

Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*
(Théorie des nombres/*Number Theory*)

Fonction zêta de Riemann et conjecture de Weyl-Berry pour les tambours fractals

Michel L. LAPIDUS et Carl POMERANCE

Résumé – Nous résolvons, dans le cas particulier de la dimension un, la « conjecture de Weyl-Berry modifiée » formulée par le premier auteur dans son travail récent sur les vibrations d'un « tambour à frontière fractale ». Ce faisant, nous établissons des liens inattendus et intrigants entre ce sujet et la fonction zêta de Riemann.

The Riemann zeta-function and the Weyl-Berry conjecture for fractal drums

Abstract – We solve, in the one-dimensional case, the “modified Weyl-Berry conjecture” formulated by the first author in his previous work on the vibrations of “drums with fractal boundary”. We establish, in the process, some unexpected and intriguing connections with the Riemann zeta-function.

Abridged English Version – Based on his earlier work ([5], [6]) on the vibrations of “drums with fractal boundary”, M. L. Lapidus has corrected and refined M. V. Berry's conjecture ([1], [2]) that extended from the “smooth” to the “fractal” case H. Weyl's conjecture for the asymptotics of the eigenvalues of the Laplacian ⁽¹⁾. We establish here in the one-dimensional case this “modified Weyl-Berry conjecture” – formulated in [5], § 5.2 – and discover, in the process, some interesting connections with the Riemann zeta-function.

Let Ω be a bounded open set in \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) with “fractal” (i. e., very irregular) boundary Γ ; let Δ be the (variational) Dirichlet Laplacian on Ω . Denote by $N(\lambda)$ the “counting function” (i. e., the number of positive eigenvalues $\leq \lambda$, counted with multiplicity) of $\mathcal{A} := -\Delta$. (Recall that \mathcal{A} has a discrete spectrum.)

Let $D = D(\Gamma) \in [n-1, n]$ [resp. $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}^*(D; \Gamma)$, $\mathcal{M}_* = \mathcal{M}_*(D; \Gamma)$] denote the Minkowski dimension (resp. upper, lower Minkowski content) of Γ ; we say that Γ is “Minkowski measurable” if $0 < \mathcal{M}_* = \mathcal{M}^* < +\infty$ [and then write $\mathcal{M} = \mathcal{M}(D; \Gamma)$, the Minkowski content of Γ , for this common value]. [For the precise definitions, see [5], Definition 2.1 and § 3. Recall that D is the infimum of the numbers $d \geq 0$ such that $\mathcal{M}^*(d; \Gamma) := \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{-(n-d)} |\Gamma_\varepsilon \cap \Omega|_n < +\infty$, where Γ_ε is the set of $x \in \mathbb{R}^n$ within a distance

$< \varepsilon$ from Γ ; moreover, $\mathcal{M}_*(d; \Gamma)$ is defined as $\mathcal{M}^*(d; \Gamma)$, but by means of the lower limit. Here, $|A|_n$ denotes the n -dimensional Lebesgue measure or “volume” of $A \subset \mathbb{R}^n$.] ⁽²⁾ Note that $\mathcal{M}(D; \Gamma)$ is a “fractal” analogue of the length (resp. area) of the boundary Γ when $n=2$ (resp. $=3$). Following [5], we say that Γ is “fractal” if $D \in (n-1, n]$, and “nonfractal” otherwise (i. e., if $D = n-1$, the topological dimension of Γ). We stress that no assumption of self-similarity, in the sense of [9], is made about Γ .

We can now recall the statement of the “modified Weyl-Berry conjecture” ([5], Conjecture 5.1): If Ω has “fractal” boundary Γ with Minkowski dimension $D \in (n-1, n)$ and if Γ is “Minkowski measurable”, then

$$(1.1) \quad N(\lambda) = \varphi(\lambda) - c_{n,D} \mathcal{M}(D; \Gamma) \lambda^{D/2} + o(\lambda^{D/2}), \quad \text{as } \lambda \rightarrow +\infty,$$

where $\varphi(\lambda) := (2\pi)^{-n} \mathcal{B}_n |\Omega|_n \lambda^{n/2}$ and $c_{n,D}$ is a constant depending only on n and D .

Note présentée par Gustave CHOQUET.

In [5], Theorem (and Corollary) 2.1, the first author has partially solved a more general form of this conjecture by proving, in particular, that if Γ is "fractal" with $\mathcal{M}^*(D; \Gamma) < +\infty$, then Weyl's asymptotic law *with error term* holds:

$$(1.2) \quad N(\lambda) = \varphi(\lambda) + O(\lambda^{D/2}), \quad \text{as } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Moreover, he has shown by means of examples that the remainder estimate in (1.2) is *sharp* in every possible "fractal" (*i. e.* Minkowski) dimension $D \in (n-1, n)$; see [5], Examples 5.1 and 5.1'. Further, Berry's original conjecture ([1], [2])—which was stated in terms of the Hausdorff dimension H rather than the Minkowski dimension D , of Γ —obviously fails for these examples since $H = n-1$, here. (The fact that Berry's conjecture was incorrect was first noted in [3], where the use of D was suggested; theoretical reasons for favoring the Minkowski dimension D are provided throughout [5]. See also [7].)

We have established the "modified Weyl-Berry conjecture" in the *one-dimensional* case (*i. e.*, when $n=1$) and, in this Note, we shall sketch a proof of our theorem and illustrate it for the aforementioned one-parameter family of examples. In the process, we shall determine the precise value of the constant $c_{1,D}$ occurring in (1.1), and establish some unexpected and intriguing connections with the Riemann zeta-function ζ . (See Corollary 3 below.)

This English version will also serve as an introduction to the French text below; the latter is organized as follows. Our results are stated precisely in paragraph 2 and illustrated by two examples in paragraph 4, while a sketch of the proof of one of them is provided in paragraph 3.

PRÉSENTATION DES RÉSULTATS. — Par nécessité de concision, nous renvoyons le lecteur au texte anglais ci-dessus pour une introduction aux problèmes abordés et certaines de nos notations.

Soit Ω un ouvert borné non vide de \mathbb{R} , de frontière $\Gamma = \partial\Omega$; nous écrivons Ω comme la réunion de ses composantes connexes: $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, où les intervalles ouverts I_j sont deux à deux disjoints et de longueur l_j . Puisque $|\Omega|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} l_j < +\infty$, on peut supposer que $l_1 \geq l_2 \geq \dots > 0$. (Le cas où Ω est une réunion finie d'intervalles ouverts est sans intérêt ici.) Sauf mention explicite du contraire [comme à la partie (a) du théorème 1] $\{l_j\}_{j=1}^{\infty}$ désignera toujours *la suite associée à Ω* de cette manière.

On voit, comme dans [5], exemple 5.1, que $N(\lambda; I_j) = [l_j x]$ et donc, d'après [5], lemme 4.2, que

$$(2.1) \quad N(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} N(\lambda; I_j) = \sum_{j=1}^{\infty} [l_j x], \quad \text{où } x := \pi^{-1} \lambda^{1/2};$$

ici, $N(\lambda; I_j)$ désigne la « fonction de comptage » associée à I_j et $[v]$ la *partie entière* de v . [Bien entendu, chaque somme dans (2.1) est finie puisque $l_j \downarrow 0$.]

Soit $\zeta = \zeta(s)$ la fonction zêta de Riemann (*voir, e. g.*, [4]). Rappelons que $\zeta(s) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-s}$ pour $\text{Re } s > 1$ et que ζ admet un prolongement méromorphe à \mathbb{C} tout entier, avec un pôle

simple unique au point $s=1$. En particulier, dans le domaine $\operatorname{Re} s > 0$, on a

$$(2.2) \quad \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \int_1^\infty ([t]^{-s} - t^{-s}) dt;$$

en effet, cette identité est évidente pour $\operatorname{Re} s > 1$ et l'intégrale est analytique pour $\operatorname{Re} s > 0$.

THÉORÈME 1. — (a) Soit $\{l_j\}_{j=1}^\infty$ une suite décroissante positive quelconque telle que

$$(2.3) \quad l_j \sim Lj^{-1/D}, \quad \text{quand } j \rightarrow \infty, \text{ pour } D \in (0, 1) \text{ et } L > 0.$$

Alors

$$(2.4) \quad \sum_{j=1}^\infty [l_j x] = \left(\sum_{j=1}^\infty l_j \right) x + \zeta(D) L^D x^D + o(x^D), \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty.$$

(b) En particulier, si la suite $\{l_j\}_{j=1}^\infty$ associée à Ω vérifie l'hypothèse (2.3) et si $\varphi(\lambda) := \pi^{-1} |\Omega|_1 \lambda^{1/2}$, on déduit de (2.1) et (2.4) que

$$(2.5) \quad N(\lambda) = \varphi(\lambda) + \pi^{-D} \zeta(D) L^D \lambda^{D/2} + o(\lambda^{D/2}), \quad \text{quand } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Le théorème suivant fournit en particulier une caractérisation d'un intérêt intrinsèque du cas où $\Gamma = \partial\Omega$ est Minkowski mesurable [avec $D = D(\Gamma) \in (0, 1)$] et montre que la situation de l'exemple 5.1 de [5] est, en quelque sorte, caractéristique du cas général. (Voir aussi l'appendice C de [5].)

THÉORÈME 2. — La suite $\{l_j\}_{j=1}^\infty$ associée à Ω vérifie l'hypothèse (2.3) si et seulement si $\Gamma = \partial\Omega$ a pour dimension de Minkowski $D \in (0, 1)$ et est de plus Minkowski mesurable (i. e., si et seulement si les hypothèses de la « conjecture de Weyl-Berry modifiée » sont vérifiées). En outre, dans ce cas-là,

$$(2.6) \quad \mathcal{M}(D; \Gamma) = \frac{2^{1-D}}{1-D} L^D.$$

En utilisant les théorèmes 1 (b) et 2, on peut désormais établir la conjecture de Weyl-Berry modifiée dans le cas où $n=1$ (3). On obtient également la valeur exacte de la constante $c_{1,D}$ qui s'exprime — de manière assez surprenante — à l'aide de $\zeta(D)$.

COROLLAIRE 3 (Résolution de la conjecture de Weyl-Berry modifiée dans le cas de la dimension un). — Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R} tel que $\Gamma = \partial\Omega$ soit mesurable au sens de Minkowski et de dimension de Minkowski $D \in (0, 1)$. Alors :

$$(2.7) \quad N(\lambda) = \varphi(\lambda) - c_{1,D} \mathcal{M}(D; \Gamma) \lambda^{D/2} + o(\lambda^{D/2}), \quad \text{quand } \lambda \rightarrow +\infty,$$

où $\varphi(\lambda) := \pi^{-1} |\Omega|_1 \lambda^{1/2}$ et la constante $c_{1,D}$ est donnée explicitement par :

$$(2.8) \quad c_{1,D} := 2^{-(1-D)} \pi^{-D} (1-D) (-\zeta(D)).$$

Remarque. — Dans (2.8), $c_{1,D}$ est > 0 car $\zeta(D) < 0$ pour $D \in (0, 1)$.

3. ESQUISSE DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. — La partie (b) se déduit de (a) et de (2.1). Nous indiquons maintenant comment établir la partie (a). Posons

$$\delta(x) = \left(\sum_{j=1}^\infty l_j \right) x - \sum_{j=1}^\infty [l_j x] = \sum_{j=1}^\infty \{v\}, \quad \text{où } \{v\} := v - [v] \in [0, 1) \text{ désigne la partie fraction-$$

naire de v . Soit $J(\varepsilon) = \max \{j \geq 1 : l_j \geq \varepsilon\}$; on déduit aisément de (2.3) que

$$(3.1) \quad J(\varepsilon) \sim L^D \varepsilon^{-D}, \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

Soit k un entier arbitraire ≥ 2 , fixé. Alors

$$\delta(x) = x \sum_{j > J(1/x)} l_j + \sum_{j \leq J(k/x)} \{l_j x\} + \sum_{p=2}^k \sum_{j=J(p/x)+1}^{J((p-1)/x)} \{l_j x\}.$$

A l'aide de manipulations élémentaires (e.g., la méthode de sommation d'Abel), on obtient :

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta(x) = A + B + C, \quad \text{où } A := x \sum_{j > J(k/x)} l_j \\ B := kJ\left(\frac{k}{x}\right) - \sum_{p=1}^{k-1} J\left(\frac{p}{x}\right) \quad \text{et} \quad C := \sum_{j \leq J(k/x)} (\{l_j x\} - 1). \end{array} \right.$$

On note tout d'abord que A, B et C dépendent de x et que, d'après (3.1),

$$(3.3) \quad (Lx)^{-D} |C| \leq (Lx)^{-D} J\left(\frac{k}{x}\right) \rightarrow k^{-D}, \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty.$$

Puis on déduit de (3.1) et (2.3) que, quand $x \rightarrow +\infty$, $(Lx)^{-D} A \rightarrow k^{1-D} (D/(1-D))$ et $(Lx)^{-D} B \rightarrow \left(k^{1-D} - \sum_{p=1}^{k-1} p^{-D}\right)$; donc, quand $x \rightarrow +\infty$,

$$(3.4) \quad (Lx)^{-D} (A+B) \rightarrow \frac{1}{1-D} k^{1-D} - \sum_{p=1}^{k-1} p^{-D} = f_k(D) + \frac{1}{1-D},$$

où $f_k(s) := \int_1^k (t^{-s} - [t]^{-s}) dt$. La suite $(f_k(s))_{k=1}^{\infty}$ converge uniformément sur tout compact

de $\text{Re } s > 0$ vers la fonction $f(s) := \int_1^{\infty} (t^{-s} - [t]^{-s}) dt$, qui est analytique pour $\text{Re } s > 0$.

Donc, d'après (2.2), $f_k(D) + (1/(1-D)) \rightarrow -\zeta(D)$, quand $k \rightarrow \infty$. En choisissant l'entier k assez grand, on conclut donc à l'aide de (3.2) à (3.4) que $(Lx)^{-D} \delta(x) \rightarrow -\zeta(D)$, quand $x \rightarrow +\infty$; ce qui démontre le théorème 1 (a).

Remarque. — Notre démonstration du théorème 2 sera donnée dans l'article long correspondant à cette Note. Pour la partie directe [le fait que (2.3) entraîne (2.6) et la mesurabilité au sens de Minkowski de Γ], elle est calquée sur celle de [5], appendice C (où le même résultat est établi pour l'exemple 5.1 de [5] rappelé ci-dessous). Quant à la réciproque, elle est assez longue et compliquée à établir.

4. EXEMPLES ET REMARQUES. — 4.1. ([5], exemple 5.1). — Comme cela était suggéré dans [5], remarque 5.2(c), cet exemple a joué un rôle clé dans notre résolution de la conjecture de Weyl-Berry modifiée (quand $n=1$). Soit $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, où $I_j = ((j+1)^{-a}, j^{-a})$ et $a > 0$. Alors $\Gamma = \{j^{-a} : j \geq 1\} \cup \{0\}$ et $l_j \sim Lj^{-1/D}$, avec $L := a$ et $D := (a+1)^{-1} \in (0, 1)$. Donc, d'après le théorème 2 (ou [5], appendice C) et le corollaire 3, le développement asymptotique de $N(\lambda)$ admet un *second terme*, donné par (2.7). (4), (5)

4.2. (L'ensemble de Cantor). — Soit $\Omega = (0, 1) \setminus K$, où K désigne l'ensemble triadique de Cantor. Alors $\Gamma = K$ et l'on vérifie aisément que $l_j \approx j^{-1/D}$ (i.e., $c_1 \leq l_j j^{1/D} \leq c_2$ pour $c_1, c_2 > 0$ et tout j assez grand), avec $D := \log 2 / \log 3$, la dimension « fractale » de Γ , mais que (2.3) n'a pas lieu. (Intuitivement — et paradoxalement au vu de [1] — ceci est dû à la self-similarité de K .) De plus, on montre directement (tout comme dans [5], exemple 5.1) que $\varphi(\lambda) - N(\lambda) \approx \lambda^{D/2}$ mais que le développement de $N(\lambda)$ n'admet pas de

second terme [*i. e.*, $\lambda^{-D/2} (N(\lambda) - \varphi(\lambda))$ ne converge pas]; donc les estimations de [5] (rappelées en (1.2) ci-dessus) sont *optimales* et ne peuvent pas être améliorées dans ce cas-là, et l'hypothèse de la Minkowski mesurabilité de Γ est nécessaire dans l'énoncé de la conjecture 5.1 de [5]. En outre, puisque $0 < \mathcal{M}_* < \mathcal{M}^* < +\infty$, la conjecture 5.1' de [5] est exacte pour cet exemple. [En fait, quand $n=1$, nous démontrerons la conjecture 5.1' de [5], remarque 5.7(b), § 5.2, dans l'article long correspondant à cette Note.]

4.3. *Remarques.* — Soit $\hat{\mathcal{M}}(D; \Gamma)$ le contenu de Minkowski normalisé de Γ . [Si $A \subset \mathbb{R}^n$, $\hat{\mathcal{M}}(d; A) := \mathcal{M}(d; A) / \mathcal{B}_{n-d}$, avec $\mathcal{B}_m := \pi^{m/2} / \Gamma(1 + (m/2))$, même si m n'est pas entier; pour d entier, cette normalisation est standard.] Alors, dans (2.7), $c_{1,D} \mathcal{M}(D; \Gamma) = \Lambda(D) \hat{\mathcal{M}}(D; \Gamma)$, où $\Lambda(s) := (\pi/2)^{-s} \pi^{(1-s)/2} (-\zeta(s)) / \Gamma((1-s)/2)$, pour $s \in \mathbb{C}$. La fonction Λ — découverte de cette manière assez surprenante — est entière et vérifie l'équation fonctionnelle $(\pi/2)^s \Lambda(s) = (\pi/2)^{1-s} \Lambda(1-s)$ [équivalente à celle de ζ (voir, e. g., [4], § 8)]; de plus, Λ a les mêmes zéros que ζ dans la « bande critique » $0 < \operatorname{Re} s < 1$.

Se pourrait-il qu'il existe une notion de « dimension fractale complexe » qui permettrait d'obtenir une interprétation naturelle de ζ et Λ dans la « bande critique » $0 < \operatorname{Re} s < 1$? Dans l'affirmative, nous pourrions étendre au domaine complexe l'observation suivante : la droite verticale $\operatorname{Re} s = 0$ (resp. $\operatorname{Re} s = 1$) à gauche (resp. à droite) de la « bande critique » correspondrait au cas le moins (*i. e.*, « nonfractal ») (resp. le plus) « fractal ». De plus, les symétries de ζ et Λ par rapport à la « droite critique » $\operatorname{Re} s = 1/2$ (le cas « mi-fractal », au sens de [5]) seraient réinterprétées naturellement à l'aide des « exposants fractionnaires conjugués » s et $1-s$ (introduits dans [5], remarques 4.10 et 5.3(a), pour $s \in [0, 1]$).

Dans des travaux ultérieurs, nous comptons présenter de nombreux résultats supplémentaires, tant pour $n=1$ que pour $n \geq 2$. (Dans ce dernier cas, nos résultats s'expriment à l'aide de certaines fonctions zêta d'Epstein et autres séries de Dirichlet; de plus, nous avons récemment découvert que la conjecture 5.1 de [5] doit être quelque peu modifiée.)

Ce travail a été effectué grâce aux contrats de recherche de la National Science Foundation DMS-8703138 et DMS-8904389 (pour M. L. L.) et DMS-8803297 (pour C. P.).

(¹) Voir [5] pour les motivations physiques de ces conjectures et de nombreuses références bibliographiques.

(²) Notre terminologie et nos notations diffèrent légèrement de celles de [5]; par exemple, dans [5], \mathcal{M}^* est noté $\hat{\mathcal{M}}_D(\Gamma)$ et appelé le contenu de Minkowski supérieur de Γ , relatif à Ω .

(³) Dans [5], [6], on considère non seulement le problème de Dirichlet mais aussi celui de Neumann, ainsi que des opérateurs elliptiques \mathcal{A} d'ordre $2m$ ($m \geq 1$). (Le cas particulier de (1.2) où $\mathcal{A} = -\Delta$ avec conditions aux limites de Dirichlet est annoncé dans [8].) Dans le cas présent où $n=1$, le corollaire 3 est valable pour le problème de Dirichlet ou de Neumann (conformément à [5], conjecture 5.1, pour $n=1$) puisque $N(\lambda)$ est donné par (2.1) dans les deux cas.

(⁴) Noter comme dans [5] que lorsque le paramètre a varie dans $(0, +\infty)$, $D = (a+1)^{-1}$ prend toutes les valeurs de « l'intervalle critique » $(0, 1)$; de plus, les « exposants fractionnaires conjugués » $\theta := D - (n-1) = D = (a+1)^{-1}$ et $\theta' := n - D = 1 - D = a(a+1)^{-1}$, sont échangés par la symétrie $a \leftrightarrow a^{-1}$. [Voir [5], remarque 5.3(a).] Ces propriétés sont intéressantes au vu de la « symétrie » de $\zeta(s)$ [ou de $\Lambda(s)$] par rapport à la « droite critique » $\operatorname{Re} s = 1/2$. (Voir § 4.3.)

(⁵) Une expérience sur ordinateur conduite par le premier auteur (avec l'aide de son programmeur, M. Vivek Shivpuri) a permis au préalable de vérifier numériquement la conjecture 5.1 de [5] pour cet exemple (pour plusieurs valeurs de a) et a révélé le fait que la « constante » $c_{1,D}$ [dans (1.1) ou (2.7)] prenait une valeur inattendue; ce qui a conduit à notre présente étude analytique et aux liens avec la fonction zêta.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] M. V. BERRY, Distribution of modes in fractal resonators, dans *Structural Stability in Physics*, W. GÜTTINGER et H. EIKEMEIER éd., Springer, 1979, p. 51-53.
- [2] M. V. BERRY, Some geometric aspects of wave motion: wavefront dislocations, diffraction catastrophes, diffractals, dans *Geometry of the Laplace Operator*, Proc. Symp. Pure Math., 36, Amer. Math. Soc., 1980, p. 13-38.
- [3] J. BROSSARD et R. CARMONA, Can one hear the dimension of a fractal?, *Comm. Math. Phys.*, 104, 1986, p. 103-122.
- [4] H. DAVENPORT, *Multiplicative Number Theory*, 2^e éd., Springer, 1980.
- [5] M. L. LAPIDUS, Fractal drum, inverse spectral problems for elliptic operators and a partial resolution of the Weyl-Berry conjecture, *Transactions of the American Mathematical Society* (sous presse), preprint, Univ. of Georgia, Athens, 1988, 123 p.
- [6] M. L. LAPIDUS, Can one hear the shape of a fractal drum? Partial resolution of the Weyl-Berry conjecture, dans *Differential Geometry, Calculus of Variations, and Computer Graphics; Proc. Workshop held at the M.S.R.I., Berkeley, in May 1988*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, P. CONCUS éd., Springer-Verlag (sous presse).
- [7] M. L. LAPIDUS, *Minkowski dimension and lattice points in homogeneously expanding domains with fractal boundary* (en préparation).
- [8] M. L. LAPIDUS et J. FLECKINGER-PELLÉ, Tambour fractal: vers une résolution de la conjecture de Weyl-Berry pour les valeurs propres du laplacien, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 306, série I, 1988, p. 171-175.
- [9] B. B. MANDELBROT, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, 1982. *Les objets fractals*, 2^e éd., Flammarion, 1984.

*Department of Mathematics, Boyd Graduate Studies Research Center,
The University of Georgia, Athens, Georgia 30602, U.S.A.*