapsto \langle a \rangle \end{aligned}$$

*est une bijection.*

**5.3. Involutions de Bernstein et Zelevinsky.** Si  $\Delta = [\rho, \rho'] \in \mathcal{S}$ , alors par [10] §2.10,  $\rho \times \nu\rho \times \cdots \times \rho'$  a une unique quotient irréductible ; on l'appelle  $D\langle\Delta\rangle$ . C'est aussi la unique sous-représentation de  $\rho' \times \nu^{-1}\rho \times \cdots \times \rho$ . Soit  $\rho \in \mathcal{C}(G_m)$  et  $\rho' = \nu^{k-1}\rho$ , donc comme avant  $D\langle\Delta\rangle \in \text{Irr } G_n$ , où  $n = km$ . Soit  $\beta = (m, m, \dots, m)$  une partition de  $n$ , alors on a

$$(8) \quad \mathbf{r}_{M_\beta}^G(D\langle\Delta\rangle) = \rho' \otimes \nu^{-1}\rho \otimes \dots \otimes \rho,$$

et cette propriété peut caractériser  $D\langle\Delta\rangle$ .

**Exemple 5.11.** On prend  $\nu$  de dimension un et on pose  $\Delta = [\nu^{-(n-1)/2}, \nu^{(n-1)/2}]$  et  $\pi = \langle\Delta\rangle$ . Par exemple 5.4,  $\pi \in \text{Irr } G_n$  est la représentation triviale. La représentation  $D\pi$  est la représentation de Steinberg pour  $G_n$ .

*Propriétés de l'involution et la dualité.* Soit  $\mathcal{R}(G)$  le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations lisses de longueur finie d'un groupe réductif  $G$  ; c'est un groupe abélien libre de base  $\text{Irr } G$ .

Si  $\beta = (n_1, \dots, n_r)$  est une partition de  $n$  et  $M = M_\beta$  est le sous-groupe de Levi de  $G_n$  correspondant, on identifie

$$\mathcal{R}(M) \simeq \mathcal{R}(G_{n_1}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{R}(G_{n_r}).$$

à l'aide de l'équation 6. Par la proposition 4.20 d, les foncteurs d'induction et de Jacquet définissent foncteurs

$$\mathbf{i}_M^G : \mathcal{R}(M) \rightarrow \mathcal{R}(G) \quad \text{et} \quad \mathbf{r}_M^G : \mathcal{R}(G) \rightarrow \mathcal{R}(M).$$

De plus, si on pose

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}(G_n),$$

la multiplication de la définition 4.33 induit une structure d'algèbre sur  $\mathcal{R}$ . Zelevinsky montre dans [10] §7.5 qu'en fait :

**Théorème 5.12.** *L'algèbre  $\mathcal{R}$  est un groupe abélien libre de base les  $\langle\Delta\rangle$ , où  $\Delta \in \mathcal{S}$ .*

En conséquence, on peut étendre uniquement  $D$  en un endomorphisme

$$D : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}.$$

**Théorème 5.13.** *Soit  $M$  un sous-groupe de Levi standard de  $G_n$ . On a les propriétés suivantes :*

a) *L'endomorphisme  $D : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  induit pour tout  $n \in \mathbb{N}$  les endomorphismes*

$$D_{G_n} : \mathcal{R}(G_n) \rightarrow \mathcal{R}(G_n),$$

*et donc l'endomorphisme*

$$D_M : \mathcal{R}(M) \rightarrow \mathcal{R}(M)$$

*en commutant avec le produit tensoriel.*

b) *C'est une involution, i.e.  $D^2$  est l'application d'identité.*

c)  $\mathbf{i}_M^{G_n} \circ D_M = D_{G_n} \circ \mathbf{i}_M^{G_n}$ .

d)  $\mathbf{r}_M^{G_n} \circ D_{G_n} = w_{M^-} \circ D_{M^-} \circ \mathbf{r}_{M^-}^{G_n}$ .

- e) Si  $\pi \in \mathcal{C}$ , alors  $D\pi = \pi$ .  
 f) Si  $\pi \in \text{Irr}(G_n)$ , alors  $D\pi$  l'est aussi.  
 g) Si  $\Delta$  est l'ensemble standard de racines positives simples de  $G_n$ , alors, à une signe près, on a la formule

$$D_{G_n} = \sum_{\Theta \subset \Delta} (-1)^{\#\Theta} \mathbf{i}_{M_\Theta}^{G_n} \circ \mathbf{r}_{M_\Theta}^{G_n},$$

et en particulier,  $D_{G_n}$  préserve les caractères centraux.

*Démonstration.* Voir [1] Thms. 1.7, 2.3 et Cor. 3.9 ; [8] III.3.1 et IV.5 ; et [10] §9.12.  $\square$

Ce qui est plus profond, c'est la "conjecture de dualité" de Bernstein et Zelevinsky ([10] §9.17), i.e. que  $D$  préserve les représentations irréductibles. Une généralisation de cette dualité est démontré dans [1] et [8] pour un groupe réductif quelconque.

## 6. THÉORÈME DE BERNSTEIN

Le théorème suivant est annoncé dans [10] §8.9.3 et attribué à Bernstein, mais la démonstration est omise et ne fut jamais publiée. Ce texte a pour but de donner une démonstration du théorème dans l'esprit de Bernstein et Zelevinsky.

**Théorème 6.1** (Théorème de Bernstein). *Une représentation irréductible de  $G_n$  est de quasi-carré-intégrable si et seulement si elle est isomorphe à  $D\langle\Delta\rangle$  pour un certain segment  $\Delta \in \mathcal{S}$ .*

On démontre le théorème en quelques étapes. D'abord, en utilisant le lemme 4.15, la proposition 5.5, et le théorème 5.13 on se ramène au cas des représentations de carré-intégrables et des segments centré.

**Premièrement:** on introduit le critère de Casselman pour qu'une représentation soit de carré-intégrable. Le fait que toute représentation  $D\langle\Delta\rangle$  avec  $\Delta$  centré soit de carré-intégrable est une conséquence simple du critère.

**Deuxièmement:** en utilisant la dualité, on montre un critère dual pour que l'involution d'une représentation soit de carré-intégrable.

**Troisièmement:** à l'aide du critère dual et la classification de Bernstein et Zelevinsky, la réciproque du théorème se ramène à un problème purement combinatoire sur les multiségments.

### 6.1. Le critère de Casselman.

*Exposants.* En gros, la notion d'exposant d'une représentation  $(\pi, V) \in \text{Rep } G$  est la généralisation de celle du caractère central de  $\pi$ .

**Définition 6.2.** Soit  $Z = Z(G)$ ,  $(\pi, V) \in \text{Rep } G$ , et  $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$  un caractère de  $G$ . On définit le espace propre à nilpotent près de  $\chi$

$$V_\chi = \{v \in V : \exists n \in \mathbb{Z}^+, (\pi(z) - \chi(z))^n v = 0, \forall z \in Z\}.$$

**Proposition 6.3.** *Si  $(\pi, V) \in \text{Rep } G$  est admissible, alors*

- a) on a la décomposition  $V = \bigoplus V_\chi$ ,  
 b) si  $V$  est de longueur finie alors il n'existe qu'un nombre fini de  $\chi$  tel que  $V_\chi \neq 0$ .

*Démonstration.* Voir [6] 2.1.9.  $\square$

**Définition 6.4.** Si  $(\pi, V) \in \text{Rep } G$  est de longueur fini, on appelle tout caractère  $\chi|_Z$  de  $Z$  un exposant de  $\pi$  si  $V_\chi \neq 0$ .

*Remarque 6.5.* Si  $\pi$  est de longueur finie, alors ses exposants sont les caractères centraux de tous ses sous-quotients irréductibles. Normalement, on parle de l'exposant  $\chi$  d'un foncteur de Jacquet de  $\pi$ , i.e. si  $M$  est un sous-groupe de Levi, c'est un caractère  $\chi : Z(M) \rightarrow \mathbb{C}^\times$  de la forme

$$\chi = \omega_\sigma = \sigma|_{Z(M)},$$

pour un certain sous-quotient irréductible  $\sigma$  de  $\mathbf{r}_M^G \pi$ . Comme les foncteurs de Jacquet préserve les représentations de longueur finie, il n'y a qu'un nombre fini de tels exposants.

*Critère de Casselman et la première utilisation.*

**Définition 6.6.** Soit  $\Delta$  l'ensemble de racines simples du groupe réductif  $G$  relatives au tore maximale  $T$ . Si  $M = M_\Theta$  est un sous-groupe de Levi standard de  $G$  pour  $\Theta \subset \Delta$ , on pose

$$T_M^- = \{t \in T_M : |\alpha(t)|_F \leq 1, \forall \alpha \in \Delta \setminus \Theta\}.$$

On dispose aussi de

$$T^\pm = \{t \in T : |\alpha(t)|_F = 1, \forall \alpha \in \Delta\} = T(\mathcal{O})Z(G).$$

**Exemple 6.7.** Pour le groupe  $G = G_n$  on a une description explicite pour les ensembles  $T_M^-$ . Soit  $M = M_\Theta = M_\beta$  pour  $\Theta \subset \Delta$  et  $\beta = (n_1, \dots, n_r)$  une partition de  $n$  (voir exemple 2.5). D'abord,

$$T_M = \{(t_1; \dots; t_r) \in G_n : t_1, \dots, t_r \in F\},$$

où

$$(t_1; \dots; t_r) = \text{diag}(\underbrace{t_1, \dots, t_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{t_r, \dots, t_r}_{n_r}) \in T_M,$$

et comme toute  $\alpha \in \Delta \setminus I$  agit "entre les blocs",

$$T_M^- = \{(t_1; \dots; t_r) \in T_M : v_F(t_1) \geq \dots \geq v_F(t_r)\}.$$

De même,  $T^\pm$  est l'ensemble des éléments ayant tous la même valuation.

**Théorème 6.8** (Critère de Casselman). *Si  $\pi \in \text{Irr}^u G$ , alors  $\pi$  est de carré-intégrable si et seulement si pour tout sous-groupe de Levi standard  $M$  de  $G$  et pour tout exposant  $\chi$  de  $\mathbf{r}_M^G \pi$ , on a*

$$(9) \quad |\chi(t)| < 1, \quad \forall t \in T_M^- \setminus T^\pm.$$

*Démonstration.* Voir [6] Thm. 6.5.1. □

*Remarque 6.9.* Par le théorème 4.25, soit  $M'$  un sous-groupe de Levi standard tel que  $\pi$  est une sous-représentation irréductible de  $\mathbf{i}_{M'}^G \rho$  où  $\rho \in \mathcal{C}(M')$ . Si un sous-groupe de Levi  $L$  de  $G$  ne contient aucune associé à  $M'$ , alors  $\mathbf{r}_L^G \pi = 0$  par le théorème 4.28. Soit  $M \subset L$  un sous-groupe de Levi standard associé à  $M'$ . Comme le foncteur de Jacquet est transitive (la proposition 4.20 c), si  $\chi$  est un exposant de  $\mathbf{r}_M^G \pi$ , alors  $\chi|_{Z(L)}$  est un exposant de  $\mathbf{r}_L^G \pi$ . Donc, il suffit de vérifier le critère pour les sous-groupes de Levi  $M$  associés à  $M'$ .

**N.B.** Désormais, on considère toute  $\pi \in \text{Irr} G$  comme sous-représentation de  $\mathbf{i}_{M'}^G \rho$  où  $M'$  est un sous-groupe de Levi standard de  $G$  et  $\rho \in \mathcal{C}(M')$ .

Le critère ci-dessus est valide pour un groupe réductif quelconque défini sur  $F$ . Pour le groupe  $G_n$  on peut l'énoncer en termes combinatoires. D'abord, on donne plus de notations.

**Lemme 6.10.** *Soit  $\pi \in \text{Irr} G_n$ . Alors, il existe un  $s \in \mathbb{R}$  tel que*

$$\pi = \nu^s \pi^u,$$

où  $\pi^u \in \text{Irr}^u G_n$ .

*Démonstration.* C'est une réformulation simple du lemme 4.15.  $\square$

**Définition 6.11.** Soit  $\pi \in \text{Irr } G$  et  $\chi = \omega_\sigma$  un exposant de  $\mathbf{r}_M^G \pi$ . Soit  $M = M_\beta$  où  $\beta = (n_1, \dots, n_r)$  et

$$\sigma \simeq \sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_r \in \mathcal{C}(M), \quad \text{avec} \quad \sigma_i = \nu^{s_i} \sigma_i^u \in \mathcal{C}(G_{n_i}).$$

Pour  $1 \leq i \leq r$  on pose  $p_i = n_i s_i$  et on appelle le vecteur  $\mathbf{p} = (p_i)$  le vecteur de  $\chi$ . On pose  $|\mathbf{p}| = \sum_{i=1}^r p_i$ .

On remarque que pour tout  $t \in T_M$ , on a

$$\begin{aligned} -\log_q |\chi(t)| &= -\log_q |(\nu^{s_1} \sigma_1^u \otimes \dots \otimes \nu^{s_r} \sigma_r^u)(t_1; \dots; t_r)| \\ (10) \quad &= -\log_q \prod_{i=1}^r |\nu^{s_i} \sigma_i^u(t_i)| = \sum_{i=1}^r n_i s_i v_F(t_i) = \sum_{i=1}^r p_i v_F(t_i), \end{aligned}$$

et en particulier, que si  $\pi \in \text{Irr } G$ , alors

$$(11) \quad \pi \in \text{Irr}^u G \quad \Leftrightarrow \quad |\mathbf{p}| = 0,$$

pour tout exposant de  $\mathbf{r}_M^G \pi$  pour tout sous-groupe de Levi  $M$  de  $G$ . On a immédiatement :

**Théorème 6.12** (Critère combinatoire de Casselman pour  $G_n$ ). *Si  $\pi \in \text{Irr}^u G_n$ , alors  $\pi$  est de carré-intégrable si et seulement si pour tout sous-groupe de Levi  $M \sim M'$  le vecteurs  $\mathbf{p}$  de tout exposant de  $\mathbf{r}_M^G \pi$  vérifient*

$$\sum_{i=1}^r p_i a_i > 0,$$

pour toute suite décroissante non constante  $a_i \in \mathbb{Z}$ .

*Démonstration.* Il y a une bijection entre les suites  $(v_F(t_i))$  pour  $t \in T_M^- \setminus T^+$  et les suites décroissante non constante.  $\square$

**Exemple 6.13.** Soit  $\pi = D\langle \Delta \rangle \in \text{Irr } G_n$  où  $\Delta \in \mathcal{S}$  est centré. Comme  $M' = M_\beta$ , avec  $\beta = (m, \dots, m)$ , le seul sous-groupe de Levi  $M \sim M'$ , c'est lui-même, et de plus, son foncteur de Jacquet est irréductible par l'équation 8. Donc le seul exposant a vecteur

$$\mathbf{p} = ((k-1)/2, \dots, -(k-1)/2),$$

qui vérifie manifestement le critère combinatoire. On en a déduit que toute représentation de la forme  $D\langle \Delta \rangle$  est de quasi-carré-intégrable.

**6.2. Le critère de Casselman dual.** On pourrait démontrer le critère dual suivant pour un groupe réductif quelconque, mais pour l'instant, on est content de le donner pour le group  $G_n$ .

**Théorème 6.14** (Critère de Casselman dual). *Si  $\pi \in \text{Irr}^u G$ , alors  $D_G \pi$  est de carré-intégrable si et seulement si pour tout sous-groupe de Levi standard  $M \sim M'$ , tout exposant  $\chi$  de  $\mathbf{r}_M^G \pi$  vérifie*

$$|\chi(t)| > 1, \quad \forall t \in T_M^- \setminus T^=,$$

i.e. si  $\mathbf{p}$  est le vecteur de  $\chi$ ,

$$\sum_{i=1}^r p_i a_i < 0,$$

pour toute suite décroissante non constante  $a_i \in \mathbb{Z}$ .

*Démonstration.* Pour  $t \in T_M$ , on a

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_M^G D\pi)(t) &= w_{M^-}(D_{M^-} \mathbf{r}_{M^-}^G \pi)(t) \\ &= (D_{M^-} \mathbf{r}_{M^-}^G \pi)(w_{M^-}^{-1} t w_{M^-}) \\ &= (\mathbf{r}_{M^-}^G \pi)(t^-), \end{aligned}$$

où  $t^- = w_{M^-}^{-1} t w_{M^-}$ . Les égalités ci-dessus sont justifiées par le théorème 5.13 d, a, et e, respectivement, et comme  $\mathbf{r}_{M^-}^G \pi$  est cuspidale. Si  $t^- = (t_1^-; \dots; t_r^-)$ , alors par la proposition 4.32 et l'équation 10, la suite  $(v_F(t_i^-))$  est croissante non constante. Finalement, il suffit de remarquer que

- a)  $\pi \in \text{Irr}^u G$  si et seulement si  $D_G \pi \in \text{Irr}^u G$ ; c'est le théorème 5.13 fg,
- b)  $(a_i) \mapsto (-a_i)$  est une bijection entre suites décroissantes non constantes et suites croissantes non constantes.  $\square$

**6.3. Traduction en termes combinatoires.** Pour démontrer la réciproque du théorème de Bernstein, i.e. que toute représentation de carré-intégrable est isomorphe à une  $D\langle\Delta\rangle$  pour un  $\Delta \in \mathcal{S}$  centré, on suit la suite suivante d'équivalences : on suppose que  $\pi \in \text{Irr}^u G$ ,

$$\begin{aligned} \pi \text{ est de carré-intégrable} &\Rightarrow \pi \simeq D_G \langle\Delta\rangle \\ D_G \pi \text{ est de carré-intégrable} &\Rightarrow D_G \pi \simeq D_G \langle\Delta\rangle \Rightarrow \pi \simeq \langle\Delta\rangle \\ \pi \not\simeq \langle\Delta\rangle &\Rightarrow D_G \pi \text{ n'est pas de carré-intégrable} \\ \pi \simeq \langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle \text{ où } r \geq 2 &\Rightarrow \pi \text{ ne satisfait pas le critère dual.} \end{aligned}$$

La première équivalence est une conséquence du théorème 5.13 bfg, i.e. il y a une bijection entre les  $\pi \in \text{Irr}^u G$  et les  $D_G \pi \in \text{Irr}^u G$ . La troisième équivalence est une conséquence de la classification de Bernstein et Zelevinsky et le critère de Casselman dual, i.e. les théorèmes 5.8 et 6.14. Alors, la réciproque du théorème de Bernstein est équivalente au suivant :

**Théorème 6.15.** *Soit  $\pi \in \text{Irr}^u G$ . Si  $\pi \simeq \langle\Delta_1, \dots, \Delta_r\rangle$  où  $r \geq 2$ , alors il existe un sous-groupe de Levi  $M \sim M'$ , un exposant  $\chi$  de  $\mathbf{r}_M^G \pi$ , et un  $t \in T_M^- \setminus T^=$  tel que  $|\chi(t)| \leq 1$ .*

On le démontre à l'aide du lemme évident suivant :

**Lemme 6.16.** *Soit  $\pi \in \text{Irr} G$ ,  $M$  un sous-groupe de Levi standard de  $G$ ,  $\chi$  un exposant de  $\mathbf{r}_M^G \pi$ , et  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_r)$  son vecteur. Alors, s'il existe un  $1 \leq j < r$  tel que*

$$\sum_{i=1}^j p_i \geq 0,$$

*alors, il existe un  $t \in T_M^- \setminus T^=$  tel que  $|\chi(t)|_F \leq 1$ .*

*Démonstration.* L'élément  $t = (t_1; \dots; t_r) \in T_M$  donné par

$$t_i = \begin{cases} \varpi & \text{pour } 1 \leq i \leq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases},$$

satisfait  $t \in T_M^- \setminus T^=$  et marche pour le lemme.  $\square$

L'approche naturelle est de essayer l'exposant "évident" de la remarque 5.9, dont l'existence est garantie. En fait, ça marche.

**Définition 6.17.** Soit  $\Delta = \{\rho, \dots, \nu^{k-1} \rho\} \in \mathcal{S}$  et  $\mathbf{p}$  le vecteur de l'unique exposant "le plus profond" de  $\langle\Delta\rangle \in \text{Irr} G$ ; on l'appelle le vecteur de  $\Delta$ . On pose

$$\ell(\mathbf{p}) = k, \quad m(\mathbf{p}) = |\mathbf{p}|/\ell(\mathbf{p}).$$

**Proposition 6.18.** Soient  $\Delta_i \in \mathcal{S}$  avec  $\mathbf{p}_i$  pour  $1 \leq i \leq r$  leurs vecteurs. Il existe un ordre  $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$  tel que  $m(\mathbf{p}_1) \geq \dots \geq m(\mathbf{p}_r)$  et qui satisfait la condition  $(\star)$ .

*Démonstration.* Soit  $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$  un ordre qui satisfait la condition  $(\star)$ . On suppose que pour un certain  $1 \leq i \leq r$ , on a

$$m(\mathbf{p}_i) < m(\mathbf{p}_{i+1}),$$

mais comme  $\Delta_i \not\prec \Delta_{i+1}$ ,

**soit:**  $\Delta_i$  et  $\Delta_{i+1}$  ne sont pas liés et donc on peut échanger  $\Delta_i$  et  $\Delta_{i+1}$  en préservant la condition  $(\star)$ ; ou

**soit:**  $\Delta_{i+1} < \Delta_i$ , qui est impossible.  $\square$

*Démonstration du théorème 6.15.* Soient  $\Delta_i \in \mathcal{S}$  avec  $\mathbf{p}_i$  pour  $1 \leq i \leq r$  leurs vecteurs. Soit  $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$  un multisegment qui vérifie la condition de la proposition 6.18 et  $M$  le sous-groupe de Levi “le plus profond” correspondant. On suppose que  $r \geq 2$  et que  $\pi = \langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle \in \text{Irr}^u G$ . On remarque que par l’exemple 5.9,  $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r)$  est le vecteur d’un exposant de  $\mathfrak{r}_M^G \pi$  et donc, par l’équation 11, on a

$$|\mathbf{p}| = \sum_{i=1}^r |\mathbf{p}_i| = \sum_{i=1}^r m(\mathbf{p}_i) \ell(\mathbf{p}_i) = 0.$$

Mais comme,

$$m(\mathbf{p}_1) \geq \dots \geq m(\mathbf{p}_r),$$

on a forcément  $m(\mathbf{p}_1) \geq 0$ . Donc le choix de  $j = \ell(\mathbf{p}_1)$  marche pour le lemme 6.16. Finalement  $\pi$  n’est pas de carré-intégrable.  $\square$

## RÉFÉRENCES

- [1] A.-M. Aubert, *Dualité dans le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations lisses de longueur finie d’un groupe réductif  $p$ -adique*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** :6 (1995), 2179–2189; Erratum, *ibid*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** :11 (1996), 4687–4690.
- [2] I. N. Bernstein et A. V. Zelevinsky, *Induced Representations of Reductive  $p$ -adic Groups I*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **10** (1977), 441–472.
- [3] I. N. Bernstein et A. V. Zelevinsky, *Representations of the Group  $GL(n, F)$  where  $F$  is a non-Archimedean Local Field*, Russian Math. Surveys **31** :3 (1976), 1–68.
- [4] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [5] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Hermann, Paris, 1971.
- [6] W. Casselman, *Introduction to the Theory of Admissible Representations of  $p$ -adic Reductive Groups*, preprint.
- [7] J. E. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [8] P. Schneider et U. Stuhler, *Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math, **85** (1997), 97–191.
- [9] T. A. Springer, *Linear Algebraic Groups*, Birkhäuser, Boston, 1998.
- [10] A. V. Zelevinsky, *Induced Representations of Reductive  $p$ -adic Groups II : on irreducible representations of  $GL(n)$* , Ann. Sci. École Norm. Sup. **13** (1980), 154–210.

## 7. NOTATIONS

$k$	Un corps algébriquement clos. (1)
$F, \mathcal{O}, \varpi, q,  \cdot _F$	Un sous-corps de $k$ , normalement local non archimédien, son anneau d'entiers, une uniformisante, le nombre d'élément de son corps résiduel. (1), (14)
$R(\mathbf{G}), R_u(\mathbf{G})$	Le radical, radical unipotent d'un groupe $\mathbf{G}$ . (1)
$\mathbf{G}, G$	Un $F$ -groupe algébrique réductif, son groupe de $F$ -points. (1)
$Z(\mathbf{G})$	Le centre d'un groupe $\mathbf{G}$ . (1)
$X(\mathbf{G}), X(\mathbf{G})_F$	Le groupe de caractères ( $F$ -)rationaux de $\mathbf{G}$ (2)
$\mathbf{B}, \mathbf{T}$	Sous-groupe de Borel standard de $\mathbf{G}$ , un tore maximal dans $\mathbf{B}$ . (2)
$\mathbf{P}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$	Un sous-groupe parabolique contenant $\mathbf{B}$ , son sous-groupe de Levi, son radical unipotent. (2)
$\beta$	Une partition de $n$ , $\beta = (n_1, \dots, n_r)$ . (3)
$W(\mathbf{G}, \mathbf{T}), W_M$	Le groupe de Weyl du groupe $\mathbf{G}$ relative au tore $\mathbf{T}$ , d'un sous-groupe de Levi. (4), (12)
$\Phi(\mathbf{G}, \mathbf{T}), \Phi^+, \Phi^-, \Delta$	L'ensemble des racines de $\mathbf{G}$ relatives à $\mathbf{T}$ , ou bien, un système abstrait de racines, les racines positives, négatives, et une base de racines simples. (5)
$\delta_P$	Le caractère module d'un sous-groupe parabolique $P$ (6)
$\mu_G$	Une mesure de Haar de $G$ . (7)
$\text{mod}_N$	Le module topologique d'un sous-groupe fermé $N$ . (7)
$\mathcal{S}(G, V), \mathcal{S}(G)$	L'espace de Schwartz-Bruhat de $G$ . (7)
$(\pi, V), (\pi^\vee, V^\vee)$	Une représentation complexe d'un groupe, son contragrédiente. (8), (9)
$\text{Hom}_G(\pi, \pi')$	L'espace des opérateurs d'entrelacement de $\pi$ dans $\pi'$ . (8)
$\text{Rep } G$	La catégorie de représentations lisses de $G$ . (8)
$\text{Irr } G, \text{Irr}^u G$	L'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations irréductible de $G$ , ceux à caractère central unitaire. (8), (9)
$\omega_\pi$	Le caractère central d'une représentation $\pi \in \text{Irr}(G)$ . (9)
$c_{v, v^\vee}$	Un élément de matrice d'une $(\pi, V) \in \text{Rep } G$ (10)
$\mathbf{i}_M^G, \mathbf{r}_M^G$	Le foncteurs d'induction parabolique et de Jacquet normalisés. (11)

$\mathcal{C}(G), \mathcal{C}$	L'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations cuspidales irréductibles, $\mathcal{C} = \cup_n \mathcal{C}(G_n)$ . (12) , (15)
$M^-, w_{M^-}$	Le sous-groupe de Levi "renversé" et l'élément du groupe de Weyl correspondant. (13)
$\rho \times \rho'$	La représentation $\mathbf{i}_M^G(\rho \otimes \rho')$ . (14)
$\nu$	Le caractère $ \det _F$ de $G_n$ . (15)
$\Delta, \langle \Delta \rangle$	Un segment de $\mathcal{C}$ , la unique sous-représentation irréductible de $\rho \times \nu\rho \times \dots \times \rho'$ si $\Delta = [\rho, \rho']$ . (15)
$\mathcal{S}, \mathcal{O}$	L'ensemble de segments et multisegments de $\mathcal{C}$ . (15)
$D\langle \Delta \rangle, D, D_G$	L'involution de Bernstein et Zelevinsky. (17)
$\mathcal{R}(G), \mathcal{R}$	Le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations lisses de longueur finie d'un groupe réductif $G$ , $\mathcal{R} = \oplus_n \mathcal{R}(G_n)$ . (17)
$V_\chi$	L'espace propre à nilpotent près d'un caractère $\chi$ . (18)
$T_M^-, T^=$	Sous-ensembles de $T_M$ . (19)
$\mathfrak{p}$	Le vecteur d'un exposant. (20)