LIBRAIRIE DE BACHELIER.

Ouvrages de M. POINSOT, Membre de l'Institut.

ÉLÉMENTS DE STATIQUE, suivis de quatre Mémoires sur la composition des Moments et des Aires, sur le Plan invariable du Système du Monde, sur la Théorie générale de l'Équilibre et du Mouvement des Systèmes, et sur une Théorie nouvelle de la Rotation des Corps; 9e édition, in-8° avec planches; 1848. (*Ouvrage adopté par l'Université.*) .... 6 fr. 50 c.

RECHERCHES SUR L'ANALYSE DES SECTIONS ANGULAIRES; in-4°, 1825.. 5 fr.

RÉFLEXIONS SUR LES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE DES NOMBRES, etc.; in-4°, 1845.................................. 8 fr.

THÉORIE NOUVELLE DE LA ROTATION DES CORPS, présentée à l'Institut le 19 mai 1834; in-8°.................................. 1 fr. 50 c.

THÉORIE NOUVELLE DE LA ROTATION DES CORPS; in-4° avec planches; 1851.. 12 fr.

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

Lemmi

THÉORIE NOUVELLE

DE

LA ROTATION DES CORPS,

Par M. Poinsot,

Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
de l'École Polytechnique et du Bureau des Longitudes,

Quai des Augustins, 55.

1851.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

SECONDE PARTIE.

TROISIÈME PARTIE.

THÉORIE NOUVELLE

DE

LA ROTATION DES CORPS,

PAR M. POINSOT.

[Extrait du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome XVI, 1851.]

Voici une des questions qui m'ont le plus souvent occupé, et, si l'on me permet de parler ainsi, une des choses que j'ai le plus désiré de savoir en Dynamique.

Tout le monde se fait une idée claire du mouvement d'un *point*, c'est-à-dire du mouvement d'un corpuscule qu'on suppose infiniment petit, et qu'on réduit en quelque sorte par la pensée à un point mathématique. Car il ne reste plus alors qu'à se représenter la ligne, droite ou courbe, que ce point peut décrire, et la vitesse avec laquelle il se meut suivant cette ligne. Mais, s'il s'agit du mouvement d'un corps *de grandeur sensible et de figure quelconque*, il faut convenir qu'on ne s'en fait qu'une idée très-obscure.

A la vérité, cette idée paraît d'abord s'éclaircir ou se résoudre naturellement en deux autres. Car, si l'on s'attache à regarder un seul et même point du corps, on peut suivre, d'un côté, le mouvement de ce point qui ne peut décrire qu'une certaine ligne dans l'espace, et, de l'autre côté, le mouvement du corps qui ne peut que tourner en même temps sur ce point, comme autour d'un centre fixe. Mais ce second mouvement, c'est-à-dire celui d'un corps mobile autour d'un point, sur lequel il a la liberté de pirouetter dans tous les sens, ne présente lui-même qu'une idée très-obscure.

Ce n'est pas qu'en rapportant les points du corps à des plans ou objets fixes dans l'espace, on n'ait su trouver ce qu'on appelle les *équations différentielles* de ce mouvement, et même qu'on ne soit venu à bout d'*intégrer* ces équations, ou du moins d'en ramener les intégrales aux *quadratures*, dans le cas simple d'un corps libre de toute action étrangère. Euler et d'Alembert, à peu près dans le même temps, et par des méthodes différentes, ont les premiers résolu cette importante et difficile question de la Mécanique; et l'on sait que depuis, l'illustre Lagrange a repris de nouveau ce fameux problème, pour l'approfondir et le développer à sa manière, je veux dire par une suite de formules et de transformations analytiques qui présentent beaucoup d'ordre et de symétrie. Mais il faut convenir que, dans toutes ces solutions, on ne voit guère que des calculs, sans aucune image nette de la rotation du corps. On peut bien, par ces calculs plus ou moins longs et compliqués, parvenir à déterminer le lieu où se trouvera le corps au bout d'un temps donné; mais on ne voit point du tout comment le corps y arrive: on le perd entièrement de vue; tandis qu'on voudrait l'observer et le suivre, pour ainsi dire, des yeux dans tout le cours de sa rotation.

Or c'est cette idée claire du mouvement de rotation que j'ai tâché de découvrir, afin de mettre sous les yeux ce que personne ne s'était encore représenté.

Il en résulte une solution toute nouvelle du problème de la rotation d'un corps abandonné à lui-même, soit qu'il tourne librement sur son centre de gravité, ou sur tout autre point fixe autour duquel il serait forcé de se mouvoir: véritable solution du problème, en ce qu'elle fait image, et qu'on y voit le mouvement du corps avec autant de clarté que le mouvement d'un point. Et si, de cette démonstration géométrique de la rotation des corps, on veut passer au calcul, pour mesurer toutes les différentes propriétés ou affections de ce mouvement, on n'a plus que des formules directes et toujours claires, parce que chacune d'elles n'y est que l'expression d'un théorème dynamique dont on a l'idée, et qui tend à son objet. Ainsi, notre analyse présente encore cet avantage, que tout s'y exprime et s'y développe par les seules données immédiates du problème, sans aucun mélange de ces angles ou de ces coordonnées étrangères qui ne tiennent point à la nature de la question, et qui ne viennent que de la méthode indirecte qu'on emploie pour la résoudre. Car c'est une remarque que nous pouvons faire dans toutes nos recherches mathématiques: ces quantités auxiliaires, ces calculs longs et difficiles où l'on se trouve entraîné, y sont presque toujours la preuve que notre esprit n'a point, dès le commencement, considéré les choses en elles-mêmes et d'une vue assez directe, puisqu'il nous faut tant d'artifices et de détours pour y arriver; tandis que tout s'abrége et se simplifie sitôt qu'on se place au vrai point de vue.

J'ai donc pensé qu'une solution si simple, et si propre à jeter un nouveau jour sur les questions les plus difficiles de la Dynamique, pouvait servir à l'avancement réel de la science, et méritait ainsi l'attention des géomètres; et c'est cette considération philosophique qui m'a surtout déterminé à composer le nouvel ouvrage qu'on va lire, et dont j'ai présenté l'analyse à l'Académie [*].

Je le divise en trois parties : dans la première, après avoir considéré le mouvement des corps en lui-même, je cherche les forces qui seraient capables de le produire, afin de voir réciproquement quel est le mouvement que doit prendre un corps en vertu de forces quelconques données, ce qui est le problème naturel de la Dynamique; dans la deuxième partie, je donne la solution du problème de la rotation des corps libres; et, dans la troisième, je développe les calculs qui se rapportent à cette solution.

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

DU MOUVEMENT DES CORPS CONSIDÉRÉ EN LUI-MÊME.

I.

Idée de la rotation simple et de la vitesse angulaire.

1. Le seul mouvement de rotation dont nous ayons une idée claire est celui d'un corps qui tourne sur un axe *immobile*, ou dont la direction reste la même et dans le corps et dans l'espace. Car on voit

[*] Séance du 19 mai 1834.

clairement tous les différents cercles que les points du corps décrivent dans des plans perpendiculaires à cet axe : et il est évident que tous ces mouvements simultanés sont possibles, je veux dire qu'ils peuvent s'exécuter ensemble sans que la disposition mutuelle des points, ou ce qu'on peut nommer la *figure* du corps, en soit en rien changée.

2. Nous avons également une idée nette de la quantité ou de la mesure de cette rotation. Car, comme tous les points décrivent en même temps des arcs de cercle semblables, c'est-à-dire de longueurs proportionnelles à leurs rayons, le rapport de la vitesse d'un point au rayon du cercle qu'il décrit est le même pour tous les points du corps; et c'est ce rapport constant qui fait la mesure, ou ce qu'on nomme la *vitesse angulaire*, de la rotation. Cette vitesse angulaire n'est donc autre chose que la vitesse absolue d'un point quelconque du corps pris à l'unité de distance de l'axe de rotation : de sorte que, en nommant θ cette vitesse, on a θr pour la vitesse d'un point pris à la distance r du même axe.

II.

Composition des mouvements de rotation.

3. On peut voir avec la même clarté que de semblables rotations, que des causes quelconques tendraient à imprimer à un corps autour de différents axes passant par un même point, se composent exactement par la même loi que de simples forces appliquées en ce point. C'est ce que la théorie des *couples* rend manifeste en considérant plusieurs couples appliqués sur une *sphère homogène*. Car il est évident, par la régularité parfaite du corps, que chaque couple, s'il agissait seul, ferait tourner la sphère sur le diamètre perpendiculaire au plan de ce couple, et, par conséquent, sur l'axe du couple lui-même, et avec une vitesse angulaire proportionnelle à son *moment;* que, par conséquent, si tous les couples agissent à la fois, comme leur effet est le même que celui du couple résultant, la sphère doit tourner sur l'axe de ce couple avec une vitesse angulaire proportionnelle à son moment. D'où l'on voit que les mouvements de rotation se composent et se décomposent exactement par les mêmes lois que les couples, et partant que les simples forces.

4. Mais cette composition des mouvements de rotation, il faut ici la démontrer par la simple géométrie; puisque, dans ces premiers principes, on ne s'occupe que du mouvement des corps considéré en lui-même, c'est-à-dire abstraction faite des forces qui le produisent, et de la nature du corps qui le reçoit. Mais pour avoir ici des expressions aussi claires que dans la théorie des couples, nous représenterons de même les rotations par de simples lignes terminées Op, Oq, etc., prises sur leurs axes; et chacune de ces lignes, telle que Op, représentera à la fois l'*axe* et la *grandeur* de cette rotation p, et en indiquera encore le *sens* par cette convention qu'en se plaçant à l'extrémité p considérée comme le nord, pour regarder devant soi le point O considéré comme le midi, la rotation se fera de droite à gauche, comme se fait, à nos yeux, le mouvement du soleil. FIG. 1.

III.

Parallélogramme des rotations.

5. *Si, par deux causes quelconques, un corps tend à la fois à prendre deux rotations p et q, représentées par les deux côtés Op, Oq d'un parallélogramme $Op\theta q$, le corps prendra une rotation unique θ représentée par la diagonale $O\theta$ de ce parallélogramme.* FIG. 2.

En effet, considérez un point quelconque m du corps, pris dans le plan du parallélogramme, et, par exemple, vers la droite dans le supplément de l'angle que font entre eux les deux côtés; et nommons x et y les deux perpendiculaires abaissées de ce point m sur ces côtés. Il est clair que, par la seule rotation p, le point m tend à s'élever au-dessus du plan avec une vitesse px (n° **2**); et que, par la seule rotation q, il tend à s'élever avec une vitesse qy, et qu'ainsi, en vertu des deux causes agissant à la fois, il a, suivant la normale, la vitesse $px + qy$. Or, en nommant h la perpendiculaire abaissée du point m sur la diagonale θ, on a toujours l'équation

$$px + qy = \theta h,$$

comme on le sait par un théorème très-connu de géométrie. Donc la vitesse que prend le point m est égale à θh, c'est-à-dire à la vitesse qu'il aurait si le corps tournait sur la diagonale avec la vitesse angulaire θ. Et comme la même chose peut se dire de tout autre point du plan, et que le mouvement du plan entraîne celui du corps, on peut dire qu'un point quelconque du corps prend, par les deux rotations p et q, le même mouvement qu'il prendrait par la seule rotation θ. Donc, etc.

Remarque.

FIG. 3. C'est uniquement pour abréger la démonstration que j'ai pris le point m dans le supplément de l'angle que font entre eux les deux côtés du parallélogramme. Si ce point était pris entre les côtés mêmes, on trouverait que s'il s'élève au-dessus du plan avec la vitesse px, il s'abaisse au-dessous avec la vitesse qy : de sorte que sa vitesse suivant la normale serait la différence $px - qy$. Mais, par le même théorème de géométrie, on aurait alors

$$px - qy = \theta h;$$

c'est-à-dire que le point a toujours la même vitesse θh que si le corps tournait sur la diagonale.

6. Au reste, ceci nous donne l'idée d'un théorème de géométrie plus général que le précédent, et dont celui-ci n'est en quelque sorte qu'un cas particulier.

FIG. 4. Car, supposez le point m pris où l'on voudra dans l'espace, et nommez de même x, y et h les trois perpendiculaires abaissées de ce point sur les deux côtés p et q, et la diagonale θ du parallélogramme $pOq\theta$; vous aurez de même px, qy et θh pour les vitesses que les trois rotations p, q et θ tendraient à imprimer au point m. Mais ici ces vitesses, au lieu d'être dans la même direction, seraient respectivement perpendiculaires aux plans des trois triangles mOp, mOq, $mO\theta$: les lignes qui les représentent font donc entre elles les mêmes angles que les plans de ces triangles; et elles sont d'ailleurs proportionnelles à leurs aires respectives.

Or, puisque le point m, en vertu des deux rotations p et q, doit se mouvoir comme il le ferait en vertu de la simple rotation θ, il s'ensuit que la ligne θh doit être la diagonale du parallélogramme construit sur les deux autres px et qy.

On a donc ce théorème de géométrie :

Si, d'un point quelconque m de l'espace, comme sommet, on mène trois triangles qui aient pour bases les deux côtés Op, Oq *et la diagonale* Oθ *d'un parallélogramme, il y a toujours entre les aires de ces trois triangles la même relation qu'entre les côtés et la diagonale d'un parallélogramme construit sous les inclinaisons mutuelles de ces trois plans.*

Ainsi les deux premiers triangles se composent en quelque sorte pour former le troisième, comme se composeraient entre elles, pour former leur résultante, deux forces proportionnelles aux aires de ces triangles, et qui auraient entre elles la même inclinaison.

7. Et maintenant remarquez que ce théorème, tiré de considérations dynamiques, se voit sur-le-champ par la géométrie. Car, au lieu des trois triangles, considérez les trois parallélogrammes ou rhombes faits sur le même côté Om, appuyés sur les même bases Op, Oq, Oθ, et dont les aires sont mesurées par px, qy, θh. Il est évident que ces rhombes, qui forment les deux plans adjacents avec le plan diagonal d'un même rhomboïde, étant vus comme appuyés sur la commune base Om, sont entre eux comme leurs hauteurs, et, par conséquent, comme les trois lignes qui résulteraient de l'intersection du rhomboïde par un plan perpendiculaire à l'arête Om. Or ces lignes forment évidemment les deux côtés et la diagonale d'un parallélogramme construit sous les inclinaisons mutuelles des trois plans. Donc, etc.

Actuellement, si l'on imagine que le point m descende de l'espace, perpendiculairement au plan du parallélogramme, et pour tomber dans le supplément de l'angle pOq des deux côtés, ou de son opposé au sommet, il est visible que l'inclinaison mutuelle des deux triangles mOp, mOq va en diminuant, et devient enfin nulle; et alors le triangle $mO\theta$ construit sur la diagonale devient égal à la somme des deux autres, comme la diagonale d'un parallélogramme devient égale à la somme des deux côtés qui la comprennent, quand l'inclinaison de ces côtés devient nulle.

Si le point m descend de même pour tomber dans l'angle même

pOq, ou dans son opposé au sommet, il est visible que l'inclinaison mutuelle des deux triangles mOp, mOq va en augmentant et devient enfin égale à deux angles droits : et alors le triangle $mO\theta$ construit sur la diagonale devient égal à la *différence* des deux autres; comme la diagonale d'un parallélogramme devient égale à la *différence* des deux côtés quand leur inclinaison mutuelle devient égale à deux angles droits.

Ainsi ce théorème très-connu, que Lagrange attribue à Varignon, et qu'il regarde comme un beau théorème de géométrie, n'est qu'un cas particulier du nôtre : et comme celui-ci est très-facile à démontrer *directement*, on en peut tirer réciproquement une démonstration du *parallélogramme des rotations*, encore plus nette que la première, puisqu'on y prend où l'on veut le point m dont on examine le mouvement, sans avoir besoin de supposer que ce point est situé dans le plan des axes des deux rotations composantes.

COROLLAIRE.

8. De ce *parallélogramme* des rotations il est clair qu'on peut s'élever à la composition de tant de rotations qu'on voudra, Op, Oq, Or, etc., et parvenir ainsi à leur résultante générale $O\theta$ en les composant successivement deux à deux, à la manière des simples forces appliquées sur un point.

Et cette similitude de composition n'est pas bornée à des rotations sur différents axes qui se croisent en un même point; mais, ce qui est très-digne de remarque, elle s'étend à des rotations autour d'axes qui seraient situés d'une manière quelconque dans l'espace : théorie neuve qui mérite d'être développée.

IV.

Composition de deux rotations autour de deux axes parallèles.

9. *Deux rotations p et q, de même sens, autour de deux axes parallèles, se composent en une seule θ égale à leur somme $p+q$, autour d'un axe parallèle aux deux premiers et qui divise leur distance mutuelle dans la raison inverse des deux rotations composantes p et q.*

Soient, en effet, Ap et Bq les deux lignes parallèles qui, menées des points A et B d'un même côté de l'espace, représentent les deux rotations de même sens p et q dont il s'agit, et considérons un point quelconque m pris hors de ces axes parallèles, mais dans leur plan; vers la droite. Si l'on nomme x et y les deux perpendiculaires abaissées de ce point m sur les lignes Ap et Bq, il est clair que, par la rotation p, le point m tend à s'élever au-dessus du plan avec la vitesse px, et que, par la rotation q, il tend à s'élever avec la vitesse qy; et qu'ainsi, par les deux rotations à la fois, il a, suivant la normale, la vitesse $px+qy$. Or, qu'on mène entre Ap et Bq la parallèle $C\theta$, si l'on nomme h la perpendiculaire abaissée sur elle du point m, on aura $x-h$ pour sa distance à la parallèle Ap, et $h-y$ pour sa distance à la parallèle Aq. Si donc on suppose $C\theta$ menée telle que les deux distances soient en raison inverse de p à q, on aura FIG. 5.

$$x-h:h-y::q:p \quad \text{ou} \quad px+qy=(p+q)h.$$

Or $(p+q)h$ exprime la vitesse que prendrait le point m par une rotation unique $\theta=p+q$, autour de l'axe $C\theta$.

Donc, en vertu des deux rotations parallèles et de même sens p et q, le mouvement d'un point quelconque du plan, et, par conséquent, le mouvement du corps, est le même que si le corps tournait simplement avec une vitesse angulaire θ égale à $p+q$, sur un axe parallèle qui divise la distance mutuelle des deux premiers en raison inverse des deux rotations composantes p et q.

10. Si les deux rotations parallèles p et q étaient de *sens contraires*, on verrait de même qu'elles se composent en une seule θ égale à leur différence $p-q$, et autour d'un axe parallèle $C\theta$ dont on trouverait la position comme on trouverait celle de la résultante de deux forces parallèles et contraires p et q. Ainsi, en nommant i la distance de $C\theta$ au premier axe Ap, par exemple, et D la distance mutuelle de Ap et Aq, on aurait FIG. 6.

$$i=D\cdot\frac{q}{p-q}.$$

FIG. 7. **11.** Si p et q différaient très-peu l'une de l'autre, la rotation résultante $\theta = p - q$ serait très-petite; et la distance i de son axe au premier Ap serait très-grande; de sorte que si p et q deviennent parfaitement égales, on trouve une rotation θ *nulle*, autour d'un axe situé à une distance *infinie* : ce qui n'apprend plus rien, ou plutôt ce qui nous avertit que, dans ce cas singulier, il n'y a plus, à proprement parler, de rotation résultante, et que le mouvement du corps doit changer de nature. C'est, en effet, ce qui arrive; car on va voir que, de ces deux rotations parallèles, égales et contraires, il ne peut résulter pour le corps qu'un *pur mouvement de translation* dans l'espace.

V.

Des couples de rotations.

FIG. 8. **12.** Deux rotations p et $-p$, égales et de sens contraires, autour de deux axes parallèles, forment ensemble ce que j'appelle un *couple de rotations :* on peut voir à priori qu'un tel couple est irréductible, ou qu'il forme, pour ainsi dire, une rotation *sui generis*, qui ne peut jamais être ramenée à une rotation *simple* autour d'aucun axe quel qu'il soit.

Le mouvement qui résulte d'un couple de rotations p et $-p$ est une pure translation de tous les points du corps suivant des lignes perpendiculaires au plan de ce couple, et avec une commune vitesse mesurée par le moment *du couple, c'est-à-dire par le produit* pD *de l'une p des deux rotations, multipliée par la distance* D *qui sépare leurs axes parallèles.*

Et, en effet, considérez un point quelconque m du corps, pris dans le plan de ce couple, à la distance x du premier axe p, et, par conséquent, à la distance $x - \mathrm{D}$ du second $-p$. Par la rotation p, le point m s'élève suivant la perpendiculaire au plan avec la vitesse px; par la rotation $-p$, il s'abaisse en sens contraire avec la vitesse $p(x - \mathrm{D})$: de sorte qu'il a, suivant la normale, la vitesse $px - p(x - \mathrm{D}) = p\mathrm{D}$. Donc, comme x n'entre plus dans cette expression, tous les points du plan, et, par conséquent, tous ceux du corps ont la même vitesse pD suivant la perpendiculaire au plan du couple. Donc, etc.

13. On voit par là qu'un couple de rotations peut être tourné et transporté comme on voudra dans son plan, ou dans tout autre plan parallèle, sans que le mouvement du corps en soit changé; et de plus, que ce couple peut être transformé en un autre composé de nouvelles rotations p' et $-p'$, avec un nouveau bras D', pourvu que le moment p'D' soit égal au premier pD.

14. De cette propriété et du *parallélogramme* des rotations simples, on peut conclure sur-le-champ que des couples de *rotations*, situés comme on voudra dans des plans quelconques, peuvent toujours se composer en un seul par la même loi que les couples de forces, et, par conséquent, comme de simples forces agissant sur un point : qu'en un mot, on peut appliquer à ces nouveaux couples, et sans en rien excepter, tous les théorèmes qui concernent les couples ordinaires.

15. C'est, d'ailleurs, ce qu'on verrait sous un nouveau jour, si l'on voulait considérer la cause capable de donner au corps le même mouvement qui résulte d'un couple de rotations. Car, comme ce mouvement n'est qu'une pure translation dans l'espace, il est clair qu'on pourrait le produire par une simple force qu'on appliquerait au centre de gravité du corps, dans une direction perpendiculaire au plan du couple, et en prenant cette force égale au produit du moment de ce couple par la masse entière du corps dont il s'agit. Tous les couples de rotations pourraient donc être ainsi remplacés par autant de forces proportionnelles appliquées au centre de gravité du corps. D'où résulte, pour ces couples, une composition exactement la même que celle des forces autour d'un point. Mais dans cette théorie du mouvement considéré en lui-même, il faut tout tirer de la géométrie, sans rien emprunter à la Dynamique.

VI.

Composition générale des rotations autour d'axes situés comme on voudra dans l'espace.

16. Considérons d'abord une simple rotation p, autour d'un axe Ap passant par un point quelconque A du corps. Si, en un autre point O, pris où l'on voudra, on imagine deux rotations contraires p' et $-p'$, égales et parallèles à la première p, il est clair que ces deux rotations se détruisent d'elles-mêmes, et que le mouvement du corps n'est pas changé. Mais alors, au lieu de la simple rotation proposée p, on peut voir : 1° une rotation p' égale, parallèle et de même sens, mais dont l'axe passe en O; 2° un couple $(p, -p')$ formé des deux rotations parallèles restantes p et $-p'$. Si, pour plus de clarté, on transporte ce couple ailleurs dans un plan quelconque parallèle au sien, ce qui est permis, il ne restera, au point O, que la rotation p', laquelle n'est, pour ainsi dire, que la rotation proposée p qu'on y aurait transportée parallèlement à elle-même.

On peut donc dire qu'une rotation peut être transportée parallèlement à elle-même en un point quelconque de l'espace, pourvu que l'on considère le couple de rotations qui naît de ce déplacement, et qui a pour *moment* ou pour mesure le produit de la rotation proposée par le chemin que son axe a parcouru.

17. Cela posé, soient tant de rotations qu'on voudra p, q, r, etc., autour d'axes Ap, Bq, Cr, etc., situés d'une manière quelconque dans l'espace; si on les transporte toutes parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque O de l'espace, elles viendront s'y composer en une seule θ, qu'on peut nommer la *rotation résultante;* et tous les couples de rotations qu'elles ont produits dans leur translation se composeront en un seul $(\rho, -\rho)$ qu'on peut nommer le couple *résultant.* Réduction générale exactement la même que celle des forces, et d'où l'on peut tirer une théorie toute semblable.

Ainsi, comme tant de forces que l'on voudra sont toujours réductibles à une seule force passant par un point quelconque donné, et à un seul couple de deux forces égales, parallèles et contraires; de même tant de rotations qu'on voudra, autour de différents axes situés d'une manière quelconque dans l'espace, sont toujours réductibles à une seule rotation autour d'un axe passant par un point pris à volonté, et à un seul couple de deux rotations égales et contraires, autour de deux axes parallèles entre eux.

Et il est évident, comme dans la théorie des forces, que la rotation

résultante θ sera toujours la même en quelque lieu qu'on ait pris ce point ou ce *centre* O, où l'on transporte les rotations : si l'on fait varier la position de ce point, la résultante θ ne fera que se transporter parallèlement à elle-même en divers lieux de l'espace; mais le plan et la grandeur du couple de rotations $(\rho, -\rho)$ changeront nécessairement.

18. Si l'on veut une réduction générale où il n'y ait rien d'arbitraire, on pourra toujours choisir le point O de manière que le plan du couple résultant soit perpendiculaire à l'axe de la rotation résultante. En effet, tout étant d'abord réduit à la rotation θ et au couple de rotations $(\rho, -\rho)$ relativement à un point quelconque O de l'espace, décomposez le couple $(\rho, -\rho)$ en deux : l'un $(\rho', -\rho')$, dans un plan perpendiculaire à l'axe $O\theta$; l'autre $(\rho'', -\rho'')$, dans un plan conduit par cet axe Si vous transportez la rotation θ dans ce plan et parallèlement à elle-même jusqu'en $O'\theta$, de manière que le couple produit $(\theta, -\theta)$ soit égal et contraire au couple $(\rho'', -\rho'')$, et par conséquent le détruise, il ne restera que la rotation θ autour du nouvel axe $O'\theta$, avec le couple $(\rho', -\rho')$ dans un plan perpendiculaire au même axe, ce qu'il fallait trouver; et cet axe singulier $O'\theta$, qui se détermine exactement comme celui que j'ai nommé en Statique l'*axe central* des moments ou des couples de forces, peut aussi être nommé l'*axe central* des couples de rotations.

Ainsi *un système quelconque de rotations est toujours réductible à une seule rotation autour d'un certain axe déterminé, et à un couple de rotations situé dans un plan perpendiculaire à cet axe.* Et il est clair que ce couple résultant est le *minimum* de tous ceux qu'on trouverait relativement à tous les points ou centres O qui seraient pris hors de cet axe central. Car si l'on transportait partout ailleurs la rotation θ, elle produirait un couple $(\theta, -\theta)$ perpendiculaire sur le couple $(\rho', -\rho')$; et ces deux couples étant rectangulaires entre eux, donneraient par leur composition un couple résultant supérieur au couple $(\rho', -\rho')$.

19. Comme un couple de rotations équivaut à une pure translation du corps suivant la perpendiculaire au plan de ce couple, il s'ensuit que *tout le mouvement d'un corps, en vertu de tant de rotations* *qu'on voudra, se réduit, en dernière analyse, à tourner sur une certaine droite et à glisser en même temps le long de cette droite :* ce qui est, comme on le verra plus loin, le mouvement le plus général que puisse avoir un corps dans l'espace absolu.

20. Si le couple résultant *minimum* est nul, tout le mouvement se réduit à une simple rotation : si la résultante est nulle, il se réduit à une simple translation; et réciproquement, chacune de ces réductions ne peut avoir lieu sans que la condition supposée ne soit remplie. Enfin, pour que toutes les rotations du système se détruisent entre elles, et qu'ainsi tout le mouvement du corps se réduise à zéro, il faut que la résultante et le couple résultant soient nuls tous les deux à la fois, et cela, en quelque lieu de l'espace qu'on ait transporté toutes les rotations.

Remarque.

On voit la parfaite symétrie de cette composition des rotations et de celle des forces : elles sont presque identiques; car si l'on avait primitivement donné le nom de *force* à la cause capable de faire tourner sur un axe, on aurait eu pour ces nouvelles forces une Statique toute semblable. Seulement, dans celle-ci, les simples forces (toujours considérées comme transportées au centre de gravité du corps) auraient répondu à nos couples dans la Statique ordinaire, et les couples auraient répondu à nos simples forces. Mais il était, je crois, plus naturel, je veux dire plus conforme à la nature de l'esprit humain, de commencer, comme on l'a fait, par donner le nom de *force* à la cause capable d'une pure *translation,* et de voir ensuite dans le *couple* la cause capable d'un pur mouvement de *rotation.*

Toutefois, c'est une chose très-remarquable, qu'un même livre, écrit sur la science des forces, pourrait, sans cesser d'être exact et de traiter régulièrement la même science, être entendu de deux manières différentes, selon qu'on attacherait au mot de *force* l'idée d'une cause de translation, ou l'idée toute différente d'une cause de rotation. Nous pourrons revenir ailleurs sur ce point de philosophie.

21. On vient de voir tout ce qui regarde l'idée de la rotation simple sur un axe, et la composition de semblables rotations autour d'axes situés d'une manière quelconque dans l'espace. Mais il faut se faire maintenant une idée du mouvement d'un corps mobile autour d'un point fixe sur lequel il semble pirouetter en tous sens.

VII.

Idée de la rotation autour d'un point.

22. Le mouvement d'un corps qui tourne sur un axe immobile étant le seul dont nous ayons une idée claire, c'est donc à cette idée qu'il faut tâcher de réduire celle du mouvement d'un corps qui pirouette d'une manière quelconque autour d'un point ou centre fixe O.

Or je dis que ce mouvement, quel qu'il soit, si l'on ne le regarde que durant un instant, n'est autre chose qu'une rotation simple autour d'un certain axe passant par le point O et dont la direction reste immobile pendant cet instant. En effet, considérons deux points quelconques A et B du corps, lesquels avec le centre O forment le triangle OAB. De quelque manière que le corps se meuve, il est certain qu'au bout d'un instant on trouvera que le point A est arrivé quelque autre part en A′, et le point B en B′, de manière que le triangle OAB aura pris dans l'espace la position infiniment voisine OA′B′. Or il est clair que ce mouvement pourrait être produit par deux rotations successives : l'une p autour de la commune intersection OS des deux plans de ces triangles, et qui amènerait le triangle OAB dans un même plan avec son égal OA′B′; l'autre q, autour de la perpendiculaire OH à ce plan, et qui amènerait le point A sur A′ et, par conséquent, B sur B′. Mais ces deux rotations p et q autour de deux axes qui se croisent au point O, peuvent toujours se réduire à une seule θ autour d'un axe OI passant par le même point. Donc, *de quelque manière qu'un corps se meuve autour d'un point fixe, son mouvement ne peut être, dans l'instant que l'on considère, qu'une simple rotation de ce corps autour d'un axe passant par ce point, et qui reste immobile dans le corps et dans l'espace pendant cet instant.*

D'où l'on peut conclure que, dans l'instant suivant, c'est de même une rotation simple, mais autour d'un autre axe; et ainsi de suite d'un instant à l'autre : de sorte que le mouvement du corps peut être considéré comme une suite de ces mouvements simples dont chacun ne présente à l'esprit qu'une idée nette. C'est ainsi que, pour se faire l'idée du mouvement d'un point en ligne courbe, on se représente ce point comme décrivant les côtés successifs d'un polygone infinitésimal qu'on imagine inscrit à cette courbe. On a donc ce théorème :

23. *Le mouvement d'un corps qui tourne d'une manière quelconque sur un point fixe, n'est autre chose qu'une rotation de ce corps sur un axe qui passe toujours par le point fixe, mais dont la direction change d'un instant à l'autre, et que, pour cette raison, l'on appelle l'*AXE INSTANTANÉ. Et il en est précisément de cet *axe instantané* dans la rotation d'un corps, comme de la *tangente* à une courbe dans le mouvement du point qui la décrit.

24. Il faut bien remarquer que cet axe instantané change de position et dans le corps et dans l'espace tout à la fois : car, comme il est à la fois immobile dans le corps et dans l'espace pendant la durée d'un instant, et qu'au bout de cet instant, on le suppose dans une autre position, il est clair qu'il ne peut plus être au même lieu ni dans l'espace absolu, ni dans l'intérieur du corps : et l'on peut même ajouter que l'angle qu'il décrit dans l'espace, et qui fait son mouvement absolu, est le même qu'il décrit dans l'intérieur du corps, et qui fait son mouvement relatif.

Lors donc que nous voyons un corps tourner sur un axe invariable de position dans le corps, mais variable de position dans l'espace, nous devons conclure que cet axe n'est point l'axe instantané autour duquel se fait réellement la rotation : car l'axe instantané ne pourrait rester immobile dans le corps sans rester aussi immobile dans l'espace.

VIII.

Image sensible de cette rotation.

Quoique l'analyse précédente soit exacte, et que je me sois efforcé de la rendre claire, il faut convenir que l'idée du mouvement d'un corps tournant sur un axe qui varie sans cesse est encore un peu obscure ; je veux dire qu'on ne voit pas bien ce qui arrive au corps, et qu'on a de la peine à le suivre dans le cours de cette espèce de

rotation changeante. Il faut donc tâcher d'éclaircir encore cette idée, et de présenter à l'esprit quelque image plus nette et plus sensible.

25. Or on vient de démontrer qu'un mouvement quelconque d'un corps autour d'un point fixe ne peut être qu'une rotation de ce corps sur un certain axe qui change de position d'un instant à l'autre. Donc, puisque cet axe *instantané* passe toujours par le point fixe, il est évident qu'il ne peut décrire dans l'espace qu'une certaine surface conique dont le sommet est en ce point ; et de même, il est évident qu'il ne peut décrire dans l'intérieur du corps qu'une autre surface conique de même sommet.

Soit donc O ce commun sommet, et OI l'axe instantané dans la position actuelle que l'on considère ; et concevons du centre O et d'un rayon quelconque OI une sphère décrite qui coupe les deux surfaces coniques suivant deux courbes qui seront comme les bases de ces deux surfaces. De ces deux courbes, la première σ est fixe dans l'espace absolu, et la seconde s est fixe dans le corps, et, par conséquent, mobile avec lui dans l'espace. FIG. 9.

Divisons le temps t en particules égales infiniment petites dt que nous nommerons des instants ; et soient marqués, sur la courbe fixe σ, les points successifs α, β, γ, δ, etc., où vient passer d'un instant à l'autre le pôle I de l'axe de rotation. Joignons Iα, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, etc., par des arcs de grands cercles, et considérons la courbe comme un polygone sphérique d'une infinité de côtés Iα, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, etc.

Si l'on divise maintenant l'autre courbe s, qui sert de base au cône mobile, en arcs de grands cercles Ia, ab, bc, etc., respectivement égaux aux premiers, il est clair qu'au premier instant dt, le corps qui tourne sur OI amène le point a du corps sur le point α de l'espace ; que dans l'instant suivant, le corps qui tourne sur Oα amène le point b du corps sur le point β de l'espace ; et ainsi de suite d'un instant à l'autre : de sorte que la courbe s, qui sert de base au cône mobile, vient appliquer l'un après l'autre tous ses divers éléments sur les éléments respectivement égaux de l'autre courbe σ, qui sert de base à la surface du cône fixe. D'où je conclus que le mouvement du corps pourrait être produit par le cône mobile qui *roulerait, sans glisser*, sur le cône fixe dont il s'agit.

26. Nous avons donc ce nouveau théorème :

De quelque manière qu'un corps se meuve en tournant autour d'un point fixe, ce mouvement ne peut être autre chose que celui d'un certain cône, dont le sommet est en ce point, et qui roule actuellement, sans glisser, sur la surface d'un autre cône fixe de même sommet.

Je veux dire que le cône mobile, considéré comme attaché au corps et l'entraînant avec soi, s'il vient à rouler sur l'autre cône qui est fixe dans l'espace absolu, fera décrire à ce corps le mouvement précis dont on le suppose animé; que la ligne de contact de ces deux cônes sera, à chaque instant, l'axe autour duquel le corps tourne dans cet instant, ou ce qu'on appelle l'*axe instantané* : d'où l'on voit comment cet axe est à la fois mobile dans le corps et dans l'espace absolu; décrivant dans l'espace la surface du cône fixe, et dans l'intérieur du corps, la surface du cône mobile dont on vient de parler.

27. Tel est, je crois, le plus haut point de clarté où l'on puisse porter l'idée si complexe et si obscure du mouvement d'un corps qui tourne d'une manière quelconque autour d'un centre fixe. Il n'y a point de mouvement de cette nature qu'on ne puisse exactement produire en faisant rouler un certain cône sur un autre cône fixe de même sommet; de sorte que, si l'on imagine tous les cônes possibles qu'on ferait ainsi rouler, l'un sur l'autre, on a l'image fidèle de tous les mouvements possibles dont un corps soit capable autour d'un point sur lequel il a la liberté de pirouetter en tous sens.

Et même, s'il s'agissait d'un mouvement de rotation qui fût discontinu, c'est-à-dire où l'axe de rotation, au lieu de changer de position par degrés insensibles, sauterait brusquement d'une position à l'autre par un angle fini, on pourrait également imiter le mouvement du corps, en prenant, au lieu de deux cônes, deux pyramides de même sommet, et de faces respectivement égales, et faisant rouler l'une sur l'autre, de manière que la pyramide mobile tournant sur la commune arête, vînt appliquer, l'une après l'autre, toutes ses différentes faces sur les faces respectivement égales de la pyramide fixe. C'est, en effet, ce qui résulte de la démonstration même que j'ai donnée plus haut.

Remarque I.

28. Au reste, il est bon de remarquer, dans cette démonstration, que si j'ai pris, sur l'axe instantané OI, une ligne OI de *longueur constante*, c'était uniquement pour mieux fixer les idées, en montrant les deux courbes décrites par le pôle instantané comme étant tracées sur une même sphère. Mais il est évident que la démonstration se ferait de la même manière en prenant sur l'axe instantané une ligne OI de longueur *variable*, suivant une loi quelconque, et considérant les deux courbes décrites par son extrémité I, l'une dans l'intérieur du corps, l'autre dans l'espace absolu. On aurait toujours les deux mêmes surfaces coniques, mais terminées ici par ces deux nouvelles courbes qui leur serviraient de bases; et l'on verrait de même que la courbe mobile vient appliquer, l'un après l'autre, tous ses éléments successifs sur les éléments respectivement égaux de la courbe fixe : d'où l'on tirerait exactement le même théorème.

Remarque II.

29. Il n'est peut-être pas inutile de faire aussi une remarque sur l'idée nette qu'il faut attacher aux mots quand on dit le *mouvement* de l'axe instantané, ou qu'on emploie quelque autre terme qui suppose la *mobilité* de cet axe, soit dans le corps, soit dans l'espace. Ce n'est ici qu'une manière de s'exprimer. L'axe instantané ne se *meut* point : car il est immobile de sa nature pendant un instant, et au bout de cet instant, c'est une *autre ligne* qui devient à son tour l'axe de la rotation. Mais en se figurant l'ensemble de toutes ces lignes, menées d'avance, les unes dans le corps et les autres dans l'espace, et leur donnant le commun nom d'axe *instantané*, on peut dire naturellement la surface *décrite* par cet axe, au lieu de dire la surface formée par la suite de toutes ces lignes dont chacune doit devenir à son tour l'axe de rotation. Et de même, au lieu de l'angle $d\varphi$ compris entre deux génératrices consécutives de cette surface, on peut dire l'angle *décrit* en un instant dt par l'axe instantané, et nommer ainsi le rapport $\frac{d\varphi}{dt}$ la *vitesse angulaire* avec laquelle cet axe trace à la fois les deux surfaces coniques dont il s'agit. C'est dans le même sens qu'on nomme le rapport $\frac{ds}{dt}$, ou le rapport $\frac{d\sigma}{dt}$ qui lui est égal, la *vitesse* avec laquelle le pôle instantané I se meut le long des deux courbes s et σ, l'une dans le corps et l'autre dans l'espace, quoique le point du corps qui fait en ce moment le pôle instantané n'ait de sa nature aucune vitesse. Car ce point du corps, tant qu'il fait le pôle, est immobile; et sitôt qu'il se meut, il n'est plus le pôle de la rotation.

IX.

Des différentes choses que l'on peut naturellement considérer dans l'étude du mouvement d'un corps autour d'un point, et de la dépendance mutuelle de ces choses.

30. Si les deux courbes s et σ, qui servent de bases aux deux surfaces coniques, sont données, avec la vitesse angulaire θ de rotation autour de l'axe instantané OI, il est évident que le mouvement du corps sera entièrement déterminé.

Si, la vitesse angulaire θ étant toujours connue, une seule de ces deux courbes est donnée avec la vitesse du pôle qui la décrit, l'autre courbe sera nécessairement donnée.

Supposons, par exemple, que la courbe fixe σ soit donnée avec la vitesse $\frac{d\sigma}{dt}$ du pôle instantané I le long de cette courbe. Comme le corps tourne sur OI avec une vitesse angulaire θ aussi donnée, il est clair que le point du corps qui, au bout de l'instant dt, doit venir tomber sur la courbe fixe σ pour y être à son tour le pôle instantané, est un point déjà déterminé dans le corps; et il en est de même des autres points du corps que les rotations successives doivent amener l'un après l'autre, comme pôles, sur la courbe fixe et donnée σ : d'où l'on voit que l'autre courbe s, qui marque la route du pôle dans l'intérieur du corps, est entièrement déterminée.

Et réciproquement, si, au lieu de la courbe fixe σ, on se donne la courbe mobile s, avec le vitesse $\frac{ds}{dt}$ et la rotation θ, on verra de même que la courbe fixe σ se trouvera entièrement déterminée dans l'espace.

31. En général, dans l'étude du mouvement d'un corps autour d'un point fixe, il se présente naturellement plusieurs quantités simples à considérer, telles que la vitesse angulaire θ de rotation autour de l'axe instantané OI; la vitesse angulaire ω avec laquelle cet axe trace les deux surfaces coniques S et Σ qu'il décrit en même temps, l'une dans l'intérieur du corps, l'autre dans l'espace absolu; les rayons de courbure r et ρ de ces deux surfaces; les mouvements angulaires p et π du pôle, l'un autour de l'axe OP du cône osculateur de la surface mobile S, et l'autre autour de l'axe OΠ du cône osculateur de la surface fixe Σ; etc. Et si, de ces différentes choses, trois quelconques sont connues, on peut dire que les autres le sont aussi, et que le mouvement du corps est entièrement déterminé.

On peut se faire une idée nette de ces relations mutuelles, en prenant sur l'axe instantané une longueur constante OI $= 1$, et considérant les deux courbes s et σ, décrites par le pôle I, comme deux polygones sphériques d'une infinité de côtés.

Car, pendant l'instant dt, où le pôle reste immobile en I, le côté ds du polygone sphérique mobile s décrit, pour venir se coucher sur le côté égal $d\sigma$ du polygone fixe σ, un angle formé par la somme de l'angle extérieur de du polygone mobile et de l'angle extérieur $d\varepsilon$ du polygone fixe, ou par la différence de ces deux angles, si les deux courbes s et σ ont leurs convexités tournées dans le même sens. La vitesse angulaire θ, autour de l'axe instantané OI, est donc exprimée par la *somme* ou par la *différence* de ces deux angles, divisée par l'élément dt du temps; de sorte qu'on a FIG. 10. FIG. 11.

$$\theta = \frac{de \pm d\varepsilon}{dt}$$

(le signe $\pm$, selon que les deux courbes s et σ ont, au point de contact I, leurs convexités opposées l'une à l'autre, ou tournées dans le même sens).

Or l'angle extérieur de du polygone sphérique s n'est autre chose que l'angle extérieur dièdre, formé par le prolongement d'une face avec la face suivante, dans la pyramide centrale dont ce polygone sphérique est la base; et cet angle dièdre étant égal à celui que font entre elles les deux perpendiculaires élevées sur les faces voisines, a pour mesure $\frac{ds}{r}$, si l'on nomme r le rayon de courbure de la surface conique au point I que l'on considère. On a donc

$$de = \frac{ds}{r};$$

et l'on a de même

$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{\rho},$$

en nommant ρ le rayon de courbure de l'autre surface au même point I : d'où résulte, en substituant ces valeurs dans l'équation précédente,

$$\theta = \frac{ds}{r\,dt} \pm \frac{d\sigma}{\rho\,dt}.$$

Mais $\frac{ds}{dt}\left(\text{ou } \frac{d\sigma}{dt} \text{ qui lui est toujours égal}\right)$, marque la vitesse angulaire avec laquelle l'axe instantané OI trace à la fois les deux surfaces coniques; en faisant donc

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} = \omega,$$

on a

$$\theta = \omega\left(\frac{1}{r} \pm \frac{1}{\rho}\right);$$

ce qui donne une relation très-simple entre la rotation θ, le mouvement angulaire ω de l'axe instantané, et les rayons de courbure r et ρ des deux surfaces coniques qu'il décrit.

FIG. 12. **32.** Si l'on suppose menés ces deux rayons de courbure $\mathrm{IP} = r$, $\mathrm{I\Pi} = \rho$, et qu'on joigne OP et OΠ, on aura les axes des deux cônes droits et circulaires osculateurs des deux surfaces; et les deux perpendiculaires abaissées du pôle I sur ces deux axes OP et OΠ, seront les rayons a et α des cercles qui servent de bases à ces cônes osculateurs.

Or on a, par la figure,

$$r^2 = \frac{a^2}{1 - a^2}, \quad \rho^2 = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2}.$$

Ainsi l'on peut introduire dans l'équation précédente, au lieu des rayons de courbure r et ρ des deux cônes, les rayons a et α des deux cercles

qui leur servent de bases; et l'équation devient

$$\theta = \frac{\omega}{a}\sqrt{1 - a^2} \pm \frac{\omega}{\alpha}\sqrt{1 - \alpha^2}.$$

Mais ω étant la vitesse angulaire de l'axe instantané sur la surface du cône, il est clair que $\frac{\omega}{a}$ est la vitesse angulaire de la projection de cet axe OI sur la base, et, par conséquent, c'est le mouvement angulaire du pôle I autour de l'axe OP de ce cône; et, de même, $\frac{\omega}{\alpha}$ est son mouvement angulaire autour de l'axe OΠ de l'autre cône. Si donc on désigne ces deux mouvements angulaires par p et π, ou qu'on fasse $\frac{\omega}{a} = p$, $\frac{\omega}{\alpha} = \pi$, on en tire d'abord la proportion

$$p : \pi :: \alpha : a,$$

et ensuite, d'après l'équation précédente,

$$\theta = p\sqrt{1 - a^2} \pm \pi\sqrt{1 - \alpha^2}.$$

D'où l'on voit que les mouvements angulaires du pôle, autour des axes des cônes osculateurs, ne sont autre chose que la rotation θ décomposée en deux p et π autour des mêmes axes : car, OI étant égal à 1, il est clair qu'en nommant x et ξ les inclinaisons de OI sur les axes OP et OΠ, on a

$$a = \sin x \quad \text{et} \quad \alpha = \sin \xi;$$

de sorte que les deux relations précédentes équivalent à cette suite de rapports égaux :

$$p : \pi : \theta :: \sin\xi : \sin x : \sin(x + \xi);$$

ce qui montre que p et π sont les deux côtés d'un parallélogramme dont θ est la diagonale.

33. On voit donc comment ces diverses quantités sont liées entre elles, et peuvent se trouver quand on en connaît trois en fonction du temps.

Si ces trois quantités données sont *constantes*, toutes les autres le sont aussi; et le mouvement du corps est celui d'un cône droit à base circulaire qui roule uniformément sur un cône fixe également droit et circulaire.

Ainsi, la terre tourne en un jour sur son axe OI, tandis que cet axe décrit, *en sens contraire,* un cône droit autour de l'axe OΠ de l'écliptique, sous un angle ξ de $26^\circ 8'$, et avec une vitesse angulaire π mesurée par le mouvement *rétrograde* des équinoxes, et qui est d'environ 42 tierces centésimales par jour. On connaît donc la rotation θ autour de l'axe instantané, le cône fixe Σ que cet axe décrit dans l'espace, et la vitesse angulaire π qu'il a dans ce mouvement. On peut donc déterminer dans la terre le cône S qui, roulant sur le premier Σ, et en dedans de sa surface, ferait décrire à la terre le mouvement précis qu'on y observe. Car, en prenant le jour pour unité de temps, on aura

$$\theta = 2\pi = 400^\circ, \quad \pi = 42''' \quad \text{et} \quad \sin\xi = \sin 26^\circ 8',$$

et les équations précédentes donnent

$$\operatorname{tang} x = \frac{\pi \sin\xi}{\theta + \pi\cos\xi} = \frac{42''' \sin 26^\circ 8'}{400^\circ + 42''' \cos 26^\circ 8'};$$

d'où l'on conclut le rayon $\sin x$ du petit cercle qui sert de base à ce cône mobile S : ce qui donne à peu près $1^{\mathrm{m}},684$ de longueur à la petite circonférence que le pôle instantané de rotation de la terre décrit chaque jour à sa surface (tout ceci, d'ailleurs, dans l'hypothèse d'une rotation et d'une précession diurnes parfaitement uniformes).

X.

Idée du mouvement le plus général que puisse avoir un corps dans l'espace absolu.

FIG. 13. **34.** Considérez un point quelconque O du corps, et la vitesse actuelle u qu'il a dans l'espace; il est clair que tout le mouvement du corps, quel qu'il soit, peut être vu, dans cet instant, comme composé : 1° d'une simple translation qui emporterait toutes les molécules avec la même vitesse u suivant des lignes parallèles à la direction de cette vitesse; et 2° d'une simple rotation θ autour d'un certain axe OI passant par le point O que l'on considère. Car, en vertu du premier

de ces deux mouvements, le point O sera porté dans l'espace au lieu même où il doit être au bout d'un instant; et par le second autour d'un axe OI bien choisi, le corps pourra venir dans la position quelconque qu'on lui suppose au bout du même instant.

Or, s'il arrivait que la direction OU de la translation u fût perpendiculaire à l'axe OI de la rotation θ, tout le mouvement pourrait se réduire à une simple rotation θ autour d'un certain axe O'S parallèle à OI. Car menez suivant OI le plan perpendiculaire à OU, et supposez que dans ce plan, et du côté de l'axe où la vitesse de rotation des molécules est de sens contraire à leur vitesse de translation, on prenne un point O' à la distance $x = \frac{u}{\theta}$ de cet axe OI; il est évident que ce point O' aura dans l'espace une vitesse nulle $x\theta - u$, et qu'il en sera de même pour tous les points du corps situés sur la ligne O'S parallèle à OI. Donc, dans le cas particulier de OU perpendiculaire à l'axe instantané OI, le double mouvement du corps se réduit à une simple rotation autour d'un certain axe déterminé O'S, et qu'on nomme l'*axe spontané* de rotation. FIG. 14.

Actuellement, si OU n'est pas perpendiculaire à OI (ce qui est le cas le plus général), imaginez qu'on décompose la vitesse u de translation en deux, l'une v perpendiculaire à OI, et l'autre v' parallèle au même axe. La première v, combinée avec la rotation θ, donnera lieu à une rotation spontanée autour d'un certain axe parallèle à OI, comme on vient de le voir tout à l'heure; et la seconde v' transportera tous les points du corps dans une direction parallèle à cet axe spontané. Donc, dans le cas le plus général, *tout le mouvement d'un corps se réduit à tourner sur un certain axe et à glisser en même temps le long de cet axe : de sorte que ce mouvement est exactement le même que celui d'une vis qui tourne dans son écrou.* Tous les points du corps décrivent donc, sur des cylindres concentriques, de petits arcs *d'hélices* qui ont toutes le même pas. Dans l'instant suivant, c'est une autre *vis,* d'un autre axe et d'un pas différent; et ainsi de suite d'un instant à l'autre : d'où l'on voit comment se forment les courbes simultanées que décrivent tous les points du corps, et le long desquelles ils se meuvent comme en autant de canaux curvilignes où ils seraient enfermés. FIG. 15.

35. On conçoit parfaitement le mouvement de translation, par lequel tous les points d'un corps sont portés suivant des lignes égales et parallèles dans l'espace; on conçoit avec autant de clarté le mouvement de rotation autour d'un axe qui demeure immobile : mais on ne voit pas si bien le mouvement unique et réel qui vient de la combinaison de ces deux-là pour chaque point du corps; et c'est la coexistence de ces deux mouvements en un seul, que j'ai voulu montrer dans le mouvement si connu d'une vis qui tourne actuellement dans son écrou.

Quelquefois le pas de cette vis est nul, et tout se réduit à une simple rotation sur un certain axe qui prend le nom d'*axe spontané de rotation*. Mais, en général, le pas de la vis n'est pas nul, et il n'y a point d'axe spontané proprement dit; c'est-à-dire que, dans le corps, il n'y a aucune ligne dont tous les points demeurent immobiles pendant un instant : mais il y a toujours ce qu'on pourrait nommer un axe *spontané glissant;* c'est-à-dire qu'il y a toujours dans le corps une ligne droite dont tous les points n'ont d'autre mouvement qu'une simple translation le long de cette droite.

36. Telle est donc la nature du mouvement des corps solides et l'idée nette qu'on peut s'en faire à chaque instant. Si un corps pirouette d'une manière quelconque sur un point fixe, c'est un certain cône mobile qui roule en cet instant sur un autre cône fixe de même sommet : et toutes les variétés de ce genre de mouvement sont données par les variétés de surfaces coniques que l'on peut considérer, et parmi lesquelles il faut comprendre le plan qui est la plus simple de toutes, le cylindre qui est un cône dont le sommet est à l'infini, et même la ligne droite qui est aussi un cas particulier des surfaces coniques. Enfin, si un corps se meut d'une manière quelconque dans l'espace, on peut le voir à chaque instant comme une certaine vis qui tourne actuellement dans son écrou. Et comme c'est aussi à ce mouvement que peuvent se réduire des rotations quelconques (nº **19**), on peut conclure que, par de simples rotations sur différents axes, on peut donner à un corps le mouvement le plus général dont il soit susceptible.

CHAPITRE II.

DES FORCES CAPABLES D'UN MOUVEMENT DONNÉ.

37. Après avoir considéré le mouvement des corps en lui-même, il faut chercher les forces capables de le produire, afin de voir réciproquement quel est le mouvement que doit prendre un corps en vertu de forces quelconques données, ce qui est le problème naturel de la Dynamique.

Et d'abord je rappelle l'idée précise qu'il faut attacher au mot de *force* dans la théorie du mouvement. J'entends par *force* toute cause capable d'imprimer un mouvement uniforme et rectiligne à un corps libre, considéré comme un point *matériel,* c'est-à-dire comme un point où l'on conçoit qu'une certaine quantité de matière se trouve concentrée. La direction et le sens du mouvement de ce point font la *direction* et le *sens* de la force; et la *grandeur* de cette force a pour mesure le produit de la masse par la vitesse imprimée.

38. Cette définition de la force étant posée, je dis que, quel que soit le mouvement d'un corps dans l'espace, il y a toujours des forces qui, étant appliquées à ce corps supposé en repos, sont capables d'y produire le mouvement qu'on y observe. Et en effet, dans ce mouvement, chaque molécule dm du corps ayant dans l'espace une certaine vitesse u, il est évident que cette molécule pourrait être regardée comme en repos, mais animée tout à coup par une force udm qui produirait sa vitesse. Donc, si l'on considère l'infinité des forces semblables udm appliquées à toutes les molécules respectives du corps, on aura certainement des forces capables de produire sur le corps le mouvement donné. Donc, si l'on imagine que, par les lois statiques de la composition des forces, on ait réduit toutes ces forces élémentaires udm à d'autres P, Q, R, etc., on aura un autre système de forces également capables du mouvement donné.

39. Mais il y a une différence essentielle à remarquer entre le système des forces udm appliquées à tous les éléments du corps, et les forces P, Q, etc., auxquelles on les aurait réduites par la composition. Si le mouvement produit est le même dans les deux cas, l'état intérieur du corps ne sera pas le même au premier instant. Car il est évident que les forces élémentaires *udm*, étant individuellement appliquées, chacune à chacune des molécules de ce corps, sont capables d'y produire le mouvement donné, même en supposant que ces molécules ne soient pas liées entre elles au premier instant; et par conséquent, sans exciter d'abord, dans les liens qui les unissent, aucune compression, ou traction brusque qui tendrait à les rompre. Sous l'action de ces forces élémentaires *udm*, le mouvement du corps est donc comme *spontané;* c'est-à-dire que les liens du corps ne sont pas nécessaires au premier instant; et si, dans la suite du mouvement, ces liens se trouvent tendus, ce ne peut être que par les forces centrifuges qui naissent des mouvements curvilignes que les molécules sont obligées de suivre à cause de leur liaison mutuelle.

Mais si, au lieu de ces forces élémentaires *udm*, on applique au corps leurs réduites P, Q, etc., il faut nécessairement supposer que les molécules soient liées entre elles dès le premier instant, afin que ces forces P, Q, etc., puissent réellement se décomposer dans les forces élémentaires *udm*, seules capables du mouvement spontané du corps. Ainsi, sous l'action des forces P, Q, etc., les liens du corps sont nécessaires au premier instant; car ils commencent par ressentir une action brusque et finie à laquelle ils doivent d'abord résister : et tout se passe ensuite comme dans le premier cas, où les liens ne souffrent plus que les tensions qui naissent à chaque instant des forces centrifuges.

40. Cette distinction qu'on vient de faire, qui est nulle quant au mouvement produit sur le corps, est donc essentielle quant à l'état intérieur initial de ce corps : car il peut être affecté, au commencement, d'autant de manières différentes qu'on peut lui appliquer de différents systèmes de forces, également capables de lui imprimer le mouvement qui l'anime. Mais, si l'on ne considère que le mouvement du corps, sans s'occuper des secousses ou tractions brusques qu'il peut ressentir dans son intérieur, et qu'il doit détruire par sa solidité, il est permis de composer les forces élémentaires *udm*, et de les réduire ainsi à d'autres, comme, par exemple, à une seule force et à

un seul couple, dont l'ensemble sera également capable du mouvement donné : c'est ce qu'on va faire dans les articles suivants; après quoi on réduira de même les forces centrifuges qui naissent de la rotation.

I.

Des forces capables d'un pur mouvement de translation.

41. Si un corps n'a dans l'espace qu'un pur mouvement de translation, de sorte que toutes les molécules s'avancent dans le même sens, avec la même vitesse u, suivant des droites parallèles, il est clair que toutes les forces élémentaires *udm* dont ces molécules sont animées sont aussi parallèles, de même sens et proportionnelles aux masses respectives *dm* de ces molécules. Or on sait que de telles forces sont toujours réductibles à une seule R, parallèle et de même sens, égale à leur somme $\int udm$, et passant par le centre de gravité du corps.

Donc, réciproquement, *si une force quelconque* R *est appliquée au centre de gravité d'un corps solide, comme elle pourra toujours se décomposer en forces parallèles et de même sens, appliquées aux molécules de ce corps, et proportionnelles aux masses de ces molécules, l'effet de cette force* R *sera de transporter toutes les parties du corps, suivant sa propre direction, et avec une commune visesse* $u = \mathrm{R} : m$, *c'est-à-dire égale à la grandeur de cette force divisée par la masse entière m du corps dont il s'agit.* Ce qui était, pour ainsi dire, évident de soi-même.

42. Si cette force R, passant toujours par le centre du corps, changeait de direction et de grandeur à chaque instant par l'action de quelque force accélératrice étrangère passant par le même centre, le mouvement du corps n'en serait pas moins un pur mouvement de translation, je veux dire que le corps n'aurait aucune rotation sur lui-même. Tous les points de ce corps décriraient, il est vrai, des lignes courbes; mais tous les éléments simultanés de ces courbes décrites seraient égaux et parallèles entre eux : de sorte qu'en regardant un plan quelconque attaché au corps, et par conséquent mobile avec lui dans l'espace, on trouverait ce plan toujours parallèle à lui-même dans la suite du mouvement.

II.

Des forces capables d'une pure rotation sur un axe donné.

FIG. 16. **43.** Supposons qu'un corps tourne, dans l'instant que l'on considère, autour d'un axe quelconque donné OZ, avec une vitesse angulaire θ; il est clair que, dans ce mouvement, une molécule quelconque dm, prise à la distance r de cet axe OZ, a une vitesse θr, dirigée suivant la tangente du cercle que cette molécule tend à décrire. Ainsi la force qui l'anime a la même direction, et elle est exprimée par θrdm. Toutes les molécules du corps sont donc animées par des forces semblables θrdm, proportionnelles à leurs masses dm et à leurs distances r de l'axe de rotation, et suivant des directions qui sont à la fois perpendiculaires à ces distances et à la direction de l'axe donné : et il s'agit de voir comment on peut réduire toutes ces forces élémentaires à d'autres d'un effet équivalent, c'est-à-dire également capables de la rotation θ du corps autour de l'axe libre et donné OZ.

Réduction de ces forces.

44. Pour opérer cette réduction d'une manière facile et appropriée au calcul, soient menés, par un point quelconque O de cet axe, deux autres axes OX et OY perpendiculaires entre eux et à celui-là; et nommons x, y, z les coordonnées de la molécule dm relativement à ces axes.

Je conçois la force θrdm décomposée en trois autres X, Y, Z parallèles aux trois axes; ce qui donne évidemment pour la première $X = \theta ydm$, pour la seconde $Y = -\theta xdm$, et pour la troisième $Z = 0$.

Si l'on transporte ces forces parallèlement à elles-mêmes au point O, il en provient d'abord deux forces,

$$X = \theta ydm,$$
$$Y = -\theta xdm,$$

appliquées en O suivant les axes mêmes OX et OY; ensuite, trois couples L, M, N autour des trois axes respectifs des x, y, z, et dont les moments sont exprimés par $(Yz - Zy)$, $(Zx - Xz)$, $(Xy - Yx)$; ce qui donne, en mettant pour X, Y, Z leurs valeurs,

$$L = -\theta xzdm,$$
$$M = -\theta yzdm,$$
$$N = \theta(y^2 + x^2)dm = \theta r^2 dm.$$

Donc, si l'on fait pour chaque force θrdm la même transformation, et qu'on indique par le signe $\int$ la somme de tous les termes semblables à celui qu'on écrit sous ce signe, toutes les forces θrdm capables de la rotation donnée se trouveront réduites aux forces et aux couples suivants, savoir :

1°. Deux forces $X = \theta\int ydm$, $Y = -\theta\int xdm$, l'une suivant OX, l'autre suivant OY, forces qu'on peut réduire à une seule P, perpendiculaire à OZ, et dont la valeur sera

$$P = \theta\sqrt{(\int xdm)^2 + (\int ydm)^2},$$

ou, si l'on veut, en nommant D la perpendiculaire abaissée du centre de gravité du corps sur l'axe OZ, on aura, pour la valeur de cette force, l'expression plus simple

$$P = \theta mD;$$

2°. Deux couples $L = -\theta\int xzdm$, $M = -\theta\int yzdm$, autour des deux premiers axes OX et OY, couples qu'on peut réduire à un seul K, dont le plan passe par OZ, et dont le moment est

$$K = \theta\sqrt{(\int xzdm)^2 + (\int yzdm)^2};$$

3°. Et enfin on aura le couple N dont le moment est

$$N = \theta\int(x^2 + y^2)\,dm = \theta\int r^2 dm,$$

et qui agit dans un plan perpendiculaire à l'axe donné OZ.

Ainsi, en prenant les cinq intégrales

$$\int xdm, \quad \int ydm, \quad \int xzdm, \quad \int yzdm, \quad \int(x^2 + y^2)\,dm,$$

qu'il faut étendre à la masse entière m du corps, on déterminera complétement la force P, le couple K et le couple N dont l'ensemble P, K, N est capable de la rotation θ autour de l'axe donné OZ.

Corollaire I.

45. Si cet axe OZ passe par le centre de gravité du corps, on aura

$$\int xdm = 0, \quad \int ydm = 0, \quad \text{d'où} \quad P = 0;$$

et toutes les forces seront réduites aux deux couples K et N, ou si l'on veut, à leur résultant

$$G = \sqrt{K^2 + N^2}.$$

D'où je conclus que *les forces capables de faire tourner un corps sur un axe passant par le centre de gravité sont toujours réductibles à un couple.*

Sur quoi il est bon de remarquer que ce couple G n'est point perpendiculaire à l'axe de rotation, puisqu'il fait avec cet axe OZ un angle dont le cosinus $\frac{K}{\sqrt{K^2+N^2}}$ ne peut être nul à moins qu'on n'ait $K = 0$.

Corollaire II.

46. Mais s'il arrive que cet axe OZ soit un des axes principaux du corps, on aura, comme on le sait,

$$\int xzdm = 0, \quad \int yzdm = 0;$$

et alors le couple K sera nul, et toutes les forces seront réduites au seul couple $N = \theta \int r^2\, dm$, lequel est perpendiculaire à l'axe donné OZ.

D'où je conclus que *les forces capables de faire tourner un corps sur un de ses axes principaux sont toujours réductibles à un couple perpendiculaire à cet axe principal.*

Et réciproquement, un couple quelconque N perpendiculaire à l'un des axes principaux est toujours décomposable en forces élémentaires θrdm capables de faire tourner sur cet axe avec une vitesse angulaire $\theta = N : \int r^2\, dm$; car de telles forces θrdm se réduiraient à un

couple $\theta . \int r^2 dm$ de même grandeur et de même position que le couple donné N.

On a donc ce théorème simple et facile à retenir :

Si un couple est appliqué sur un corps libre dans un plan perpendiculaire à l'un de ses axes principaux, son effet sera de faire tourner le corps sur cet axe lui-même avec une vitesse angulaire égale au moment de ce couple, divisé par le moment d'inertie du corps autour de cet axe principal.

Corollaire III.

47. Par ce seul théorème particulier, on peut trouver sur-le-champ l'effet d'un couple G appliqué au corps dans tel plan qu'on voudra. Car en décomposant ce couple donné en trois autres L, M, N perpendiculaires aux trois axes principaux du corps, et nommant A, B, C les trois moments d'inertie qui se rapportent à ces axes, on aura

$$p = \frac{L}{A}, \quad q = \frac{M}{B}, \quad r = \frac{N}{C},$$

pour les trois rotations respectives p, q, r que ces couples tendent à produire autour des mêmes axes : de sorte que si l'on compose ces trois rotations en une seule θ, on aura l'axe et la grandeur de la rotation à laquelle le couple proposé G tend à donner naissance au premier instant; ce qui est, comme on voit, de la plus grande simplicité.

Corollaire général.

Des forces capables d'un mouvement quelconque; et, réciproquement, du mouvement que prend un corps en vertu de forces quelconques données.

48. D'après ce qu'on vient de dire, il est bien facile de trouver la force et le couple dont l'ensemble est capable d'un mouvement quelconque donné. Car, quel que soit ce mouvement, vous pouvez toujours le concevoir comme décomposé en deux : l'un, qui consiste dans une pure translation égale et parallèle au mouvement du centre de gravité du corps; et l'autre, dans une simple rotation autour d'un axe passant par le même centre. On n'aura donc qu'à prendre la force R capable du premier de ces deux mouvements, et le couple G capable du second, et le problème sera résolu.

49. Réciproquement, quelles que soient les forces appliquées à un corps, imaginez qu'on les transporte toutes parallèlement à elles-mêmes au point qui fait le centre de gravité de ce corps : elles viendront s'y composer en une seule R, et tous les couples qui proviennent de leurs translations se composeront en un seul G.

Or la résultante R, étant appliquée au centre de gravité du corps, tend à imprimer à toutes les molécules une commune vitesse $u = \frac{R}{m}$, et dans la direction même de cette force R.

Le couple G tend à imprimer au corps une rotation θ autour d'un certain axe OI, passant par le même centre, et qu'on déterminera comme on l'a dit ci-dessus.

Remarque.

FIG. 17. **50.** Chaque molécule dm est donc animée par deux forces, l'une $u\,dm$ parallèle à R, l'autre $\theta r\,dm$ perpendiculaire à la fois à l'axe OI et à sa distance r de cet axe. Donc cette molécule décrit, à chaque instant dt, la diagonale du parallélogramme construit sur les deux lignes infiniment petites $u\,dt$ et $\theta r\,dt$ qui représentent les espaces dus à ces forces.

Tels seront donc les mouvements de toutes les molécules du corps; et tous ces mouvements simultanés sont possibles, je veux dire qu'ils peuvent exister ensemble sans que la disposition mutuelle des molécules soit en rien altérée. Car tous les mouvements composants $u\,dt$, considérés à part, sont évidemment possibles; et il en est de même de tous les mouvements $\theta r\,dt$. Or il est clair que, par ces deux mouvements exécutés l'un après l'autre, on amènerait chaque molécule du corps au bout de la diagonale du parallélogramme construit sur les deux lignes $u\,dt$, $\theta r\,dt$, et par conséquent au lieu même où elle arriverait en suivant cette diagonale. Ainsi, tous les mouvements composés sont possibles ensemble, et ont effectivement lieu le long des diagonales respectives de ces parallélogrammes infiniment petits. Et si l'on veut se représenter dans l'espace toutes les petites diagonales que suivent à la fois toutes les molécules du corps, on a vu (n° **34**) que

ce sont de petits arcs d'*hélices* toutes décrites du même *pas* sur des cylindres concentriques autour d'un certain axe O'S, qui n'est point l'axe instantané OI, mais qui lui est toujours parallèle, et que j'ai nommé l'*axe spontané glissant.*

III.

Des forces centrifuges qui naissent de la rotation.

51. Nous avons considéré plus haut (n° **43**) les forces finies $\theta r\,dm$, dont toutes les molécules d'un corps sont animées quand ce corps tourne avec une vitesse angulaire θ autour d'un axe donné OZ.

Mais de cette rotation même il naît, à chaque instant, pour chaque molécule dm, une force infiniment petite, qui tend à éloigner cette molécule du centre de sa rotation, et qu'on nomme ainsi la force *centrifuge.*

52. Pour se faire une idée nette de cette force, il faut d'abord remarquer qu'une molécule *libre* dm, animée de la seule force $u\,dm$ suivant la tangente d'un cercle, ne peut en rigueur décrire un arc de ce cercle, quelque petit qu'on le suppose, à moins qu'elle ne soit à chaque instant attirée vers le centre par une certaine force qui la retienne sur la circonférence; sans quoi cette molécule s'en irait par la tangente avec la vitesse u qui lui est imprimée. Cette force, qu'on nomme *centripète,* est du même genre que la gravité, et elle se mesure de la même manière, c'est-à-dire par la vitesse f qu'elle ferait acquérir au mobile dans l'unité de temps, si elle agissait toujours également sur lui; je veux dire si, à chacun des instants égaux, elle ajoutait un égal degré de vitesse au mobile. Dans un mouvement de cette nature, la vitesse acquise est donc proportionnelle au temps, de sorte qu'on a $f.\,t$ pour l'expression de cette vitesse acquise au bout du temps t; et $\frac{1}{2}f.\,t^2$ pour l'espace dont le mobile serait descendu vers le centre au bout de ce même temps t.

Quant à la grandeur f de cette force centripète, elle dépend évidemment de la vitesse u suivant la tangente et du rayon r du cercle décrit; et il est bien facile de la déterminer. Car, sans l'accession de cette force accélératrice, le point matériel s'en irait en un instant sur la tangente par un espace udt, et se trouverait ainsi éloigné de la circonférence à une petite distance égale à la partie extérieure e de la sécante menée de ce point par le centre du cercle. Pour que le point matériel ne quitte pas la circonférence, il faut donc que l'espace $\frac{1}{2}f.dt^2$, dont la force f est capable de le faire descendre en un instant dt, soit précisément égal à cette partie extérieure e. Or, par la géométrie, la partie extérieure de la sécante est égale au carré de la tangente divisé par la sécante entière; de sorte qu'on a, pour déterminer f, l'équation

$$\frac{1}{2}f.\,dt^2 = \frac{u^2\,dt^2}{2r+e} \quad \text{ou} \quad f = \frac{2u^2}{2r+e};$$

d'où, en négligeant e, qui est un infiniment petit du second ordre par rapport aux lignes r, u et f, on tire

$$f = \frac{u^2}{r}.$$

Ainsi, *la force centripète nécessaire pour qu'un point libre puisse tourner en cercle avec une vitesse u suivant la tangente, est exprimée par le carré de cette vitesse, divisé par le rayon r du cercle qu'il décrit*. Et il est évident que la même expression convient à un mouvement curviligne quelconque, en prenant pour u la vitesse du point mobile, et pour r le rayon du cercle *osculateur* de la courbe au point que l'on considère.

Dans notre exemple, la vitesse tangentielle u est exprimée par θr; le carré en est $\theta^2 r^2$; et divisant par r, on trouve

$$f = \theta^2 r$$

pour l'expression de la force centripète d'un point qui tourne avec une vitesse angulaire θ dans un cercle de rayon r.

53. Cela posé, si à chaque force tangentielle $dm\,.\,\theta r$, qui anime chaque molécule du corps, on joignait la force centripète convenable, et que je représente par $-\,dm\,.\,\theta^2 r dt$ (en lui donnant le signe $-$, parce qu'elle tend à diminuer la distance r à l'axe OZ), il est manifeste que l'ensemble de ces molécules, et, par conséquent, le corps lui-même tournerait autour de l'axe OZ avec la vitesse angulaire θ; et cela, d'une manière entièrement libre, je veux dire, quand bien même les molécules de ce corps ne seraient pas liées entre elles, et, par con-

séquent, sans que cette rotation pût affecter en rien l'état intérieur du corps.

Dans la question qui nous occupe, chaque molécule dm n'est poussée que par la force tangentielle $dm\,.\,\theta r$, et il n'y a point de force centripète $-\,dm\,.\,\theta^2 r dt$ qui intervienne pour la faire tourner librement autour de l'axe OZ. Mais je considère que si cette force $-\,dm\,.\,\theta^2 r dt$ n'y est point, rien n'empêche de la supposer, pourvu qu'on en suppose une autre égale et contraire $+\,dm\,.\,\theta^2 r dt$. Ainsi, à la seule force d'impulsion $dm\,.\,\theta r$, il est toujours permis de substituer l'ensemble des trois forces

$$\theta r dm, \quad -\,dm\,.\,\theta^2 r dt, \quad +\,dm\,.\,\theta^2 r dt.$$

Mais alors on peut imaginer que pendant l'instant dt, les deux premières forces sont employées à faire tourner librement la molécule par un arc de cercle $\theta r dt$, tandis que la troisième force $+\,dm\,.\,\theta^2 r dt$ tire cette même molécule dans le sens où elle tend à l'éloigner du centre; et voilà précisément ce que j'appelle la force centrifuge *née* de la rotation du corps. Toutes les molécules sont donc tirées à chaque instant par des forces semblables, uniquement dues au mouvement de rotation : forces réelles, qui affectent l'état intérieur du corps par les *tensions* qu'elles produisent sur les liens, quels qu'ils soient, qui retiennent les molécules.

Réduction des forces centrifuges à une seule force et à un seul couple.

54. Toutes les forces centrifuges qui naissent de la rotation θ étant FIG. 18.
ainsi représentées par $dm\,.\,\theta^2 r dt$, elles ont, au facteur près θdt, la même expression que les forces finies $\theta r dm$, dont les molécules sont actuellement animées. Mais, au lieu d'agir suivant les *tangentes*, elles agissent suivant les *rayons* des cercles décrits; et elles sont ainsi perpendiculaires à ces premières forces $\theta r dm$, et à l'axe donné OZ. Si donc on les réduit de la même manière, en les transportant au même point O, elles donneront pour leur résultante π, analogue à la résultante P des premières forces,

$$\pi = \theta^2 \sqrt{(\int x\,dm)^2 + (\int y\,dm)^2} = \theta\,\mathrm{P},$$

et pour leur couple résultant χ, analogue au couple K, et passant de même par l'axe donné OZ,

$$\chi = \theta^2 \sqrt{(\int xz\,dm)^2 + (\int yz\,dm)^2} = \theta K\,;$$

et il n'y aura point de couple analogue au couple N autour de OZ, puisque les directions de ces forces centrifuges passent toutes par l'axe OZ lui-même.

55. Telles sont donc les valeurs de la force accélératrice et du couple accélérateur qui résultent des forces centrifuges. Quant à la position de cette force π, et à celle du couple χ, elles se voient presque immédiatement. Car, comme toutes les forces centrifuges $dm.\theta^2 r$, qui donnent la résultante π, sont respectivement perpendiculaires et proportionnelles aux forces d'impulsion $\theta r dm$ qui donnent la résultante P, il est évident que π est perpendiculaire à P.

Par la même raison, l'axe du couple accélérateur χ est perpendiculaire à celui du couple K; et comme il est perpendiculaire à OZ qui est l'axe du couple N, il est aussi perpendiculaire à l'axe du couple G, qui est le résultant de N et K : on peut donc dire que *l'axe du couple χ dû aux forces centrifuges est perpendiculaire à la fois sur l'axe de la rotation θ et sur celui du couple d'impulsion* G.

Ainsi, P et G étant deux lignes qui, partant du point O, représentent, l'une la direction et la grandeur de la force P, l'autre l'axe et la grandeur du couple G, dont l'ensemble P et G est capable de la rotation θ autour de l'axe libre OZ; si l'on nomme i l'inclinaison de G à l'axe de cette rotation θ (ce qui donne $K = G \sin i$), on a, pour la force et le couple accélérateurs π et χ qui naissent des forces centrifuges, ces expressions très-simples

$$\pi = \theta P, \quad \chi = \theta G \sin i,$$

π étant perpendiculaire à la fois à P et à l'axe θ, et χ étant perpendiculaire à la fois à G et au même axe θ.

Remarque.

56. Quant aux *sens* de ces forces et de ces couples, ils sont bien faciles à reconnaître. Car on peut remarquer que si la direction de chaque force centrifuge faisait un quart de révolution *dans le sens même où le corps tourne,* elle deviendrait de même sens que la force d'impulsion. Donc les deux lignes $O\pi$ et $O\chi$, qui répondent à la résultante et au couple résultant des forces centrifuges, doivent être tellement posées par rapport aux lignes OP et OK qui répondent aux forces d'impulsion, que si $O\pi$ et $O\chi$ venaient à tourner d'un angle droit *dans le sens même de la rotation θ,* la ligne $O\pi$ viendrait se coucher sur OP, et la ligne $O\chi$ sur OK. D'où l'on voit avec clarté les positions précises qu'il faut donner aux lignes qu'on emploie dans la figure, pour représenter complétement les forces et les couples que l'on considère. On voit que si θ change de signe, comme P et K en changeront aussi, π et χ n'en doivent pas changer : et c'est en effet ce qui doit être, car il est évident que les forces centrifuges sont les mêmes, soit que le corps tourne dans un sens, soit qu'il tourne dans le sens contraire.

Corollaires.

57. Lorsque l'axe OZ de la rotation passe par le centre de gravité du corps, on a

$$\int x\,dm = 0 \quad \text{et} \quad \int y\,dm = 0, \quad \text{et partant,} \quad \pi = 0,$$

et toutes les forces centrifuges se réduisent au couple χ.

Si, de plus, l'axe OZ est un des trois axes principaux de ce corps, on a

$$\int xz\,dm = 0 \quad \text{et} \quad \int yz\,dm = 0, \quad \text{et partant,} \quad \chi = 0,$$

et toutes les forces centrifuges se font équilibre.

Et réciproquement, il n'y a qu'un tel axe autour duquel les forces centrifuges nées de la rotation puissent se contre-balancer mutuellement. Car pour l'équilibre, il faut avoir $\pi = 0$ et $\chi = 0$: or 1° π ne peut être nul à moins qu'on n'ait à la fois $\int x\,dm = 0$ et $\int y\,dm = 0$, c'est-à-dire à moins que l'axe OZ ne passe par le centre de gravité; 2° χ ne peut être nul à moins qu'on n'ait à la fois $\int xz\,dm = 0$ et $\int yz\,dm = 0$, c'est-à-dire à moins que l'axe OZ ne soit un des axes principaux.

Remarque.

58. On voit par là qu'en Mécanique on peut chercher les axes principaux d'un corps par deux considérations différentes, mais qui mènent sur-le-champ aux mêmes équations : car on peut demander, autour de quel axe un corps doit-il tourner pour que les forces actuelles $\theta r dm$ qui animent ses molécules se réduisent à un couple N perpendiculaire à cet axe? ou bien, autour de quel axe le corps doit-il tourner pour que les forces centrifuges $\theta^2 r dm$ qui naissent de la rotation se fassent mutuellement équilibre?

En représentant cet axe inconnu par la ligne OZ, et considérant deux autres axes quelconques OX et OY perpendiculaires entre eux et à celui-là, on trouve que, dans l'un et l'autre cas, il faut avoir d'abord $\int x dm = 0$ et $\int y dm = 0$, d'où résulte que l'axe inconnu doit passer par le centre de gravité du corps; et ensuite, qu'il faut avoir $\int xz dm = 0$ et $\int yz dm = 0$, d'où l'on tire la direction de cet axe. Ainsi les deux problèmes ne peuvent conduire qu'aux mêmes axes. Au reste, on verra plus loin, par la géométrie, que, dans un corps quelconque, il existe toujours trois axes de cette nature et qui sont rectangulaires entre eux.

59. Si le corps n'est pas libre, mais qu'il soit forcé de tourner sur un point fixe O, on n'a pas besoin d'avoir les deux premières conditions $\int x dm = 0$ et $\int y dm = 0$: car, le point O étant fixe, les deux forces P et π qui y sont appliquées se trouvent détruites. Il suffit donc de faire nul ou le couple K, ou le couple $\chi = \theta K$, ce qui revient au même, et ne donne à remplir que les deux conditions $\int xz dm = 0$, $\int yz dm = 0$. Or ces équations mènent aussi à trois axes déterminés, rectangulaires entre eux: de sorte qu'en un point *quelconque* O d'un corps solide, il y a aussi trois axes principaux, c'est-à-dire dont chacun jouit de cette double propriété: 1° que si le corps tourne sur cet axe, et qu'on réduise toutes forces $\theta r dm$ à une seule P appliquée en O et à un seul couple, ce couple N est perpendiculaire à l'axe dont il s'agit; 2° que, si l'on réduit de même les forces centrifuges $\theta^2 r dm$, le couple résultant χ est *nul de lui-même:* mais la résultante π n'est pas ici nulle, non plus que la force P, et le point fixe O est obligé de détruire cette force finie P, et de supporter la pression πdt.

60. Dans tous les cas, il suffit de connaître les trois axes principaux qui se croisent au centre de gravité du corps, et qu'on nomme les axes *naturels* de rotation. Car une fois qu'on a ces axes et les moments d'inertie A, B, C qui s'y rapportent, il est très-facile de trouver l'expression du moment d'inertie du corps autour d'un autre axe mené comme on voudra par le même centre; et de là on peut passer, par une autre expression encore plus simple, au moment d'inertie relatif à un axe quelconque parallèle à celui-là. C'est une théorie purement géométrique que je développerai avec quelque détail dans le chapitre suivant.

Mais avant de terminer celui-ci, je veux dire deux mots de la rotation d'un corps sur un *axe fixe,* afin de montrer, d'une manière nette, 1° les *percussions* que cet axe doit ressentir, au premier instant, de la part des forces d'impulsion qui ont été appliquées au corps; 2° les *pressions* que cet axe devra soutenir, dans tout le cours du mouvement, pour résister aux forces centrifuges qui naissent à chaque instant de la rotation.

Enfin, revenant aux propriétés générales du mouvement d'un corps *entièrement libre,* je montrerai, dans un nouveau paragraphe, que le principe de la *conservation des forces* et le principe de la *conservation des couples* auraient pu être tirés, comme corollaires, de la théorie des forces centrifuges.

IV.

Du mouvement d'un corps autour d'un axe fixe.

61. Quelles que soient les forces appliquées à ce corps, on peut toujours les réduire à une seule R appliquée en un point quelconque O de l'axe fixe, et à un seul couple G.

Or il est évident que la force R passant par un point de l'axe fixe y est détruite, et que, par conséquent, cet axe OZ reçoit d'abord au point O une percussion représentée par la force donnée R; ou, si l'on veut, en nommant α l'inclinaison de R à OZ, cet axe fixe reçoit deux percussions, l'une $R\cos\alpha$ dans le sens de sa longueur, et l'autre $R\sin\alpha$ dans une direction perpendiculaire.

Ensuite, en désignant par ν l'inclinaison de l'axe du couple G au même axe fixe, on peut décomposer ce couple en deux: l'un $N = G\cos\nu$, perpendiculaire à l'axe fixe; l'autre $N' = G\sin\nu$, dans un plan conduit par cet axe. Or il est visible que ce dernier couple N' se trouve détruit : de sorte que l'axe fixe doit encore ressentir la percussion d'un couple $N' = G \sin \nu$.

Ainsi, voilà deux percussions tout à fait inutiles au mouvement du corps, et qui ne peuvent qu'ébranler l'axe fixe : d'où l'on voit que si l'on n'a d'autre objet que de faire tourner le corps, en ménageant les appuis, il est bon de n'employer que des forces qui aient une résultante nulle, et ne donnent qu'un couple perpendiculaire à l'axe fixe.

Mais ce n'est pas tout : car reste le couple $N = G \cos \nu$, d'où proviendra le mouvement du corps ; et, quoique ce couple soit perpendiculaire à l'axe fixe lui-même, et paraisse ainsi ne plus devoir le frapper, il ne pourra pourtant faire tourner le corps sur cet axe sans y causer d'abord deux percussions du même genre que les premières ; et c'est ce qu'on va voir avec clarté dans le problème qui suit.

Problème.

62. *On suppose qu'un corps en repos, mobile autour d'un axe fixe OZ, soit frappé par un couple N perpendiculaire à cet axe, et l'on demande : 1° la vitesse angulaire θ que doit prendre ce corps ; 2° la percussion que l'axe fixe doit recevoir au premier instant ; 3° la pression continuelle qu'il aura à supporter, dans le cours du mouvement, en vertu des forces centrifuges qui naissent de la rotation.*

Fig. 19. Soit prise, sur l'axe fixe OZ, à partir d'un point quelconque O, une ligne terminée ON qui représente à la fois l'axe et la grandeur du couple d'impulsion appliqué au corps.

Soient, à partir du même point O, et dans le plan perpendiculaire à OZ, deux lignes terminées OP et OK, qui représentent, l'une la force P, et l'autre le couple K, qui, combinés avec le couple donné N, seraient capables de faire tourner le corps sur OZ d'une manière *spontanée*, c'est-à-dire, même en supposant que cet axe fût libre, et par conséquent sans lui causer la moindre percussion.

Cela posé, j'imagine qu'on applique au corps la force P, et en même temps la force P' égale et contraire ; de plus, qu'on applique le couple K, et le couple K' égal et contraire : il est clair que l'état du corps n'est pas changé. Mais actuellement, au lieu de voir ce corps comme frappé par le seul couple donné N, je puis le considérer comme frappé à la fois par les trois couples N, K, K' et les deux forces P et P'.

Or, par hypothèse, les couples N, K, et la force P, combinés ensemble, sont capables de faire tourner le corps sur l'axe OZ avec une vitesse angulaire $\theta = \frac{N}{\int r^2 dm}$, sans causer à cet état fixe la moindre percussion. Donc, 1° le corps prendra réellement cette rotation déterminée θ ; car la force et le couple restants P' et K', passant tous deux par l'axe fixe, peuvent être regardés comme détruits par la résistance de cet axe. Donc, 2° cet axe fixe ressentira deux percussions représentées l'une par la force P' appliquée au point O, l'autre par le couple K', dont le plan passe par le même axe ; et l'on aura, pour ces deux espèces de percussions :

$$P' = -P = -\theta \sqrt{(\int x\,dm)^2 + (\int y\,dm)^2},$$

$$K' = -K = -\theta \sqrt{(\int xz\,dm)^2 + (\int yz\,dm)^2}.$$

Ce qu'il fallait d'abord trouver.

63. Si l'axe OZ, au lieu d'être fixe dans toute sa longueur, était simplement retenu par deux points fixes A et B, et qu'on voulût trouver les deux percussions individuelles ressenties par ces points, on décomposerait la force P en deux autres parallèles appliquées, l'une au point A, l'autre au point B ; ensuite on changerait le couple K' en un autre équivalent appliqué à angle droit sur AB ; et, réduisant alors à une seule les deux forces qu'on trouverait en A, et de même à une seule les deux forces qui agiraient en B, on aurait les deux percussions individuelles que le couple proposé N produit au premier instant sur les deux points fixes A et B.

64. Il est évident que les percussions dont il s'agit ne sont ressenties par l'axe fixe qu'au premier instant : car une fois que l'axe a détruit la force P' et le couple K', le corps n'est plus sollicité au mouvement que par les couples N, K et la force P. Or ce système de forces étant capable de faire tourner *spontanément* sur OZ, c'est-à-dire quand bien même OZ ne serait pas fixe, il est manifeste que la résistance de cet axe n'a plus rien à détruire, et qu'il ne reçoit plus aucune percussion.

On voit, par là, que si l'on veut ménager le plus possible l'axe fixe de rotation, sans regarder à la dépense des forces, il faut appliquer des forces qui se réduisent d'elles-mêmes à la force P et au couple G résultant de N et K. Cet ensemble P et G, ou son équivalent P, N, K, feront tourner sur l'axe fixe sans lui causer aucune percussion. On peut se représenter que, dans le cas dont il s'agit, la chose se passe de cette manière : on peut voir le couple N comme étant employé à faire tourner sur l'axe, tandis que la force P et le couple K sont employés à soutenir cet axe, ou, si l'on veut, à détruire les deux percussions $-$P et $-$K qui lui viendraient du couple N, si ce couple agissait tout seul.

Ainsi, quand on veut ménager le plus possible la résistance de l'axe, il faut appliquer le système de forces représenté par N, P et K : mais si l'on veut ménager la dépense des forces, il faut appliquer le seul couple N; et alors l'axe reçoit deux percussions $-$P et $-$K, qu'il est obligé de détruire.

65. Après la destruction du couple K′ et de la force P′ par l'axe fixe, le corps tend donc à tourner *librement* sur cet axe avec la vitesse angulaire θ. Mais de cette rotation naissent alors les forces centrifuges $\theta^2 r dm$, dont il faut examiner l'effet; ce qui est le troisième point de notre démonstration. Or il est évident que toutes ces forces étant dirigées vers l'axe fixe, y seront détruites à chaque instant : d'où je conclus d'abord que la rotation θ du corps sera uniforme; que, dans toute la suite du mouvement, l'axe fixe n'aura plus qu'à supporter les pressions dues aux forces centrifuges; et que cet axe devra être retenu dans tous les sens, pour résister à ces pressions qui changent continuellement de directions par le mouvement même du corps. Or on a vu que les forces centrifuges $\theta^2 r dm$ sont réductibles à une seule

$$\pi = \theta \mathrm{P} = \theta^2 \sqrt{(\int x\, dm)^2 + (\int y\, dm)^2},$$

et à un seul couple

$$\chi = \theta \mathrm{K} = \theta^2 \sqrt{(\int xz\, dm)^2 + (\int yz\, dm)^2};$$

de sorte que l'axe est chargé, à chaque instant dt, d'une pression $\pi\, dt$ appliquée en O, et d'un couple χdt passant continuellement par cet axe : pressions qu'on pourra réduire, comme ci-dessus, à deux forces appliquées aux points A et B si l'axe n'est retenu que par deux points fixes; etc., etc.

Remarque.

Dans le mouvement que je viens de considérer, il est bien clair que la force P et le couple G, dont le corps est à chaque instant animé, restent toujours les mêmes de grandeur et de position dans l'*intérieur* du corps. Les deux lignes OP et OG qui les représentent ne font, pour ainsi dire, que tourner avec le corps et du même mouvement angulaire θ, autour de l'axe fixe.

Si tout à coup cet axe devenait libre, et que le corps fût ainsi abandonné à lui-même, on sait, par les principes généraux de la Dynamique, que P et G seraient également conservés de grandeur et de position, non plus dans l'intérieur du corps, mais dans l'*espace absolu*. Or je veux faire voir ici que ces principes, qu'on peut nommer la *conservation des forces* et la *conservation des couples*, auraient pu être tirés, comme de simples corollaires, de la théorie des forces centrifuges : déduction délicate et qui me paraît assez curieuse pour n'être point omise dans un Mémoire de Mécanique rationnelle.

V.

Conservation des forces et conservation des couples dans le mouvement d'un corps libre.

De l'analyse exacte des forces centrifuges, on peut tirer ces deux belles conséquences : c'est que les forces centrifuges qui naissent du mouvement d'un corps ne peuvent jamais altérer ni la grandeur ni la direction des forces primitives d'impulsion qui ont mis le corps en mouvement. Je veux dire que si, à une époque quelconque, on vient à rechercher la résultante et le couple résultant des forces finies qui animent le corps à cette époque, on retrouvera la même force et le même couple, et situés dans les mêmes lieux de l'espace. Ces propriétés ne sont, il est vrai, qu'un corollaire de ce principe, ou de cette loi générale de la Dynamique, par laquelle les forces qui animent toutes les molécules d'un système *quelconque,* variable ou non, donnent toujours, relativement à un même point de l'espace, la même résultante R et le même couple résultant G, pourvu que le système soit abandonné à lui-même, c'est-à-dire considéré comme libre de tout obstacle et de toute force accélératrice étrangère. Ce principe général a même lieu, comme on le sait, lorsqu'il y a, entre les molécules du système, des forces quelconques d'attraction, pourvu que ces attractions soient réciproques de l'une à l'autre, c'est-à-dire deux à deux égales et contraires; car, dans ce cas, ces forces donneraient à part leur résultante et leur couple résultant tous deux nuls, et ne pourraient troubler ni la grandeur ni la position de R et G. Cette conservation a encore lieu, mais pour le couple G seulement, dans le cas particulier de forces accélératrices étrangères tendant toutes vers un même point fixe de l'espace, et lorsqu'on prend ce point fixe pour le centre auquel on rapporte tous les moments du système : car toutes ces forces accélératrices ne donnent que des couples nuls relativement à ce point, et le couple résultant G est encore conservé. Mais s'il y a d'autres forces étrangères que celles dont je viens de parler, ni la résultante R ni le couple résultant G ne se conserve plus dans le cours du mouvement. On peut voir, dans le premier Mémoire qui accompagne nos *Éléments de Statique,* la démonstration très-simple de ce principe général, qui n'est, au reste, lui-même qu'une conséquence naturelle de cette loi fondamentale du mouvement, qu'on appelle la *loi d'inertie.*

Dans notre exemple d'un corps solide libre, qui a reçu des impulsions quelconques, et qui demeure ensuite abandonné à lui-même, il paraît donc évident que la conservation de la force R et du couple G d'impulsion ne peut manquer d'avoir lieu : car on ne suppose aucune force accélératrice qui vienne de l'extérieur; et si l'on y considère des forces centrifuges, ce ne sont en quelque sorte que des forces *passives* provenant de la liaison mutuelle des molécules; et il est assez clair que de telles forces ne peuvent en rien altérer ni la résultante ni le couple résultant du système. Cependant, comme ces forces centrifuges ne se font point équilibre entre elles sur le corps, il reste ici une certaine obscurité sur la conservation de la force R et du couple G, puisqu'il naît à chaque instant dt une force $\pi\,dt$ et un couple $\chi\,dt$ qui ne sont point nuls d'eux-mêmes. Il n'est donc pas inutile d'entrer ici dans une explication plus complète, et de montrer comment cette force et ce couple, nés des forces centrifuges, ne peuvent jamais troubler ni la grandeur ni la position dans l'espace de la résultante R et du couple résultant G. Et cela même nous paraît d'autant plus curieux à examiner, que non-seulement ces forces centrifuges ne troublent ni R ni G, mais qu'elles sont même nécessaires à leur conservation : de sorte que si, à chaque instant, on venait à détruire la force $\pi\,dt$ et le couple $\chi\,dt$, R et G ne se conserveraient plus dans l'espace absolu.

Démonstration.

Quel que soit le mouvement d'un corps, nous avons vu que ce mouvement peut être considéré, à chaque instant dt, comme composé d'une rotation θ autour d'un certain axe déterminé ON, et d'une translation u parallèle à cet axe que nous avons nommé l'*axe spontané glissant.*

Soient donc P, K, N la force et les deux couples capables de cette rotation θ sur l'axe ON, et Q la force qui, appliquée au centre de gravité g, est capable de la translation u suivant la direction du même axe. FIG. 20.

En nommant m la masse du corps, et faisant $g\mathrm{O} = a$, on aura

$$\mathrm{P} = ma\theta \quad \text{et} \quad \mathrm{Q} = mu,$$

comme on l'a dit plus haut.

Cela posé, au bout d'un instant dt, le corps sera descendu le long de ON, par un espace $\mathrm{OO}' = u\,dt$, et en même temps il aura tourné autour de ON par un angle $\theta\,dt$. Supposons donc que dans ce mouvement il ait entraîné avec lui toutes les lignes OP, OK, ON, Og que l'on considère dans la figure. Il est clair qu'en vertu du premier mouvement, toutes ces lignes seront d'abord descendues dans les positions parallèles O′P′, O′K′, O′N′, O′g'; et qu'en vertu du second, elles auront tourné ensemble d'un même angle $\theta\,dt$, pour venir dans les positions O′P″, O′K″, O′N′, O′g'' : de manière que les extrémités P′,

K', g' auront décrit les arcs semblables

$$P'P'' = P\theta\,dt, \quad K'K'' = K\theta\,dt, \quad g'g'' = a\theta\,dt.$$

Mais, au bout de cet instant, il sera provenu des forces centrifuges : 1° une force $\pi\,dt = P\theta\,dt$, perpendiculaire à P', et qui, composée avec P', ramènera cette force à sa place en $O'P'$; 2° un couple $\chi\,dt = K\theta\,dt$, perpendiculaire à K', et qui, composé avec K'', ramènera ce couple à sa place en $O'K'$. Donc, au bout d'un instant, les forces et les couples qui animent le corps seront représentés par les lignes $O'P'$, $O'K'$, $O'N'$ et $g'Q'$. Or je dis que cet ensemble de forces et de couples est exactement le même que celui qui a été considéré au commencement, c'est-à-dire qu'il peut être actuellement représenté par les mêmes lignes OP, OK, ON, gQ situées dans les mêmes lieux de l'espace absolu.

Et d'abord, la chose est évidente pour les deux couples représentés par les lignes $O'K'$, $O'N'$; car, suivant la propriété des couples, il est indifférent qu'ils soient représentés par ces deux lignes ou par les deux lignes OK, ON qui leur sont respectivement égales et parallèles. Restent donc les deux forces P' et Q', appliquées, l'une en O', l'autre en g'', qu'il faut montrer être réductibles aux deux forces respectivement égales et parallèles P et Q, appliquées en O et en g. Or P' peut être transportée parallèlement à elle-même de O' en O, pourvu qu'on ajoute le couple $(P, -P)$ appliqué sur $OO' = u\,dt$: de même Q' peut être transportée de g'' en g', pourvu qu'on ajoute le couple $(Q, -Q)$ au bras de levier $g'g'' = a\theta\,dt$. Mais il est clair que ces deux couples, qui sont parallèles et de sens contraires, ont des moments égaux : car à cause de $P = ma\theta$ et de $Q = mu$, le moment $P \times OO'$ du premier est $ma\theta . u\,dt$, et le moment $Q \times g'g''$ du second est $mu . a\theta\,dt$, ce qui revient au même : ainsi les deux couples $(P, -P)$, $(Q, -Q)$ se détruisent, et les deux forces P' et Q' sont ramenées aux deux forces P et Q.

Donc le système de forces et de couples qui animent le corps au bout d'un instant revient au même que celui qui l'animait au commencement de cet instant : d'où l'on peut conclure que cette conservation des forces et des couples a lieu dans toute la suite du temps ; ce qui est le principe général qu'il s'agissait de démontrer.

On peut même voir comment la chose se passe d'un instant à l'autre. Car au bout d'un instant, le corps ayant changé de position dans l'espace, et les forces ayant gardé la leur, le corps ne s'y présente plus de la même manière, et son mouvement va changer, c'est-à-dire qu'il va se faire autour de quelque autre axe spontané glissant on. Mais comme ce mouvement sera dû au même système (P, K, N, Q), ce système est nécessairement réductible à un système semblable (p, k, n, q) capable de ce mouvement autour du nouvel axe on dont il s'agit. Or, par la même démonstration qui précède, ce second système serait aussi conservé durant un instant : donc puisqu'il est réductible au premier (P, K, N, Q), celui-ci se conserve de même, c'est-à-dire qu'il peut représenter les forces et les couples qui animent le corps, non-seulement au bout du *premier*, mais encore au bout du *second* instant, et ainsi de suite à l'infini : d'où l'on voit comment cette *conservation* des forces et des couples doit s'étendre à tout le cours du mouvement.

Et réciproquement, si l'on voulait partir de ce principe général (dont la démonstration directe est très-facile), on serait conduit, par une marche inverse, à reconnaître que, du mouvement même d'un corps solide, il doit nécessairement provenir de certaines forces infiniment petites, telles que, étant combinées à chaque instant avec les forces acquises, le principe de *conservation* dont il s'agit soit rigoureusement observé : et l'on retrouverait ainsi pour ces forces infiniment petites les mêmes expressions $\pi\,dt$, $\chi\,dt$, qu'on a tirées de la théorie des forces centrifuges. Au reste, il n'est pas surprenant qu'on arrive au même résultat par les deux méthodes, puisque l'une et l'autre partent également de cette loi fondamentale qu'on appelle la loi d'*inertie*.

CHAPITRE III.

SUR LA THÉORIE DES MOMENTS D'INERTIE [*].

I.

Des moments d'inertie d'un corps de figure quelconque autour de différents axes qui se croisent en un même point.

66. Soient, par le point ou centre que l'on considère, trois axes rectangulaires x, y, z auxquels on rapporte les différents points du corps; h une droite quelconque passant par l'origine, et faisant avec les axes x, y, z, trois angles α, β, γ : on se propose de trouver l'expression du moment d'inertie par rapport à cette droite d'inclinaison donnée sur les trois axes fixes des coordonnées x, y, z.

Ce moment d'inertie n'est autre chose que la somme des produits faits de chaque particule du corps par le carré de sa distance à l'axe que l'on considère. Ainsi, en nommant dm une de ces particules, r sa distance à la droite donnée h, on a, pour le moment d'inertie de cette particule, $r^2\,dm$, et pour le moment d'inertie du corps entier, $\int r^2\,dm$, en représentant par $\int r^2\,dm$ la somme de tous les produits semblables à $r^2\,dm$ qu'on peut former en considérant toutes les molécules du corps.

Or x, y, z étant les coordonnées d'une particule quelconque dm, et ∂ sa distance à l'origine, on aura

$$\partial^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

et pour la distance r de cette particule à l'axe donné h, on aura

$$r = \partial \sin\varphi,$$

[*] Ce chapitre ne fait pas essentiellement partie de notre Mémoire *Sur la rotation des corps;* c'est un petit Mémoire à part, que j'avais rédigé, il y a plus de trente ans, pour le *Journal de l'École Polytechnique*. Mais M. Liouville, à qui je l'ai communiqué, m'en a vivement demandé l'insertion dans le présent travail. J'ai cédé au désir de mon savant confrère, par la considération de l'intérêt que cet ancien opuscule inédit pourrait encore offrir à quelques lecteurs.

φ étant l'inclinaison mutuelle de ∂ et h; on a donc

$$r^2 = \partial^2 \sin^2\varphi = \partial^2(1 - \cos^2\varphi),$$

et comme on a, par la géométrie,

$$\cos\varphi = \frac{x}{\partial}\cos\alpha + \frac{y}{\partial}\cos\beta + \frac{z}{\partial}\cos\gamma,$$

on trouvera en substituant (et observant que l'on a toujours $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$),

$$r^2 = \cos^2\alpha\,(y^2 + z^2) + \cos^2\beta\,(x^2 + z^2) + \cos^2\gamma\,(x^2 + y^2)$$
$$- 2(\cos\alpha\cos\beta\,.\,xy + \cos\alpha\cos\gamma\,.\,xz + \cos\beta\cos\gamma\,.\,yz),$$

et, par conséquent, multipliant tout par dm, et mettant le signe $\int$,

$$\int r^2\,dm = \cos^2\alpha \int(y^2+z^2)\,dm + \cos^2\beta \int(x^2+z^2)\,dm + \cos^2\gamma \int(x^2+y^2)\,dm$$
$$- 2\left(\cos\alpha\cos\beta \int xy\,dm + \cos\alpha\cos\gamma \int xz\,dm + \cos\beta\cos\gamma \int yz\,dm\right),$$

ce qui donne le moment d'inertie relatif à l'axe proposé, par les inclinaisons α, β, γ de cet axe sur les trois axes fixes donnés x, y, z, et par les six intégrales

$$\int(y^2 + z^2)\,dm, \quad \int(x^2 + z^2)\,dm, \quad \int(x^2 + y^2)\,dm,$$
$$\int xy\,dm, \quad \int xz\,dm, \quad \int yz\,dm,$$

relatives aux mêmes axes : intégrales qu'on peut regarder comme actuellement déterminées par la position connue du corps, et que je représenterai par les six constantes respectives

$$\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C},\ l,\ m,\ n;$$

de sorte que, en désignant simplement par H le moment d'inertie $\int r^2\,dm$ relatif à la droite h, on aura l'équation

$$\mathrm{H} = \mathrm{A}\cos^2\alpha + \mathrm{B}\cos^2\beta + \mathrm{C}\cos^2\gamma$$
$$- 2(l\cos\alpha\cos\beta + m\cos\alpha\cos\gamma + n\cos\beta\cos\gamma),$$

où A, B, C représentent les moments d'inertie relatifs aux axes des coordonnées x, y, z.

Du système des droites ou axes h, autour desquels le moment d'inertie du corps a toujours la même valeur H.

67. Si dans l'équation précédente on regarde H comme une constante donnée, et les angles α, β, γ comme variables, on aura évidemment l'équation de la surface conique formée par la suite des droites h autour desquelles le moment d'inertie du corps a toujours la même valeur H. Or il est facile de voir que c'est une surface conique du second ordre dont le sommet est à l'origine : mais, pour mieux reconnaître cette surface, je vais la rapporter aux coordonnées rectangles x, y, z.

Pour cela, je considère un quelconque de ses points pris sur la génératrice h, à une distance de l'origine marquée par

$$h = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

il est évident qu'on a

$$\cos\alpha = \frac{x}{h}, \quad \cos\beta = \frac{y}{h}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{h},$$

et, si l'on substitue dans l'équation précédente, il vient, pour l'équation de la surface rapportée aux coordonnées x, y, z,

$$(\mathrm{H}-\mathrm{A})x^2 + (\mathrm{H}-\mathrm{B})y^2 + (\mathrm{H}-\mathrm{C})z^2 + 2lxy + 2mxz + 2nyz = 0,$$

qui appartient évidemment à une surface conique du second ordre rapportée à son centre ou sommet comme origine des coordonnées.

68. Ainsi il y a toujours dans un corps de figure quelconque, et en un point quelconque du corps ou de l'espace, une suite d'axes autour desquels le moment d'inertie du corps a toujours une même valeur; et cette suite d'axes de moments égaux forme la surface d'un cône du second ordre.

Des axes principaux d'inertie.

69. On peut encore simplifier l'équation de la surface que je considère, en changeant les coordonnées actuelles en d'autres de même origine et aussi rectangulaires entre elles, et faisant disparaître dans l'équation transformée les trois rectangles de ces nouvelles coordonnées. Cette transformation, comme on le sait par la géométrie analytique, est toujours possible; et l'équation de la surface ne contient plus alors que les trois carrés des coordonnées : elle est réduite à sa forme la plus simple, et la surface conique est rapportée, comme on dit, à son centre et à ses axes ou diamètres rectangulaires.

Si donc, dès le commencement, au lieu de prendre trois axes quelconques, on avait pris les trois diamètres dont je viens de parler, et qu'on eût cherché de même la surface formée par la suite des droites d'un même moment d'inertie H, on aurait trouvé exactement la même équation, et toute réduite à la forme la plus simple. Or, par rapport à trois axes quelconques, cette équation est, comme on l'a vu, de la forme

$$(\mathrm{H}-\mathrm{A})x^2 + (\mathrm{H}-\mathrm{B})y^2 + (\mathrm{H}-\mathrm{C})z^2 + 2(lxy + mxz + nyz) = 0,$$

où A, B, C, l, m, n désignent les six intégrales $\int (y^2+z^2)\,dm$, $\int (x^2+z^2)\,dm$, etc., $\int xy\,dm$, etc., relatives aux axes que l'on considère. Mais puisque cette équation, rapportée aux trois diamètres particuliers dont il s'agit, ne doit plus contenir les rectangles xy, xz, yz des coordonnées, il s'ensuit que, relativement à ces mêmes diamètres, on aurait trouvé les intégrales l, m, n, c'est-à-dire $\int xy\,dm$, $\int xz\,dm$, $\int yz\,dm$, toutes trois égales à zéro.

70. Donc, par la même raison qu'il y a pour une surface conique du second ordre, trois axes rectangulaires par rapport auxquels les coefficients des trois rectangles xy, xz, yz sont nuls dans l'équation de cette surface, il y a dans un corps de figure quelconque, et en tel point de l'espace qu'on voudra considérer, trois axes rectangulaires par rapport auxquels les trois intégrales $\int xy\,dm$, $\int xz\,dm$, $\int yz\,dm$, relatives à ces axes, sont égales à zéro.

Et ces trois axes, qu'on nomme les *axes principaux* du corps, ne sont autre chose que les trois diamètres rectangulaires de la surface conique du second ordre formée autour de l'origine, comme sommet, par la suite des droites autour desquelles le corps a toujours le même moment d'inertie.

Comment on détermine les axes principaux.

71. On peut donc déterminer la position des trois axes principaux d'un corps, exactement comme on détermine celle des trois axes ou diamètres rectangulaires d'une surface du second ordre.

Ainsi on prendra l'équation générale de la surface conique dont je viens de parler, relativement à trois axes quelconques menés par le point que l'on considère. On cherchera les valeurs des six intégrales A, B, C, l, m, n relatives à ces axes; et l'on donnera à H une valeur quelconque qu'elle puisse avoir, telle que $H = A$, ou B, ou C, ou toute autre. Cela fait, on cherchera par la transformation ordinaire des coordonnées trois nouveaux axes de même origine, et par rapport auxquels l'équation devienne de la forme

$$Px^2 + Qy^2 + Rz^2 = 0,$$

et ces trois axes rectangulaires seront les trois axes principaux d'inertie dans le corps que l'on considère.

72. Dans une section conique plane, la recherche des deux axes dépend d'une équation du second degré: mais dans une surface du second ordre, la recherche des trois axes ou diamètres principaux dépend d'une équation du troisième degré. Ainsi l'on ne peut trouver, en général, les trois axes principaux d'inertie d'un corps de figure quelconque que par la résolution actuelle d'une équation du troisième degré, ou par la trisection de l'angle.

73. Mais si l'on connaît un de ces axes, on pourra trouver les deux autres par une équation du second degré ou par la bissection de l'angle.

Car soit z un axe pour lequel on ait m et n, c'est-à-dire $\int xz\,dm$ et $\int yz\,dm$, toutes deux nulles. L'équation de la surface conique se réduira à celle-ci:

$$(H - A)x^2 + (H - B)y^2 + (H - C)z^2 + 2lxy = 0.$$

Or, on peut trouver dans le plan xy deux nouveaux axes x' et y', aussi rectangulaires et pour lesquels le rectangle $x'y'$ des coordonnées

disparaisse de l'équation transformée. Si l'on désigne par ω l'inclinaison de x' à x, on a

$$x = x'\cos\omega - y'\sin\omega,$$
$$y = x'\sin\omega + y'\cos\omega,$$

et substituant ces valeurs dans l'équation, on trouve pour le coefficient du rectangle $x'y'$,

$$(A - B)\,2\sin\omega\cos\omega + 2l(\cos^2\omega - \sin^2\omega),$$

ou bien

$$(A - B)\sin 2\omega + 2l\cos 2\omega,$$

lequel, étant égalé à zéro, nous donne, pour déterminer ω, l'équation très-simple

$$\tang 2\omega = \frac{2l}{B - A}.$$

Ainsi, relativement aux trois axes x', y' et z qui sont rectangulaires entre eux, l'équation de la surface conique sera réduite à la forme

$$Px'^2 + Qy'^2 + Rz^2 = 0,$$

et ces trois axes seront ainsi les trois axes principaux du corps que l'on considère, de sorte qu'on aura

$$\int x'y'\,dm = 0, \quad \int x'z\,dm = 0, \quad \int y'z\,dm = 0.$$

On voit que les deux dernières équations s'accordent avec les deux qu'on avait supposées, savoir $\int xz\,dm = 0$, $\int yz\,dm = 0$: car par la forme des expressions ci-dessus de x et y, en x' et y', ou réciproquement, il est facile de voir que $\int x'z\,dm = 0$ et $\int y'z\,dm = 0$ entraînent les deux équations $\int xz\,dm = 0$ et $\int yz\,dm = 0$, et réciproquement; et cela même, indépendamment de l'inclinaison ω de x à x'.

Propriétés des trois axes principaux.

74. Si nous rapportons toutes les particules du corps aux trois axes *principaux*, nous aurons donc, en nommant toujours H le moment d'inertie relatif à une droite h menée par l'origine sous les angles α, β, γ avec ces mêmes axes,

$$H = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma,$$

où A, B, C sont les valeurs des moments d'inertie du corps relatifs aux trois axes principaux.

75. De cette expression très-simple, il résulte d'abord que le moment d'inertie H sera toujours une quantité moyenne entre les moments principaux A, B, C. Car, supposez qu'on range ces trois quantités par ordre de grandeur, $A < B < C$; je dis que A est la plus petite valeur que puisse obtenir H, et que C est la plus grande.

En effet, à cause de

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

on peut mettre l'expression précédente sous la forme

$$H = A + (B - A)\cos^2\beta + (C - A)\cos^2\gamma;$$

or $(B-A)$ et $(C-A)$ sont tous deux positifs par hypothèse; donc on a toujours

$$H > A.$$

Si l'on suppose que H passe à cette valeur *minimum* A, il vient

$$0 = (B - A)\cos^2\beta + (C - A)\cos^2\gamma,$$

équation qui ne peut subsister à moins qu'on n'ait

$$\cos\beta = 0, \quad \cos\gamma = 0, \quad \text{et partant} \quad \cos\alpha = 1,$$

ce qui fait tomber h sur l'axe principal lui-même du moment A.

Ainsi, entre tous les axes qu'on peut mener par l'origine, l'axe du moment d'inertie *minimum* est unique, et c'est le premier axe principal.

Maintenant, si l'on met l'expression de H sous la forme

$$H = C + (A - C)\cos^2\alpha + (B - C)\cos^2\beta,$$

on voit de même que $(A - C)$ et $(B - C)$ sont tous deux négatifs par hypothèse; donc on a toujours $H < C$. Ainsi la valeur générale de H est toujours intermédiaire entre A et C, comme je l'avais avancé. Si l'on suppose que H arrive à cette valeur maximum C, il vient

$$0 = (A - C)\cos^2\alpha + (B - C)\cos^2\beta,$$

équation qui ne peut subsister à moins qu'on n'ait

$$\cos\alpha = 0, \quad \cos\beta = 0, \quad \text{et par conséquent}, \quad \cos\gamma = 1,$$

ce qui fait coïncider h avec l'axe principal du moment C.

Ainsi l'axe du moment d'inertie *maximum* est aussi un axe unique; et c'est le second axe principal du corps.

Enfin, si l'on met l'expression de H sous la forme

$$H = B + (A - B)\cos^2\alpha + (C - B)\cos^2\gamma,$$

on voit que $(A - B)$ étant négatif et $(C - B)$ positif, la valeur de H peut se trouver au-dessus ou au-dessous de B, selon que $(C - B)\cos^2\gamma$ sera plus grand ou plus petit que $(B - A)\cos^2\alpha$. Si l'on suppose que H prenne la valeur B, il vient

$$0 = (A - B)\cos^2\alpha + (C - B)\cos^2\gamma,$$

équation qui donne simplement, entre les angles α et γ, la condition

$$\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} = \pm\sqrt{\frac{(B-A)}{(C-B)}},$$

ou bien, entre les coordonnées z et x d'un point quelconque pris sur la droite h, l'équation

$$\frac{z}{x} = \pm\sqrt{\frac{(B-A)}{(C-B)}}.$$

Il y a donc une infinité d'axes du *moyen* moment d'inertie B; et l'on voit que tous ces axes forment deux plans conduits par l'axe principal des y ou du moment B, et faisant à droite et à gauche sur le plan xy deux angles égaux dont la tangente $\frac{z}{x}$ est $\sqrt{\frac{B-A}{C-B}}$.

Entre tous ces axes de même moment d'inertie B, il y en a un distingué de tous les autres; c'est celui qui est à la fois dans l'un et l'autre des deux plans dont je viens de parler, ou qui est à la fois perpendiculaire aux deux premiers axes principaux : c'est le troisième axe principal du corps.

Cet axe, comme on voit, ne jouit pas, comme les deux autres, d'une propriété de *maximum* ou de *minimum*. Il n'est pas un axe unique quant à la grandeur du moment d'inertie qui s'y rapporte, mais il est unique quant à sa position particulière entre tous ceux du même moment d'inertie B.

Équation la plus simple de la surface conique formée par la suite des axes autour desquels le moment d'inertie du corps a la même valeur.

75. Relativement aux trois axes principaux x, y, z, la surface conique formée par la suite des axes h de même moment d'inertie H, a pour équation très-simple

$$(\mathrm{H}-\mathrm{A})x^2+(\mathrm{H}-\mathrm{B})y^2+(\mathrm{H}-\mathrm{C})z^2=0,$$

où l'on vient de voir que si $\mathrm{A}<\mathrm{B}<\mathrm{C}$, le moment H est toujours entre A et C.

Soit, en premier lieu, $\mathrm{H}<\mathrm{B}$.

Si l'on coupe la surface conique par un plan perpendiculaire à x et dont l'équation soit $x=a$, il vient, pour la section projetée dans toute sa grandeur sur le plan yz,

$$(\mathrm{H}-\mathrm{B})y^2+(\mathrm{H}-\mathrm{C})z^2=(\mathrm{A}-\mathrm{H})a^2,$$

équation d'une ellipse, puisque $(\mathrm{H}-\mathrm{B})$, $(\mathrm{H}-\mathrm{C})$ et $(\mathrm{A}-\mathrm{H})$ sont tous trois de même signe.

Ainsi tous les axes de moment d'inertie H égaux entre eux et inférieurs à B, forment la surface d'un cône droit à base elliptique autour de l'axe principal du moment d'inertie *minimum* A.

Soit, en second lieu, $\mathrm{H}>\mathrm{B}$.

On voit de même, en coupant la surface conique par un plan perpendiculaire à z, et dont l'équation soit $z=c$, que tous les axes de moments H égaux entre eux et supérieurs à B, forment la surface d'un cône droit à base elliptique, autour de l'axe z du moment d'inertie *maximum* C.

Enfin, si l'on suppose $\mathrm{H}=\mathrm{B}$, l'équation de la surface devient

$$(\mathrm{B}-\mathrm{A})x^2+(\mathrm{B}-\mathrm{C})z^2=0,$$

qui donne

$$\frac{z}{x}=\pm\sqrt{\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}-\mathrm{B}}},$$

ce qui répond à deux plans conduits par l'axe y du moyen moment

principal, et inclinés sur l'axe x du moment minimum d'un angle dont la tangente $\frac{z}{x}$ est $\sqrt{\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}-\mathrm{B}}}$, ce qui s'accorde parfaitement avec ce qu'on a dit plus haut.

Ces deux plans, dans les quatre coins qu'ils forment autour de l'axe du moyen moment d'inertie B, comprennent toute la surface du corps, ou plus généralement comprennent tout l'espace. Dans les deux coins opposés au sommet où passe l'axe du moment *minimum* A, tous les axes menés à la surface ont des moments H inférieurs à B et supérieurs à A, qui est le plus petit de tous.

Dans les deux autres coins, où passe l'axe du moment *maximum* C, tous les axes menés du centre à la surface ont des moments H supérieurs à B et inférieurs à C, qui est le plus grand de tous.

Enfin, dans les plans mêmes qui forment les quatre coins, tous les axes ont des moments d'inertie égaux à B.

Si l'on avait, comme cela arrive dans les corps de révolution et dans une infinité d'autres, deux des trois moments d'inertie A, B, C, égaux entre eux, les surfaces coniques dont j'ai parlé seraient celles de cônes droits à base circulaire autour du troisième axe principal, et les deux autres plans se confondraient en un seul perpendiculaire au même axe : de sorte que tous les axes possibles menés dans ce plan seraient des axes principaux d'égal moment d'inertie.

Si l'on avait les trois moments d'inertie A, B, C égaux entre eux, comme dans la sphère et dans une infinité d'autres corps, tous les axes possibles seraient des axes principaux de même moment.

76. De l'expression générale

$$\mathrm{H}=\mathrm{A}\cos^2\alpha+\mathrm{B}\cos^2\beta+\mathrm{C}\cos^2\gamma,$$

il résulte encore des conséquences faciles et très-importantes pour simplifier la considération du mouvement d'un corps de figure quelconque. On voit, en effet, par cette expression que si deux corps quelconques avaient les mêmes moments d'inertie A, B, C par rapport à leurs axes principaux x, y, z, ces deux corps auraient aussi le même moment d'inertie H par rapport à toute autre droite h faisant les mêmes angles α, β, γ avec les axes principaux. Donc quand on ne considère que les moments d'inertie, on peut toujours faire abstraction de la figure du corps, ou plutôt on peut toujours la supposer réduite à celle de quelque corps plus régulier tel qu'un ellipsoïde, ou même un simple parallélipipède rectangle, qui aurait les mêmes moments principaux d'inertie.

Supposons, par exemple, deux corps libres qui auraient le même centre de gravité, les mêmes axes principaux et les mêmes moments d'inertie par rapport à tous les axes possibles menés par le centre. Et si deux couples de même grandeur et de même sens les frappaient à la fois, leur rotation, qui ne dépend à chaque instant que des moments d'inertie relatifs aux différents axes qui passent par le centre de gravité, serait exactement la même dans tout le cours du mouvement : de sorte que ces deux corps suivraient les mêmes rotations sans se nuire ou se favoriser en aucune manière. Ainsi le mouvement d'un corps irrégulier projeté d'une manière quelconque dans l'espace est le même que celui d'un simple rhomboïde rectangle, ou de l'assemblage de trois verges rectilignes qui se croisent à angles droits dans leurs milieux, ou de tout autre corps régulier qui aurait les mêmes moments principaux d'inertie. Par cette considération, on éclaircit le problème de la rotation des corps, en substituant une figure plus simple et plus facile à concevoir, comme dans le mouvement de translation on réduit le corps à un seul point qui est le centre de gravité.

Mais il y a encore une expression plus claire de tout ce qui regarde les moments d'inertie d'un corps, comme nous le verrons dans la seconde partie de cet ouvrage.

En attendant, il faut montrer comment on peut trouver le moment d'inertie d'un corps autour d'un axe quelconque, quand on connaît les axes, et les moments principaux d'inertie A, B, C, qui se rapportent au centre de gravité de ce corps.

77. Nous avons déjà vu que, pour un axe quelconque h qui passerait par le centre de gravité, le moment d'inertie H serait exprimé par la formule

$$\mathrm{H} = \mathrm{A}\cos^2\alpha + \mathrm{B}\cos^2\beta + \mathrm{C}\cos^2\gamma,$$

α, β, γ étant les inclinaisons de cet axe sur les trois axes principaux du corps. Or il est facile de trouver le moment d'inertie d'un corps autour d'un axe quelconque h', par le moment d'inertie H autour d'un axe parallèle mené par le centre de gravité de ce corps.

Et, en effet, soit r' la distance d'une molécule dm du corps à l'axe h' que l'on considère, r sa distance à l'axe parallèle mené par le centre, et D la distance mutuelle de ces deux axes; on aura, dans le triangle formé par les trois lignes r', r et D,

$$r'^2 = r^2 + \mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D}r\cos\varphi,$$

φ étant l'inclinaison de r à D. On aura donc

$$\int r'^2\,dm = \int r^2\,dm + m\mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D}\int dm.r\cos\varphi,$$

ou bien

$$\mathrm{H}' = \mathrm{H} + m\mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D}\int dm.r\cos\varphi.$$

Mais $r\cos\varphi$ marque la distance de la molécule dm au plan qui serait mené par le centre de gravité perpendiculairement à la ligne D; on a donc, puisque ce plan passe par le centre, $\int dm.r\cos\varphi = 0$, et partant,

$$\mathrm{H}' = \mathrm{H} + m\mathrm{D}^2:$$

c'est-à-dire que *le moment d'inertie d'un corps autour d'un axe mené comme on voudra dans l'espace se trouve en prenant le moment d'inertie autour d'un axe parallèle mené par le centre de gravité, et y ajoutant le produit de la masse par le carré de la distance de ce centre à l'axe extérieur que l'on considère.*

78. On voit par là que les moments d'inertie d'un corps sont égaux pour tous les axes parallèles h' qui sont à égale distance D du centre de gravité de ce corps, ou qui forment la surface d'un cylindre droit et circulaire autour de ce centre.

Si l'on conçoit ce cylindre décrit, et qu'on le fasse tourner autour du même centre, dans une infinité de positions différentes, les moments d'inertie du corps relatifs aux génératrices h' auront bien la même valeur sur chaque cylindre, mais ils varieront de grandeur d'un cylindre à l'autre. Mais si l'on fait tourner le cylindre dont il s'agit de manière que son axe décrive la surface conique qui répond à l'équation

$$\mathrm{A}\cos^2\alpha + \mathrm{B}\cos^2\beta + \mathrm{C}\cos^2\gamma = \mathrm{H} = \text{constante},$$

les moments d'inertie du corps seront égaux par rapport à toutes les génératrices de cette infinité de cylindres.

Mais le système de toutes ces droites n'épuise pas encore l'infinité des axes autour desquels le corps peut avoir un même moment d'inertie donné. Car si l'on fait varier à la fois H et D de manière que la somme $H + mD^2$ reste constante, on voit qu'on aura encore une infinité de systèmes d'axes tels que les précédents, et autour desquels le corps aura le même moment d'inertie.

Quand on ne considère que des axes qui se croisent en un même point quelconque O, tous les axes d'un moment d'inertie donné forment une surface conique du second ordre décrite autour de ce point. Quand on ne considère que des axes parallèles entre eux, tous les axes d'un moment d'inertie donné forment la surface d'un cylindre droit à base circulaire autour du centre de gravité du corps. Mais quand on regarde indistinctement tous les axes possibles de l'espace, il y en a une infinité d'infinités qui répondent au même moment d'inertie donné. Toutes ces droites, néanmoins, ne remplissent pas tout l'espace; car H′ étant donné, et H étant nécessairement compris entre le plus petit A et le plus grand C des trois moments principaux A, B, C, il est clair que la ligne D ne peut varier qu'entre certaines limites, qui sont

$$D = \sqrt{\frac{H' - C}{m}} \quad \text{et} \quad D' = \sqrt{\frac{H' - A}{m}}.$$

Ainsi, en concevant autour du centre de gravité du corps deux sphères décrites des rayons D et D′, aucun des axes qui peuvent répondre au même moment d'inertie H′ ne peut entrer dans la sphère au rayon D, ni sortir de la sphère au rayon D′.

79. De cette relation simple

$$H' = H + mD^2$$

on tire encore cette conséquence : c'est que si, d'un point O pris sur l'un quelconque ga des trois axes principaux ga, gb, gc relatifs au centre de gravité g du corps, on mène des parallèles aux deux autres, ces deux droites Ob', Oc' seront avec la première Og les trois axes principaux du même corps par rapport au point O. Car Og étant axe principal relatif au centre g, l'est aussi au point O de sa direction; et, par conséquent, les deux autres axes sont dans le plan mené en O perpendiculairement à Og. Or, qu'on fasse mouvoir, autour de g et O, deux axes gh, Oh' parallèles entre eux et perpendiculaires à gO; la distance D de ces deux axes étant alors constante, les variations des moments d'inertie H et H′ sont les mêmes. Ainsi H′ et H arrivent ensemble à leur *maximum* ou *minimum*. Mais, par hypothèse, H atteint cette valeur singulière quand gh se confond avec gc ou gb; donc H′ y arrive quand Oh' est parallèle à l'un ou à l'autre de ces axes. Donc, etc.

C'est d'ailleurs ce qu'on pourrait voir d'une manière directe en rapportant les molécules du corps à trois axes Ox', Oy', Oz' parallèles aux premiers gx, gy, gz : car, en nommant λ, μ, ν les trois coordonnées du point O, on trouve que les trois intégrales $\int x'y'\,dm$, $\int x'z'\,dm$ $\int y'z'\,dm$ se réduisent aux trois produits $m.\lambda\mu$, $m.\lambda\nu$, $m.\mu\nu$, et que, par conséquent, pour les rendre toutes trois nulles, il suffit d'égaler à zéro deux quelconques des trois coordonnées λ, μ, ν du point O, c'est-à-dire de prendre ce point sur l'un quelconque des axes principaux ga, gb, gc.

On voit même qu'en faisant nulle une seule de ces trois coordonnées, on rend nulles *deux* des trois intégrales dont il s'agit; d'où l'on conclut que tout axe parallèle à l'un des trois axes principaux relatifs au centre g, est lui-même un axe principal relatif au point O où il perce le plan des deux autres.

80. De la même relation

$$H' = H + mD^2$$

on tire encore la démonstration la plus simple d'un théorème assez curieux [*] qui peut être utile dans quelques applications.

En donnant, pour abréger, le simple nom d'*axes égaux* aux différents axes par rapport auxquels le corps a un égal moment d'inertie, on demande si, dans un corps quelconque, il pourrait y avoir quelque point ou centre O autour duquel tous les axes possibles seraient des axes égaux, comme il arrive dans la sphère, les corps réguliers, etc., relativement aux axes qui partent de leur centre.

Soient donc O un tel point s'il est possible, g le centre de gravité du corps : faisons la ligne $gO = D$, et menons au point O le plan MN perpendiculaire à cette ligne. Il est clair que tous les axes menés du

[*] Ce théorème est dû à M. Binet qui l'a donné, en 1811, dans un Mémoire présenté à la première classe de l'Institut.

point O dans ce plan sont des axes égaux, puisque cela même est vrai, par hypothèse, de tous les axes possibles émanés de ce point. Cela posé, tous les axes menés du centre de gravité g, dans un plan parallèle à MN, seront aussi des axes égaux entre eux, comme étant à la même distance D des premiers situés dans le plan MN.

Donc, en premier lieu, le point cherché O ne peut exister à moins que le corps n'ait deux de ses axes principaux, relatifs à son centre de gravité g, égaux entre eux; et si ce point O existe, il est situé sur la perpendiculaire gO au plan de ces deux axes égaux, et, par conséquent, sur la direction du troisième axe principal du corps. Pour le déterminer, soit A la commune valeur du moment d'inertie autour des deux premiers, et C le moment d'inertie autour du troisième gO : on aura, pour le moment d'inertie H' autour des axes situés dans le plan MN,

$$H' = A + mD^2.$$

Mais H' devant être le même pour tous les axes qui partent du point O dans tous les sens, doit être le même pour l'axe Og : or autour de cet axe le moment d'inertie du corps est C; il faut donc qu'on ait

$$H' = C, \quad \text{et par conséquent,} \quad C = A + mD^2:$$

d'où l'on tire, pour la distance D du point O au centre g,

$$D = \pm\sqrt{\frac{C-A}{m}},$$

double valeur qui n'est réelle que dans le cas de $C > A$.

Ainsi il ne peut y avoir dans un corps de centre O autour duquel tous les axes d'inertie soient égaux, à moins que le corps n'ait deux de ses axes naturels égaux entre eux, et que le moment d'inertie relatif au troisième ne surpasse celui qui se rapporte aux deux autres. Mais si ces conditions ont lieu, comme, par exemple, dans un sphéroïde homogène aplati vers les pôles, ce point singulier O existe réellement, et il y en a même deux de cette nature : ils sont situés sur l'axe naturel du plus grand moment d'inertie, l'un à gauche, l'autre à droite du centre de gravité, et à la même distance $D = \sqrt{\frac{C-A}{m}}$ de ce centre.

SECONDE PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

SOLUTION DU PROBLÈME DE LA ROTATION DES CORPS LIBRES.

I.

Définitions analytiques.

1. Soient O le point qui fait le centre de la rotation du corps; Ox, Oy, Oz les directions rectangulaires des trois *axes principaux;* et A, B, C les trois moments d'inertie de ce corps autour des mêmes axes.

On vient de voir que, si l'on considère un autre axe quelconque OI, on aura, en désignant par I la valeur du moment d'inertie qui s'y rapporte, l'expression

$$I = A\cos^2\lambda + B\cos^2\mu + C\cos^2\nu,$$

où λ, μ, ν sont les inclinaisons respectives de l'axe OI aux trois axes principaux Ox, Oy, Oz.

2. Ce qu'on appelle le *moment d'inertie* d'un corps autour d'un axe quelconque, n'étant autre chose que la somme des produits de toutes les molécules dm de ce corps par les carrés de leurs distances r à cet axe, on peut toujours en représenter la valeur $\int r^2 dm$ par le simple produit $m.K^2$; en désignant par m la masse entière du corps, ou le nombre de toutes ses molécules supposées égales entre elles, et par K^2, le carré *moyen* entre tous les carrés des distances de ces molécules à l'axe dont il s'agit.

Le moment d'inertie du corps étant ainsi représenté par mK^2, c'est-à-dire comme le serait celui d'un point chargé de toute la masse et placé à une certaine distance K de l'axe que l'on considère, il serait très-naturel de nommer cette ligne K le *bras de levier* de l'inertie, ou simplement le *bras de l'inertie,* autour de cet axe : et c'est ce que nous ferons désormais pour simplifier le discours, où l'on aura soin de se rappeler que cette ligne, nommée le *bras de l'inertie, n'est autre chose que le côté du carré moyen entre les carrés des distances de toutes les molécules égales du corps à l'axe que l'on considère.*

Ainsi, au lieu des lettres A, B, C qu'on emploie d'ordinaire pour désigner les trois moments d'inertie autour des axes principaux, je prendrai les expressions

$$m\alpha^2,\quad m\beta^2,\quad m\gamma^2;$$

m étant la masse du corps, et les lignes α, β, γ les trois *bras* respectifs de l'inertie de ce corps autour des mêmes axes.

De l'ellipsoïde central des corps.

3. Dans le problème qui nous occupe, et où l'on suppose le corps libre de toute action étrangère, il suffit de connaître le point qui fait le centre de la rotation, les directions des trois axes principaux, et les trois bras de l'inertie du corps autour de ces axes. Le mouvement du corps, quelle que soit sa figure, ne dépend exactement que de ces données, et l'on peut faire abstraction de tout le reste.

Mais pour avoir sous les yeux une figure symétrique où l'on voie clairement toutes ces données du problème, j'imagine qu'autour du point O comme centre, et sur les droites Ox, Oy, Oz comme axes principaux, on décrive un ellipsoïde dont l'équation soit

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 = \mathrm{R}^4 = \textit{constante},$$

R étant une ligne quelconque qu'on pourra prendre à volonté.

Si l'on nomme a, b, c les demi-axes, ou *rayons principaux*, de cet ellipsoïde, de sorte que son équation prenne la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

on aura, pour les valeurs de a, b, c,

$$a = \frac{\mathrm{R}^2}{\alpha};\quad b = \frac{\mathrm{R}^2}{\beta},\quad c = \frac{\mathrm{R}^2}{\gamma}:$$

d'où l'on voit que les trois *axes principaux* de cet ellipsoïde sont *réciproques* aux trois *bras de l'inertie* du corps autour des mêmes

axes. Or, ce qui est très-remarquable, c'est que la même propriété s'étend à tous les diamètres, je veux dire que, dans cet ellipsoïde, un diamètre quelconque est réciproque au bras de l'inertie du corps autour de ce diamètre; et *vice versâ*. Ainsi, de même que le produit $m\frac{\mathrm{R}^4}{a^2}$ exprime le moment d'inertie du corps autour de l'axe principal dont la demi-longueur est a, le produit $m\frac{\mathrm{R}^4}{\delta^2}$ exprime le moment d'inertie autour d'un diamètre quelconque dont la demi-longueur est δ.

Soient, en effet, x', y', z' les trois coordonnées de l'un des bouts de ce diamètre; les fractions $\frac{x'}{\delta}$, $\frac{y'}{\delta}$, $\frac{z'}{\delta}$ seront les cosinus de ses inclinaisons aux trois axes principaux. Or, en désignant par $m\delta^2$ le moment d'inertie du corps autour de ce diamètre, on a, par la formule citée (n° **1**),

$$m\delta^2 = m\frac{\mathrm{R}^4}{a^2}\cdot\frac{x'^2}{\delta^2} + m\frac{\mathrm{R}^4}{b^2}\cdot\frac{y'^2}{\delta^2} + m\frac{\mathrm{R}^4}{c^2}\cdot\frac{z'^2}{\delta^2};$$

d'où l'on tire $\left(\text{à cause de } \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1\right)$,

$$m\delta^2 = m\frac{\mathrm{R}^4}{\delta^2}\quad \text{ou}\quad \delta = \frac{\mathrm{R}^2}{\delta};$$

ce qu'il fallait démontrer.

4. L'ellipsoïde que je viens de définir jouit donc de cette propriété remarquable, qu'autour d'un quelconque de ses diamètres, le moment d'inertie du corps est réciproque au carré de ce diamètre : et c'est cet ellipsoïde, dont la considération va jeter le plus grand jour sur la théorie de la rotation des corps, que je nommerai désormais l'*ellipsoïde central.*

Quelles que soient la figure et la constitution du corps dont on étudie le mouvement, on va donc ici en faire entièrement abstraction, pour ne plus voir que celle de cet ellipsoïde central qu'on vient de lui inscrire, et qui a ce triple avantage de mettre à la fois sous nos yeux le *centre* et les *axes principaux* du corps; de nous donner tous les *moments d'inertie* qu'on pourrait avoir à considérer, en montrant chacun d'eux, autour d'un diamètre quelconque, comme exprimé par une même fonction simple de la longueur de ce diamètre; et enfin de nous offrir, comme on le verra plus loin, l'expression la plus claire et la plus facile du théorème relatif à la position que prend l'axe instantané par rapport au plan du couple d'impulsion qui lui donne naissance.

La grandeur absolue de cet ellipsoïde n'est pas déterminée : car si les *bras de l'inertie* α, β, γ sont toujours donnés de longueur pour chaque corps, les *lignes réciproques* a, b, c ne sont ici données que de proportion, puisqu'elles dépendent de la ligne R qu'on voudra choisir. Ce qu'il y aurait de plus simple serait de la prendre égale à l'unité de ligne, et de poser tout de suite $R = 1$; car, dans nos équations, qui ne peuvent donner que des *rapports*, il est évident que R ne peut rester qu'en facteur commun à tous les termes, et, par conséquent, doit s'en aller d'elle-même comme si l'on avait fait tout d'abord $R = 1$. Mais je garde encore un moment cette indéterminée R pour l'homogénéité de nos expressions.

5. Cela posé, considérons un corps qui a reçu des impulsions quelconques que nous supposerons sur-le-champ réduites à une seule P appliquée au centre O, et à un seul couple G.

Si le corps est *forcé* de tourner sur un *point fixe*, on prendra ce point pour le centre O ; si le corps est libre, on prendra le point O au centre de gravité du corps. Dans le premier cas, la force P sera immédiatement détruite par la résistance du point fixe, et il ne restera que l'effet du couple G à considérer. Dans le second cas, la force P appliquée au centre de gravité O ne produisant sur le corps qu'un pur mouvement de translation, toute la difficulté se réduira de même à trouver le mouvement de rotation qui provient du couple donné G. Voyons donc quelle est cette rotation au premier instant.

De la rotation du corps au premier instant.

Soit menée, par le centre O, une ligne G qui représente à la fois l'axe et la grandeur du couple appliqué. Si l'on projette cette ligne G sur les trois axes principaux du corps, les trois projections respectives L, M, N représenteront, pour leurs axes et pour leurs grandeurs, les trois couples dans lesquels se décompose le couple G autour des

mêmes axes. Or, chacun de ces couples étant perpendiculaire sur un *axe principal*, on a démontré que ce couple, s'il agissait seul, ferait tourner le corps sur cet axe lui-même, et avec une vitesse angulaire mesurée par la grandeur de ce couple divisée par le *moment d'inertie* du corps autour de cet axe principal. Les trois couples L, M, N tendent donc à faire tourner autour des trois axes principaux Ox, Oy, Oz avec des vitesses angulaires respectives p, q, r proportionnelles aux grandeurs L, M, N de ces couples et réciproques aux trois moments principaux d'inertie $m\frac{R^4}{a^2}$, $m\frac{R^4}{b^2}$, $m\frac{R^4}{c^2}$; de sorte qu'on a

$$p = \frac{La^2}{mR^4}, \quad q = \frac{Mb^2}{mR^4}, \quad r = \frac{Nc^2}{mR^4}.$$

Or ces trois rotations p, q, r se composent en une seule θ représentée, pour son axe et pour sa grandeur, par la diagonale du rhomboïde rectangle construit sur les trois lignes qui représenteraient à la fois les axes et les grandeurs de ces trois rotations p, q, r.

6. Donc, au premier instant, le couple d'impulsion G tend à faire tourner le corps avec une vitesse angulaire θ exprimée par

$$\theta = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2},$$

et autour d'un axe dont les inclinaisons respectives aux trois axes principaux du corps ont pour cosinus

$$\frac{p}{\theta}, \quad \frac{q}{\theta}, \quad \frac{r}{\theta}.$$

Ainsi, en mettant dans ces expressions, au lieu de p, q, r leurs valeurs tirées des trois équations précédentes, on aura par les données L, M, N, l'axe et la grandeur de la rotation θ à laquelle le couple G donne naissance au premier instant, comme on l'a vu (1re partie, n° **47**).

7. Réciproquement, si l'on considère un corps qui tourne actuellement autour d'un axe avec une vitesse donnée θ, et qu'on cherche l'axe et la grandeur du couple inconnu G qui, appliqué au corps en repos, serait capable d'y produire la rotation actuelle qui l'anime, on décomposera cette rotation θ en trois autres p, q, r autour des trois axes principaux du corps; et les mêmes équations précédentes, mais où l'on regarde maintenant p, q, r comme données, feront connaître les valeurs L, M, N des trois couples qui tendraient à produire ces trois rotations respectives : d'où il viendra, pour la grandeur du couple G qui produit la rotation donnée θ,

$$G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2},$$

et, pour les trois cosinus de l'inclinaison de son axe aux trois axes du corps,

$$\frac{L}{G}, \quad \frac{M}{G}, \quad \frac{N}{G}.$$

8. Les rotations p, q, r autour des trois axes principaux du corps, étant en raison directe des couples L, M, N qui les produisent, et en raison inverse des moments d'inertie du corps autour des mêmes axes, et ces moments d'inertie étant en général inégaux, on voit que p, q, r ne sont pas proportionnelles à L, M, N, et que le rhomboïde rectangle où se composent les rotations n'est pas semblable au rhomboïde où se composent les couples : de sorte que les deux diagonales ont des directions différentes; et qu'ainsi l'axe instantané de la rotation n'est pas, en général, l'axe du couple qui la produit. Ces deux axes ne se confondent que dans le cas où l'axe du couple appliqué se trouve être un des axes principaux du corps. Dans tout autre cas, l'axe instantané est incliné à l'axe du couple, et il résulte des expressions précédentes qu'en désignant par i l'inclinaison mutuelle de ces deux axes, on a, par la formule connue,

$$\cos i = \frac{Lp + Mq + Nr}{G\theta}.$$

Mais voici, par la considération de notre *ellipsoïde central*, une expression bien plus claire de ce qui regarde la position relative du couple et de l'axe instantané dans l'intérieur du corps.

Expression nouvelle des théorèmes qui précèdent.

9. Considérons le point I où l'axe instantané va rencontrer la surface de l'ellipsoïde central, lequel point marque sur cette surface ce que nous nommerons désormais le *pôle instantané* de la rotation.

Si l'on désigne par x', y', z' les coordonnées de ce pôle I, on aura pour le plan qui touche en I l'ellipsoïde, ou plutôt, pour le plan diamétral parallèle à ce plan tangent, l'équation

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 0.$$

Or, la direction de l'axe instantané OI n'étant autre chose que celle de la diagonale du rhomboïde rectangle construit sur les trois lignes qui représentent p, q, r, il est évident que les coordonnées x', y', z' du point I sont proportionnelles à p, q, r. Mais celles-ci, comme on l'a vu plus haut (nº 5), sont proportionnelles à La^2, Mb^2, Nc^2 : donc on peut mettre, à la place de x', y', z', ces trois dernières quantités ; et il vient, pour l'équation de ce plan parallèle au plan tangent,

$$Lx + My + Nz = 0.$$

Or il est évident que cette équation n'est autre chose que celle d'un plan perpendiculaire à la ligne G dont les trois projections sur les axes sont L, M, N; et, par conséquent, c'est l'équation même du plan du couple.

Donc *l'axe instantané de la rotation due à un couple n'est autre chose que le diamètre conjugué au plan de ce couple dans l'ellipsoïde central du corps que l'on considère.*

Remarque.

10. Nous sommes arrivés à ce théorème par la considération de cet ellipsoïde central que j'ai d'abord défini et bien fait connaître : mais cette marche synthétique, quoique assez favorable à l'exposition, pourrait sembler indirecte, en ce qu'on ne voit pas bien ce qui a pu nous donner l'idée de cet ellipsoïde. Je veux donc, en passant, faire remarquer qu'on peut aussi trouver le théorème d'une manière directe, ce qui mène alors à la considération de notre ellipsoïde central; et je dirai même que c'est par cette voie que j'en ai eu la première idée.

En effet, si l'on considère le couple G dont les trois composants autour des axes sont désignés, comme ci-dessus, par L, M, N, il est évident que l'équation du plan de ce couple est

$$Lx + My + Nz = 0;$$

et que, par conséquent, si l'on met au lieu de L, M, N leurs valeurs Ap, Aq, Cr, cette équation devient

$$Apx + Bqy + Crz = 0.$$

Or, par la théorie des plans tangents, il est clair que cette équation est celle d'un plan parallèle à celui qui toucherait la surface représentée par l'équation

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = F^2 = \textit{constante},$$

au point dont les trois coordonnées x', y', z' seraient proportionnelles à p, q, r.

Mais la surface dont il s'agit est évidemment celle d'un ellipsoïde aux trois axes respectifs $F : \sqrt{A}$, $F : \sqrt{B}$, $F : \sqrt{C}$, et, par conséquent, de longueurs réciproques aux racines carrées des trois moments principaux d'inertie A, B, C; ou, ce qui revient au même, réciproques aux trois *bras* α, β, γ de l'inertie du corps autour des mêmes axes.

Donc le plan du couple n'est autre chose que le plan *conjugué* à la direction de l'axe instantané dans cet ellipsoïde, et réciproquement. D'où l'on voit qu'en dynamique, la considération de l'ellipsoïde central des corps est aussi naturelle que celle du centre de gravité.

11. Comme un couple peut toujours être transporté dans un plan quelconque parallèle au sien sans que son effet sur le corps en soit changé, on peut toujours supposer que le plan du couple appliqué, au lieu d'être conduit par le centre, est mené tangentiellement à la surface de l'ellipsoïde central; et alors on peut dire :

Que *si un corps est frappé par un couple dirigé dans un plan quelconque tangent à l'ellipsoïde central, le pôle instantané de la rotation à laquelle ce couple donne naissance, est précisément au point de contact.*

Et réciproquement, *si le corps tourne, on peut dire que le couple actuel qui l'anime est dans le plan tangent au pôle;* ce qui nous

paraît un des théorèmes les plus simples et les plus élégants qu'on puisse offrir en dynamique sur la théorie si difficile et si obscure de la rotation des corps.

On voit toutes les conséquences claires et faciles qui découlent de cette lumineuse proposition : mais je ne veux point ici m'y arrêter; il faut que j'avance, et que, par le seul raisonnement, j'arrive de suite à la solution complète du problème qu'on se propose : car il ne s'agit pas seulement de déterminer la rotation du corps au premier instant, mais il faut voir comment cette rotation change d'un instant à l'autre, et peindre, pour ainsi dire, le mouvement du corps dans toute la suite de son cours.

De la rotation du corps dans toute la suite du temps.

12. Et d'abord il est bien clair que cet axe OI, qu'on appelle *instantané*, n'est, en effet, immobile qu'un instant : car de la rotation même θ autour de cet axe, il naît, pour toutes les molécules égales du corps, des forces centrifuges toutes proportionnelles aux rayons des cercles décrits, et dirigées suivant ces rayons. Or l'axe OI n'étant point, par hypothèse, un des axes principaux du corps, ces forces centrifuges ne se font point équilibre entre elles : étant transportées parallèlement à elles-mêmes au centre O, elles donnent bien une résultante qui est nulle d'elle-même si ce point est le centre de gravité du corps, ou qui est détruite si ce centre O est un point fixe; mais leur couple résultant g n'est pas nul. Il provient donc de la rotation même du corps un couple accélérateur g dont l'effort gdt pour un instant dt, imprime à ce corps une rotation infiniment petite γdt, laquelle se compose avec la rotation actuelle θ, et fait varier l'axe et la grandeur de cette rotation.

13. Pour étudier le mouvement du corps, il faut donc commencer par chercher ce couple accélérateur qui naît des forces centrifuges dues à la rotation θ autour de l'axe instantané OI. Or on a démontré que l'axe de ce couple g est perpendiculaire à la fois à l'axe instantané et à l'axe du couple G qui produit la rotation actuelle θ; et que la grandeur de ce couple g est exprimée par $G\theta \sin i$, i étant l'inclinaison mutuelle des deux axes G et θ; théorème qu'on peut énoncer de la manière suivante :

Si l'on prend deux lignes dont l'une représente l'axe et la grandeur du couple d'impulsion, et l'autre l'axe et la grandeur de la rotation instantanée, le couple accélérateur dû aux forces centrifuges est toujours représenté, et pour son plan, et pour sa quantité, par la surface du parallélogramme construit sur les deux lignes que l'on considère.

14. De ce simple théorème on pourrait conclure le principe de la *conservation* du couple d'impulsion G dans toute la suite du mouvement du corps; et réciproquement, de ce principe on pourrait tirer la démonstration du théorème, comme on l'a vu (1re partie, chap. II, art. V).

Nous pourrions encore montrer en passant que ce théorème sur les forces centrifuges, si l'on veut le traduire en analyse, donne sur-le-champ les trois équations si élégantes qu'Euler a trouvées le premier pour la rotation des corps, mais qu'on ne démontre d'ordinaire que par de longs circuits de calculs et de trigonométrie. Mais nous reviendrons plus tard sur ces expressions analytiques : il faut ici reprendre et suivre le fil de notre raisonnement.

15. On vient de voir que le couple g, qui naît des forces centrifuges, est toujours situé dans le plan GOI de l'axe du couple d'impulsion G et de l'axe instantané de la rotation θ. Donc, par le théorème démontré plus haut (n° **9**), l'axe sur lequel ce couple g tend à faire tourner le corps n'est autre chose que le diamètre $O\gamma$ conjugué au plan GOI dans l'*ellipsoïde central*. Mais le diamètre conjugué à ce plan doit l'être à toutes les droites menées par son pied O dans ce plan, et, par conséquent, il est conjugué à l'axe OI : et de cela seul il résulte que ce diamètre $O\gamma$ est situé dans le plan même du couple d'impulsion G; car, ce plan étant conjugué à l'axe instantané OI (n° **10**), il est le lieu de toutes les droites qui peuvent être conjuguées à OI.

Donc *l'axe $O\gamma$ de la rotation γ due au couple accélérateur g qui provient des forces centrifuges, est toujours situé dans le plan même du couple d'impulsion* G *dont le corps est actuellement animé.*

16. Donc, si l'on prend deux lignes, l'une θ qui représente la rotation actuelle, l'autre $O\gamma' = \gamma dt$ qui représente la rotation que le couple g fait naître en un instant dt, et que sur ces deux lignes on achève le parallélogramme, afin d'avoir dans la diagonale θ' la ligne qui représente l'axe et la grandeur de la rotation au bout d'un instant dt, on voit que l'extrémité de cette diagonale θ' est, au-dessus du plan du couple G, à la même hauteur que l'extrémité du côté θ; puisque le côté $O\gamma'$, étant dans le plan même de ce couple, le côté opposé du parallélogramme est parallèle à ce plan. Mais la hauteur de l'extrémité de la ligne θ, au-dessus du plan du couple, est évidemment exprimée par $\theta \cos i$: donc on a cette équation remarquable

$$\theta \cos i = \textit{constante},$$

c'est-à-dire que *la vitesse angulaire θ estimée autour de l'axe fixe du couple d'impulsion reste la même dans tout le cours du mouvement.*

17. De cette même équation résulte encore ce qu'on appelle le principe *des forces vives*. Car si $\theta \cos i$ est constante, comme G est aussi constant, on a

$$G\theta \cos i = \textit{constante}.$$

Or le facteur $G \cos i$, qui n'est autre chose que le couple G estimé autour de OI, est évidemment égal à $\theta.\mathrm{I}$, en désignant par I le moment d'inertie du corps autour de l'axe instantané OI. On a donc

$$G\theta \cos i = \theta^2.\mathrm{I} = \textit{constante}.$$

Mais I désignant, par hypothèse, la somme des produits de toutes les molécules du corps par les carrés de leurs distances à l'axe de rotation, il est clair que $\theta^2.\mathrm{I}$ exprime la somme des produits de ces molécules par *les carrés de leurs vitesses ;* et comme chacun de ces produits se nomme la *force vive* de la molécule que l'on considère, on peut dire que *la somme des forces vives de toutes les molécules du corps demeure constante dans tout le cours de la rotation :* ce qui est ici, non pas un nouveau principe, mais un simple corollaire du principe de la *Conservation des couples,* ou *des aires,* quand ce principe est complétement exprimé ; c'est-à-dire, quand on exprime que G est invariable, non-seulement de *grandeur,* mais aussi de *position* dans l'espace absolu.

Je fais en passant cette remarque parce qu'elle intéresse la doctrine, et que, dans la théorie du mouvement d'un corps ou système *invariable de figure*, ce serait une faute de dire, comme on le fait quelquefois, que telle ou telle vérité dynamique se démontre par la *combinaison* du principe des aires avec le principe des forces vives : car, ce second principe étant ici essentiellement renfermé dans le premier, cette locution serait une preuve qu'on n'entend bien ni l'un ni l'autre. Mais poursuivons.

18. Si l'on nomme u le rayon vecteur OI qui va du centre au pôle instantané I sur la surface de l'ellipsoïde central, le moment d'inertie du corps autour de OI sera exprimé, comme on l'a vu, par $m\frac{R^4}{u^2}$. Mettant donc cette expression au lieu de I dans l'équation qui précède, on aura

$$m\,\frac{R^4}{u^2}\,\theta^2 = \textit{constante}:$$

constante qu'on peut mettre sous la forme $\frac{mR^4}{k^2}$, en désignant par K une ligne constante. Et de là on tire l'équation

$$\frac{\theta}{u} = \frac{1}{k}.$$

D'où résulte ce nouveau théorème, que *dans tout le cours du mouvement la vitesse angulaire θ de la rotation est proportionnelle à la longueur même du rayon vecteur qui va du centre au pôle instantané sur la surface de l'ellipsoïde central.*

19. Donc, comme on a trouvé plus haut que $\theta \cos i$ est constante, on peut conclure que $u \cos i$ est aussi constante, et que, par conséquent, la hauteur $h = u \cos i$, du pôle I au-dessus du plan diamétral du couple G, est constante dans tout le cours de la rotation : ou bien, si l'on prend, comme il est permis, pour le plan du couple G, le plan parallèle *tangent* au pôle, on peut dire que *le plan du couple d'impulsion reste toujours à la même distance h du centre* O *de l'ellipsoïde.*

20. Mais ce centre est immobile dans l'espace absolu, et le plan

du couple reste toujours parallèle à lui-même : donc *ce plan, qui touche sans cesse l'ellipsoïde central au pôle instantané de rotation, est toujours un seul et même plan fixe dans l'espace absolu.*

Donc, le mouvement du corps, ou, ce qui est la même chose, le mouvement de l'ellipsoïde central est de telle nature, que cet ellipsoïde reste en contact avec un même plan fixe dans l'espace absolu ; qu'il tourne à chaque instant sur le rayon vecteur qui va du centre au point de contact, et qu'il tourne avec une vitesse angulaire proportionnelle à la longueur même de ce rayon.

21. Cet ellipsoïde ne fait donc que rouler, sans *glisser*, sur le plan fixe que l'on considère : car, comme tout son mouvement consiste à tourner pendant un instant sur la ligne menée du centre au point de contact, l'ellipsoïde amène au bout de cet instant un nouveau point de sa surface en contact avec ce plan; et ce nouveau point, qui devient le pôle de la rotation pour l'instant suivant, reste à son tour immobile pendant cet instant, et ainsi de suite à l'infini; d'où il est manifeste qu'aucun de ces points par lesquels l'ellipsoïde vient se mettre en contact avec le plan fixe, ne peut jamais glisser sur ce même plan.

22. Telle est donc enfin l'idée claire et nouvelle qu'on peut se former du mouvement si compliqué et si obscur d'un corps de figure quelconque qui tourne librement, soit autour de son centre de gravité, soit autour d'un point fixe quelconque, en vertu d'un couple dont il a reçu primitivement l'impulsion dans tel plan donné qu'on voudra :

Considérez le centre de gravité du corps, ou, si le corps n'est pas libre, le point fixe qui fait le centre de sa rotation. Autour de ce point, et sur les directions des trois axes principaux d'inertie qui s'y rapportent, imaginez un ellipsoïde construit avec trois axes de longueurs réciproques aux BRAS DE L'INERTIE *du corps autour des mêmes axes ; et faites maintenant abstraction de la figure du corps pour n'y plus voir que celle de cet ellipsoïde que j'ai nommé l'*ELLIPSOÏDE CENTRAL.

Si vous supposez que cet ellipsoïde, dont le centre est retenu immobile au même point de l'espace, roule sans glisser sur un plan fixe avec *lequel on l'a mis en contact, vous aurez la représentation exacte du mouvement géométrique que suit le corps en vertu du couple qui l'a frappé dans le plan fixe que l'on considère : et si vous ajoutez que la vitesse angulaire avec laquelle il tourne à chaque instant sur le rayon mené du centre au point de contact, est proportionnelle à la longueur même de ce rayon, vous aurez à la fois le mouvement géométrique et dynamique de ce corps ; c'est-à-dire que vous verrez avec clarté, non-seulement la suite continue des lieux que le corps doit venir occuper, mais encore la proportion des temps qu'il met à les parcourir ; ce qui est l'idée complète du mouvement du corps considéré dans le cours infini de sa rotation.*

Réflexion générale.

23. Nous voilà donc conduits par le seul raisonnement à une idée claire que les géomètres n'ont pu tirer des formules de l'analyse. C'est un nouvel exemple qui montre l'avantage de cette méthode simple et naturelle de considérer les choses en elles-mêmes, et sans les perdre de vue dans le cours du raisonnement. Car, si l'on se contente, comme on le fait d'ordinaire, de traduire les problèmes en équations, et qu'on s'en rapporte ensuite aux transformations du calcul pour mettre au jour la solution qu'on a en vue, on trouvera le plus souvent que cette solution est encore plus cachée dans ces symboles analytiques, qu'elle ne l'était dans la nature même de la question proposée. Ce n'est donc point dans le calcul que réside cet art qui nous fait découvrir ; mais dans cette considération attentive des choses, où l'esprit cherche avant tout à s'en faire une idée, en essayant, par l'analyse proprement dite, de les décomposer en d'autres plus simples, afin de les revoir ensuite comme si elles étaient formées par la réunion de ces choses simples dont il a une pleine connaissance. Ce n'est pas que les choses soient composées de cette manière, mais c'est notre seule manière de les voir, de nous en faire une idée, et partant de les connaître. Ainsi notre vraie méthode n'est que cet heureux mélange de l'analyse et de la synthèse, où le calcul n'est employé que comme un instrument. Instrument précieux et nécessaire sans doute, parce qu'il assure et facilite notre marche ; mais qui n'a par lui-même aucune vertu propre ; qui ne dirige point l'esprit, mais que l'esprit doit diriger, comme tout autre instrument.

Ce qui a pu faire illusion à quelques esprits sur cette espèce de force qu'ils supposent aux formules de l'analyse, c'est qu'on en retire, avec assez de facilité, des vérités déjà connues et qu'on y a, pour ainsi dire, soi-même introduites, et il semble alors que l'analyse nous donne ce qu'elle ne fait que nous rendre dans un autre langage. Quand un théorème est connu, on n'a qu'à l'exprimer par des équations ; si le théorème est vrai, chacune d'elles ne peut manquer d'être exacte, aussi bien que les transformées qu'on en peut déduire : et si l'on arrive ainsi à quelque formule évidente, ou bien établie d'ailleurs, on n'a qu'à prendre cette expression, comme un point de départ, à revenir sur ses pas, et le calcul seul paraît avoir conduit comme de lui-même au théorème dont il s'agit. Mais c'est en cela que le lecteur est trompé. Ainsi, pour prendre notre exemple dans la question même qui fait l'objet de ce Mémoire, il est bien clair qu'aujourd'hui rien ne serait plus aisé que de retrouver nos théorèmes dans les expressions analytiques d'Euler ou de Lagrange, et même de les en dégager avec un air de facilité qui ferait croire que ces formules devaient les produire spontanément. Cependant, comme ces idées ont échappé jusqu'ici à tant de géomètres qui ont transformé ces formules de tant de manières, il faut convenir que cette analyse ne les donnait point, puisque, pour les y voir, il aura fallu attendre qu'un autre y parvînt par une voie toute différente.

Nous aurions bien d'autres réflexions à faire, et de plus grands exemples à produire, si nous voulions montrer, d'une part, tout ce que l'esprit doit de lumière à cette méthode naturelle, telle que je l'ai définie plus haut et qui constitue notre véritable analyse, et de l'autre, le peu de vérités nouvelles qu'on a su tirer de ces formules analytiques où l'on croit enfermer une question, et quelquefois même une science tout entière. Sans doute, la science y est contenue, comme elle le serait dans tout autre principe énoncé en termes généraux ; mais la difficulté reste de l'en faire sortir : et cette difficulté n'en devient-elle pas plus grande? Et, par exemple, ne faut-il pas bien connaître à la fois et la mécanique et les artifices de l'analyse, pour tirer de la seule formule générale des *vitesses virtuelles*, je ne dis pas quelque nouveau théorème (ce dont je ne vois guère d'exemples), mais seulement les propositions particulières qui nous sont déjà le mieux connues? La traduction n'est-elle pas souvent plus difficile que le texte lui-même, je veux dire que la considération immédiate des choses que l'on veut étudier? L'illustre auteur qui a voulu transformer la mécanique en une question de calcul, a sans doute rempli son objet avec toute la clarté et toute l'élégance qu'on en pouvait attendre. Mais si la véritable analyse brille quelque part dans la *Mécanique analytique*, j'oserai dire que c'est bien moins dans ces calculs que l'auteur range avec tant d'ordre et de symétrie, que dans ces lumineux rapprochements qu'il indique entre les méthodes, et surtout dans ces admirables préfaces qu'il a placées à la tête des différents livres de son ouvrage, où il examine et discute les principes fondamentaux de la science, et fait l'histoire instructive du mouvement de l'esprit humain dans cette suite délicate d'idées fines et de solutions ingénieuses qui ont peu à peu formé la science de la Mécanique. C'est par là que ce bel ouvrage pourra servir aux progrès ultérieurs de l'esprit, en lui montrant la route qu'il a suivie, et qui est encore la route où il doit continuer de marcher. Car, encore une fois, gardons-nous de croire qu'une science soit faite quand on l'a réduite à des formules analytiques. Rien ne nous dispense d'étudier les choses en elles-mêmes, et de nous bien rendre compte des idées qui font l'objet de nos spéculations. N'oublions point que les résultats de nos calculs ont presque toujours besoin d'être vérifiés, d'un autre côté, par quelque raisonnement simple, ou par l'expérience. Que si le calcul seul peut quelquefois nous offrir une vérité nouvelle, il ne faut pas croire que, sur ce point même, l'esprit n'ait plus rien à faire : mais, au contraire, il faut songer que, cette vérité étant indépendante des méthodes ou des artifices qui ont pu nous y conduire, il existe certainement quelque démonstration simple qui pourrait la porter à l'évidence; ce qui doit être le grand objet et le dernier résultat de la science mathématique.

Qu'on me pardonne ces réflexions que je fais, j'ose le dire, dans l'unique intérêt de la science. Je connais le caractère propre et distinctif de l'analyse algébrique, et je pourrais même dire avec précision en quoi cet art a pu perfectionner la logique ordinaire du discours : je sais tout ce que les bons esprits doivent au calcul; mais je tâche d'éclairer ceux qui se trompent sur la nature de cet instrument, et en même temps, de prévenir l'abus que d'autres en peuvent faire en profitant de cette illusion même. Car, sitôt qu'un auteur ingénieux a su parvenir à quelque vérité nouvelle, n'est-il pas à craindre que le calculateur le plus stérile ne s'empresse d'aller vite la rechercher dans ses formules, de la découvrir une seconde fois, et à sa manière, qu'il dit être la bonne et la véritable; de telle sorte qu'on ne s'en croie plus redevable qu'à son analyse, et que l'auteur lui-même, quelquefois peu exercé, ou même étranger à ce langage et à ces symboles sous lesquels on lui dérobe ses idées, ose à peine réclamer ce qui lui appartient, et se retire presque confus, comme s'il avait mal inventé ce qu'il a si bien découvert? Singulier artifice, que je n'ai pas besoin de caractériser davantage, mais qu'il est bon de signaler comme un des plus nuisibles aux progrès des sciences, parce qu'il est sans contredit un des plus propres à décourager les inventeurs!

Mais je n'étendrai pas plus loin ces réflexions générales; et si le peu que j'ai dit est assez sensible par les exemples qui précèdent, on le verra se confirmer encore par ceux qui pourront suivre.

CHAPITRE II.

DÉVELOPPEMENT DE LA SOLUTION.

Dans cette image si claire que nous avons donnée de la rotation des corps, on voit sur-le-champ toutes les circonstances et toutes les variétés que ce mouvement peut offrir, et l'on est conduit, comme par la main, aux opérations et aux calculs qu'il faut faire, si l'on veut en mesurer toutes les différentes affections.

24. Et d'abord, cette suite de points par lesquels l'ellipsoïde central du corps vient se mettre en contact avec le plan fixe du couple d'impulsion, étant considérée sur la surface de l'ellipsoïde, y marque la route du pôle instantané dans l'intérieur du corps; et ces mêmes points étant considérés sur le plan fixe, y marquent sa route dans l'espace absolu. On peut donc déterminer sur-le-champ ces deux lignes courbes; et, par conséquent, les considérer comme les bases de deux surfaces coniques de même sommet, dont l'une, mobile avec le corps, roulant sur l'autre qui est fixe dans l'espace absolu, donnerait à ce corps le mouvement précis qui l'anime.

I.

De la courbe décrite par le pôle instantané sur la surface de l'ellipsoïde central.

25. Pour trouver cette courbe, qui est à double courbure, et que je désignerai par s, il n'y a donc qu'à chercher la suite des points par lesquels un ellipsoïde, aux *rayons principaux* a, b, c, serait touché par un plan qui resterait toujours à une même distance donnée h du centre de cet ellipsoïde: ou, ce qui est la même chose, la suite des points de contact d'un plan qui se mouvrait en touchant à la fois cet ellipsoïde, et une sphère concentrique au rayon donné h. Or il est clair que cette courbe s est un orbe fermé, à double courbure, espèce de *roue* elliptique, dont l'axe ou l'essieu est, ou le *rayon majeur* a de l'ellipsoïde central, ou le *rayon mineur* c, selon que le rayon h de la sphère est donné plus grand ou plus petit que le *rayon moyen* b de cet ellipsoïde.

26. C'est, au reste, ce qu'on peut voir par le calcul le plus simple, car l'équation de la surface de l'ellipsoïde étant

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

la distance du centre au plan tangent est exprimée par

$$1:\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}},$$

x, y, z désignant les coordonnées du point de contact. En égalant donc cette expression à la distance donnée h, on a cette seconde équation

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{1}{h^2},$$

d'où, en éliminant tour à tour, au moyen de la première, chacune

des trois coordonnées x, y, z, on tire les équations suivantes:

$$\frac{b^2-a^2}{b^4}y^2+\frac{c^2-a^2}{c^4}z^2=\frac{h^2-a^2}{h^2},$$

$$\frac{a^2-b^2}{a^4}x^2+\frac{c^2-b^2}{c^4}z^2=\frac{h^2-b^2}{h^2},$$

$$\frac{a^2-c^2}{a^4}x^2+\frac{b^2-c^2}{b^4}y^2=\frac{h^2-c^2}{h^2},$$

qui donnent les projections de la courbe sur les trois plans principaux.

Or, a, b, c étant toujours supposés rangés dans cet ordre de grandeur

$$a>b>c,$$

et h étant une ligne toujours intermédiaire entre les deux rayons extrêmes a et c, il est visible que si h est $> b$, la courbe s donne une ellipse sur le plan principal perpendiculaire au rayon *majeur* a; et que, si h est $< b$, elle donne une ellipse sur le plan perpendiculaire au rayon *mineur* c.

27. En général, on voit que cet orbe à double courbure se projette en une ellipse *entière* sur l'un des deux plans perpendiculaires aux axes *extrêmes* a et c de l'ellipsoïde central, en un *arc* d'ellipse sur l'autre plan; et toujours en un *arc d'hyperbole* sur le plan perpendiculaire à l'axe *moyen* b.

28. Dans le cas singulier de $h = b$, la courbe devient *plane;* c'est une ellipse dont le demi-petit axe est le rayon *moyen* b de l'ellipsoïde, et le demi-grand axe une ligne β dont la valeur est $\sqrt{a^2+c^2-\frac{a^2c^2}{b^2}}$.

29. Et enfin, dans les deux cas particuliers de $h = a$ et de $h = c$, la courbe se réduit à un point qui est ou le pôle A ou le pôle C de l'ellipsoïde central.

30. On pourrait remarquer que la courbe s est en quelque sorte *double;* car, tandis que le pôle instantané I décrit cette courbe s, il est évident que le pôle opposé I' en décrit une autre s' parfaitement égale dans l'autre partie de l'ellipsoïde; mais il suffit d'en considérer une seule.

31. On voit que cette courbe à double courbure a, comme une ellipse, quatre sommets principaux où elle est divisée en quatre parties égales et symétriques, et il est évident que ces sommets sont les quatre points où la courbe traverse les deux plans principaux conduits par l'axe qui lui sert comme d'essieu : c'est en ces points que le rayon vecteur OI atteint ses valeurs *maxima* ou *minima*, comme il est facile de le voir en cherchant le maximum de l'expression

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

où les variables x, y, z sont liées par les équations précédentes (1) et (2).

II.

De la courbe décrite par le pôle instantané dans l'espace absolu.

32. La courbe s que le pôle instantané I de la rotation trace à la surface de l'ellipsoïde central, étant ainsi déterminée, il est facile de trouver la courbe σ que le pôle instantané décrit sur le plan fixe. Car, en considérant l'orbe fermé s comme la base d'une surface conique dont le sommet est au centre O de l'ellipsoïde, il est clair que, pendant le mouvement du corps, ce cône tourne sans cesse autour de sa génératrice OI en appuyant le contour de sa base sur le plan fixe, et qu'ainsi ce contour s y trace en roulant la courbe plane σ que le pôle instantané décrit dans l'espace absolu. Les arcs infiniment petits $d\sigma$ de cette courbe plane sont donc parfaitement égaux aux arcs successifs ds de cette roue mobile s qui les produit : de sorte que si l'on a l'équation de celle-ci entre la longueur s de son arc et son rayon vecteur u, il suffit d'y changer s en σ pour avoir l'équation de la courbe σ entre son arc σ et le même rayon u émané du centre O de l'ellipsoïde.

33. Mais comme cette courbe σ est plane, si l'on aime mieux la rapporter à des rayons vecteurs v émanés d'un point pris dans le plan même de la courbe, on peut choisir, pour ce nouveau centre, le pied P de la perpendiculaire abaissée du centre O de l'ellipsoïde sur

le plan fixe que l'on considère; et alors il suffit de changer u en $\sqrt{h^2 + v^2}$ dans l'équation dont il s'agit.

34. Le rayon vecteur v de la courbe plane σ n'étant autre chose que la projection continuelle du rayon u de la roue s dont les éléments ds viennent s'appliquer l'un après l'autre sur le plan pour former les éléments égaux $d\sigma$ de la courbe plane σ, il est clair que le rayon v va, comme le rayon u, d'un *maximum* à un *minimum*; de ce *minimum* à un *maximum* suivant, parfaitement égal au premier; et ainsi de suite à l'infini : et cela par des intervalles ou longueurs d'arcs σ parfaitement égaux entre eux, et au quart de la génératrice s.

On voit donc que *la courbe σ décrite par le pôle instantané dans l'espace absolu, est une courbe plane régulièrement ondulée autour d'un même centre; c'est-à-dire une courbe formée par une suite d'ondes égales et régulières, dont les sommets sont équidistants, et qui serpente à l'infini entre deux cercles concentriques dont elle va toucher alternativement l'une et l'autre circonférence.*

35. Si l'angle au centre, qui répond à deux sommets consécutifs supérieurs ou inférieurs, de la courbe ondulée σ, est commensurable avec quatre angles droits, et qu'on désigne par n le plus petit nombre entier de cercles que cet angle ou ce secteur mesure, la courbe σ se fermera; et le pôle qui la décrit reprendra exactement sa première route après avoir fait n fois le tour entier de l'espace angulaire.

Mais, comme l'intervalle de deux sommets consécutifs de même nom ne répond qu'à une moitié de l'orbe mobile s, il est clair qu'il faut doubler ce nombre de révolutions si l'on veut que le pôle instantané se retrouve, non-seulement au même lieu dans l'espace absolu, mais encore au même lieu sur la surface de l'ellipsoïde central.

36. Si l'angle dont il s'agit n'est pas commensurable avec quatre angles droits, la courbe ondulée σ ira à l'infini sans pouvoir jamais se fermer; et le pôle instantané, qui reviendra toujours périodiquement au même lieu dans le corps, ne pourra jamais retomber en même temps au même lieu dans l'espace.

37. Telles sont, en général, les deux courbes décrites par le pôle instantané, l'une dans l'intérieur du corps, et l'autre dans l'espace absolu. Et quoique ces courbes soient de formes si différentes, comme c'est un seul et même point qui décrit à la fois l'une et l'autre, leurs équations prises entre le rayon vecteur émané du centre O, et la longueur de l'arc décrit, sont exactement une seule et même équation.

Le *cône roulant*, à la surface duquel la première courbe s sert de base, est simplement *un cône droit du second degré;* mais le *cône fixe* sur lequel il roule est un *cône transcendant* dont la surface ondule à l'infini autour de l'axe fixe du couple; c'est aussi une espèce de cône droit et circulaire, mais dont la surface serait, pour ainsi dire, *cannelée* suivant le contour régulièrement ondulé de la courbe σ qui lui sert de base.

III.

Des variétés que les deux courbes s et σ peuvent offrir dans certains cas particuliers.

38. Ces deux courbes ne dépendent, comme on voit, que de quatre données, savoir : les trois demi-axes ou *rayons principaux* a, b, c de l'ellipsoïde central, lesquels sont toujours donnés par la nature du corps; et ensuite la *hauteur* h du centre au-dessus du plan tangent du couple, laquelle est donnée par la direction du couple d'impulsion.

Les variétés que ces deux courbes peuvent offrir, pour un même corps, ne dépendent donc que des valeurs particulières qu'on peut donner à la ligne constante h.

Or cette ligne étant la distance du centre de l'ellipsoïde à l'un de ses plans *tangents*, est nécessairement *intermédiaire* entre le plus grand et le plus petit rayon de cet ellipsoïde; de sorte que les trois rayons principaux a, b, c étant, comme on l'a dit, rangés dans cet ordre de grandeur

$$a > b > c,$$

on ne peut avoir à distinguer que deux cas généraux, savoir, h compris entre a et b, et h entre b et c; ensuite deux cas particuliers, savoir, $h = a$, $h = c$; et enfin, un cas que je nommerai *singulier* et qui est celui de $h =$ *au rayon moyen* b.

Dans les deux cas généraux, les courbes s et σ sont celles qu'on vient de décrire.

Dans les deux cas particuliers de $h = a$, $h = c$, chacune d'elles se réduit à *un point* qui est, ou le pôle A, ou le pôle C de l'ellipsoïde; et le corps tourne uniformément autour de l'un ou de l'autre des deux axes principaux $2a$ ou $2c$, lequel axe demeure immobile dans l'espace absolu, aussi bien que celui du couple G avec lequel il se confond dans toute la suite du mouvement.

39. Mais dans le *cas singulier* de h égal au rayon *moyen* b de l'ellipsoïde central, la courbe s ne se réduit pas à un point; car, sur la surface de l'ellipsoïde, outre le pôle moyen B, où le plan tangent est à une distance $h = b$ du centre O, il y a une infinité d'autres points où le plan tangent peut se trouver à cette même distance b du centre de cet ellipsoïde, et la suite de ces points forme deux ellipses égales, dont les plans se croisent suivant l'*axe moyen* $2b$, et sont inclinés au plan principal (ab) d'un angle dont la tangente est $\pm \frac{c^2}{a^2}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$; de sorte que ces deux ellipses, qui ont, pour leur commun petit axe, la ligne $2b$, ont pour leur grand axe une ligne

$$2\beta = 2\sqrt{ac^2 + c^2 - \frac{a^2c^2}{b^2}};$$

c'est ce qui se voit sur-le-champ par les équations de l'orbe s, en y supposant $h = b$.

40. Dans ce cas singulier de $h = b$, la courbe σ est donc produite par le mouvement de l'une s de ces deux ellipses, dont on retiendrait le centre immobile en O, à une hauteur b au-dessus du plan fixe, et dont on ferait rouler la circonférence sur ce plan, avec lequel on l'aurait mise en contact. Or il est aisé de voir que, dans ce cas, la courbe σ décrite par le point de contact est une ligne *spirale* qui va en tournant autour du centre P, et s'en rapproche sans cesse, de plus près que tout ce qu'on voudra, comme d'un point asymptotique, sans pouvoir jamais l'atteindre. Cette spirale, considérée dans toute son étendue, est une courbe symétrique à gauche et à droite d'un certain point qui la divise en deux parties parfaitement égales. Car, en revenant sur ses pas, en faisant rouler l'ellipse en sens contraire, le rayon vecteur v revient en augmentant jusqu'à une certaine valeur

$$v = \sqrt{\beta^2 - b^2},$$

qui est son *maximum;* après quoi il diminue par les mêmes degrés, de sorte que son extrémité I décrit de l'autre côté une spirale parfaitement égale à la première, et qui fait comme la moitié de la courbe entière et continue σ dont il s'agit. Cette courbe a donc un *sommet,* à gauche et à droite duquel elle jette deux branches égales qui vont en sens contraires tourner en spirales autour d'un seul et même centre P; et quoique chacune de ses branches fasse un nombre infini de révolutions autour de ce centre sans jamais l'atteindre, la longueur totale de la courbe est *finie* et parfaitement égale à la demi-circonférence de l'ellipse roulante qui la produit.

Le pôle I, qui décrit cette spirale de longueur finie, ne peut jamais la parcourir dans toute son étendue : quelque près qu'on le suppose déjà du centre P, dont il s'approche, il lui faut encore un temps infini pour achever le petit arc qui reste à décrire, ou, pour parler exactement, il ne pourra jamais l'achever.

Dans ce cas singulier du mouvement des corps, le pôle instantané de la rotation est donc un point toujours nouveau, et dans le corps, et dans l'espace absolu; je veux dire que, dans le cours infini de la rotation, le pôle ne peut jamais revenir au même lieu, ni dans le corps ni dans l'espace, quoiqu'il ne décrive qu'une ligne finie, et dont la longueur serait tout au plus égale à la demi-circonférence de l'ellipse, en supposant le temps infini, non-seulement avant, mais encore après l'époque que l'on considère.

Tel est donc le mouvement du pôle quand on suppose $h = b$, c'est-à-dire quand le plan du couple appliqué touche l'ellipsoïde central en un point qui appartient à l'une ou à l'autre de ces deux ellipses singulières dont nous venons de parler.

41. Mais s'il arrivait que le plan touchât précisément au pôle moyen B où se croisent ces deux ellipses, le pôle I, qui se confondrait alors avec B et le centre fixe P, resterait parfaitement immobile, et le corps ne cesserait de tourner uniformément autour de l'axe

moyen OB, comme il ferait autour de l'axe majeur OA, ou de l'axe mineur OC, si le plan du couple était tangent au pôle A, ou au pôle C de l'ellipsoïde. En effet, il n'y aurait aucune raison pour que le pôle I, qui ne peut décrire à la surface que l'une des deux ellipses dont on vient de parler, et qui tombe en ce moment à l'extrémité B de leur axe commun, décrivît l'une plutôt que l'autre de ces deux ellipses parfaitement égales et symétriques; d'où l'on voit qu'à la rigueur l'axe *moyen* de l'ellipsoïde central est, comme les deux autres, un axe permanent de rotation.

42. Mais il y a cette différence, c'est que, autour de cet axe moyen, la rotation n'a point de *stabilité :* je veux dire que, pour peu que le pôle I, en vertu d'un petit couple étranger appliqué au corps, vienne à s'écarter du pôle moyen B, il tendra à s'en écarter davantage; s'en allant alors décrire, à la surface, un orbe elliptique s, soit autour du grand axe, soit autour du petit axe, selon que ce déplacement accidentel du pôle aura fait augmenter ou diminuer la distance h du plan tangent: et si le déplacement est tel, que h n'ait pas varié de grandeur, le pôle ira décrire l'une ou l'autre de ces deux ellipses singulières que nous avons considérées.

43. Il n'y a qu'un seul cas où le pôle I, étant écarté du pôle moyen B de l'ellipsoïde, tendrait à y revenir: c'est le cas où le pôle I serait porté sur la circonférence de l'une de ces deux ellipses du côté précis où le *sens* de la rotation tend à le ramener vers B.

S'il est porté sur la même ellipse, mais de l'autre côté de son sommet B, il s'éloignera indéfiniment de ce pôle moyen B, et il ira tomber après un temps infini sur le pôle opposé B' de l'ellipsoïde. Ainsi dans ce cas, qui est unique comme le précédent, l'ellipsoïde, qui, au commencement, touchait le plan fixe par son pôle moyen B, le toucherait à la fin par le pôle moyen opposé B'; de sorte que la position du corps se trouverait entièrement renversée dans l'espace. C'est le plus grand dérangement que l'impulsion d'un petit couple étranger puisse amener dans la position d'un corps qui tourne actuellement sur son axe moyen. Car, si le pôle est déplacé de toute autre manière sur la surface de l'ellipsoïde, il va décrire, comme on l'a vu, un orbe fermé s, soit autour du grand axe, soit autour du petit axe; et, par conséquent, s'il s'écarte d'abord du pôle moyen B, il s'en rapproche ensuite, et revient périodiquement passer à la même distance de B sur la surface, et à la même distance du centre fixe P, dans l'espace absolu.

44. Il y a encore une autre variété de la courbe σ que le pôle instantané peut décrire dans l'espace; mais elle n'est plus relative à la position du couple appliqué sur le corps, ou à la valeur particulière qu'on suppose à la ligne donnée h; elle dépend uniquement de l'espèce de ce corps, c'est-à-dire de la proportion des axes a, b, c de l'ellipsoïde central.

45. Si le corps est un de ceux qui ont deux de leurs trois moments principaux d'inertie égaux, il est alors de révolution, ou ce qu'on appelle un *sphéroïde*: sphéroïde *allongé*, si l'axe de révolution est plus grand que le diamètre de l'équateur; ou *aplati* vers les pôles, si cet axe est plus petit. Dans l'un et l'autre cas, il est évident que la route s du pôle, à la surface du sphéroïde, est un cercle autour de l'axe de ce sphéroïde; et, par conséquent, la route σ du pôle sur le plan fixe est aussi un cercle autour de l'axe du couple qui a mis le corps en mouvement. C'est un des cas les plus simples de la rotation des corps, parce que tout y est circulaire et uniforme. Cependant il faut encore remarquer que, si la circonférence du cercle roulant s n'est pas commensurable avec celle du cercle fixe σ, le pôle instantané ne peut jamais revenir au même lieu dans le corps et dans l'espace tout à la fois.

46. Enfin, et c'est ici le cas le plus simple de tous, si les trois moments d'inertie sont égaux, l'ellipsoïde central devient une sphère parfaite, l'axe instantané de rotation se confond avec l'axe même du couple appliqué, les deux courbes s et σ se réduisent à deux points qui n'en font qu'un seul, et le pôle instantané I reste immobile, et dans le corps, et dans l'espace absolu.

IV.

De ce qui fait la mesure de la stabilité pour chacun des deux axes extrêmes de l'ellipsoïde central.

47. Nous avons déjà remarqué (n° **42**), ce qui distingue l'axe *moyen* des deux axes *extrêmes*, sous le point de vue de la stabilité que ces deux axes peuvent offrir dans la rotation des corps. Mais pour nous faire une idée nette de cette stabilité, et de ce qui en fait en quelque sorte la *mesure*, imaginons la surface de l'ellipsoïde central comme coupée en quatre parties ou fuseaux elliptiques par les deux ellipses singulières que nous avons considérées, et dont les deux plans, conduits par l'axe moyen $2b$, sont également inclinés à l'axe majeur $2a$ (l'un au-dessus, l'autre au-dessous) d'un angle o dont la tangente est $\frac{c^2}{a^2}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$ (n° **39**). Le pôle *moyen* B de l'ellipsoïde est donc à l'intersection de ces deux ellipses; le pôle *majeur* A est au centre du fuseau dont l'ouverture est $2o$, et le pôle *mineur* C au centre du fuseau supplémentaire.

Or, en premier lieu, si le pôle instantané I de la rotation tombe sur le pôle *moyen* B de l'ellipsoïde, il est clair que, pour peu qu'on le déplace, il va tomber dans l'un ou l'autre des deux fuseaux dont il s'agit, et décrire son orbe s autour de l'un ou de l'autre pôle principal de l'ellipsoïde. Ou bien, si on le déplaçait sur le contour même de l'une des deux ellipses, il irait décrire la moitié de cette ellipse pour retomber sur le pôle moyen opposé; ou, s'il était porté sur l'autre moitié de la même ellipse, il reviendrait aussitôt au pôle moyen même d'où on l'aurait écarté: d'où il résulte, comme on l'a dit ci-dessus, que, hors de ce cas unique de déplacement, l'axe *moyen* du corps n'a aucune stabilité.

Mais si le pôle instantané tombe actuellement au pôle *majeur* A de l'ellipsoïde, il peut être déplacé comme on voudra, dans toute l'étendue du fuseau environnant, sans cesser de décrire son orbe s autour du même pôle *majeur*. Et si c'est en cela qu'on fait consister la stabilité de la rotation autour de l'axe majeur, on peut dire que la grandeur de ce fuseau en est en quelque sorte la mesure. Et l'on voit de même que l'étendue du fuseau supplémentaire est la mesure de la stabilité de la rotation autour de l'axe *mineur*.

48. Actuellement, si l'on suppose que l'un de ces deux axes, tel que a, diffère peu de l'axe moyen, le fuseau qui lui répond est très-petit, et le fuseau supplémentaire est très-grand. L'axe peu différent de l'axe moyen a donc très-peu de stabilité, et l'autre axe en a beaucoup.

Il n'est donc point exact de dire, comme on le fait d'ordinaire, que si l'axe instantané est un peu écarté de l'axe principal qui répond, soit au plus petit, soit au plus grand moment d'inertie du corps, il s'en éloignera très-peu et ne fera que de petites oscillations pendant toute la durée du mouvement : car si le moment d'inertie relatif à cet axe diffère peu du moment moyen, le pôle instantané, par un petit dérangement, pourra sortir du petit fuseau où il est actuellement, pour tomber dans le fuseau voisin et y aller décrire son orbe s autour de l'autre axe; ou même, s'il n'est déplacé que dans l'intérieur du petit fuseau qui lui répond, il peut encore y décrire un orbe s étroit et fort allongé, et, par conséquent, faire de très-grandes oscillations de part et d'autre du pôle principal d'où on l'a écarté.

Dans les corps où l'un des moments extrêmes d'inertie diffère peu du moment moyen, et, par conséquent, où l'ellipsoïde central du corps est presque de révolution autour de l'un de ses axes, la stabilité de la rotation n'est donc vraiment assurée que pour cet axe. C'est le cas de la terre, dont la rotation est très-stable autour de son axe actuel, et le serait très-peu autour du troisième axe qui, comme on le sait, diffère très-peu de l'axe moyen.

Si cette différence est tout à fait nulle, en sorte que l'ellipsoïde central du corps soit exactement de révolution, il n'y aura de stable que l'axe de ce *sphéroïde*; car il est clair qu'aucun des autres axes principaux (qui sont ici tous les diamètres de l'équateur) ne peut avoir de stabilité. Et en effet, si le pôle instantané tombe actuellement sur l'équateur, et que, par une cause quelconque, il en soit un peu écarté à gauche ou à droite, il ne restera plus immobile; mais il ira décrire sur la surface de l'ellipsoïde un cercle s, parallèle et presque égal à l'équateur : d'où l'on voit que le pôle instantané aura dans le corps un mouvement très-considérable. Mais, d'un autre côté, il est bon de remarquer qu'il n'en aura qu'un très-petit dans l'espace absolu; car le cercle fixe σ, qu'il décrira dans l'espace, aura pour rayon la très-petite distance IP de ce pôle I au pied P de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent en I. Ainsi l'axe instantané OI, qui, dans le corps, décrira la surface d'un cône très-ouvert et presque plan, ne décrira dans l'espace qu'un cône de base très-petite, et paraîtra ainsi comme immobile dans l'espace absolu.

Il n'y a qu'un seul cas d'exception à cette instabilité d'un axe principal situé dans le plan de l'équateur : c'est celui où le pôle instantané serait porté du point de l'équateur où il est actuellement, en un autre point du même équateur; car alors il y resterait immobile, comme il aurait fait dans sa première position si on ne l'en avait point écarté.

49. Enfin, si les trois axes principaux du corps sont égaux entre eux, et que l'ellipsoïde central devienne ainsi une sphère parfaite, tous les axes sont également stables, ou en quelque sorte *indifférents* à tout déplacement accidentel qui pourrait survenir. Car, si l'axe instantané est porté du lieu où il est, dans un autre, il y reste, et redevient immobile et dans le corps et dans l'espace absolu.

V.

Des noms qu'on pourrait donner aux deux courbes s et σ décrites par le pôle instantané de rotation.

50. Si l'on considère un corps *pesant*, de telle figure qu'on voudra, qui ait été lancé d'une manière quelconque dans l'espace, et qu'on fasse abstraction du mouvement progressif qui l'emporte, pour ne plus voir que la rotation de ce corps sur son centre de gravité, il est clair que cette rotation est exactement la même que si le corps était libre, ou dépourvu de toute pesanteur : car les forces parallèles de la gravité, qui agissent à chaque instant sur les molécules de ce corps, se réduisant toujours à une force unique qui passe par le centre, il n'en résulte aucun couple accélérateur qui puisse altérer la rotation du corps autour de ce point. Il ne reste donc, pour faire varier l'axe instantané, que le seul couple g dû aux forces centrifuges qui naissent de la rotation même, comme dans le cas d'un corps entièrement libre de toute action étrangère.

On voit donc que les courbes s et σ que le pôle instantané décrit, l'une sur l'ellipsoïde central du corps, ou dans l'espace *relatif*, l'autre sur le plan fixe du couple, ou dans l'espace *absolu*, sont deux courbes remarquables que la nature nous offre à chaque instant dans le mouvement des projectiles; et, par cette raison naturelle, il nous semble que chacune d'elles mériterait d'avoir un nom, aussi bien que la courbe décrite par le centre de gravité du corps, et qui est, comme on le sait, une *parabole*.

Je proposerais donc de donner à l'une et à l'autre le nom de *polhodie* [*], en appelant la première s la polhodie *relative*, et la seconde σ la polhodie *absolue*. Ou, si l'on voulait distinguer ces deux courbes par leur forme particulière, on donnerait à l'orbe elliptique et fermé s le simple nom de *polhodie;* et, à la courbe plane et ondulée σ, celui de *herpolhodie* [**], afin de rappeler, avec l'idée du pôle qui la décrit, cette propriété qu'elle a de *serpenter* en circulant autour d'un centre fixe.

VI.

Équations différentielles de ces courbes.

51. L'équation de la polhodie est facile à trouver : car x, y, z étant les coordonnées du pôle qui décrit l'orbe s à la surface de l'ellipsoïde central, on a d'abord (n° **28**)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{1}{h^2},$$

et, par hypothèse,

$$x^2+y^2+z^2=u^2,$$

en désignant par u le rayon vecteur émané du centre.

Ou bien, si l'on tire de ces trois équations les valeurs séparées de

[*] Route du pôle, de πόλος et ὁδός.

[**] Route *serpentante* du pôle, de ἕρπω. Suivant les règles précises de l'étymologie, il faudrait dire *polherpohodie;* mais pour plus de simplicité, et surtout plus d'euphonie, il vaut bien mieux s'en tenir à la première dénomination.

x^2, y^2, z^2, on a ces transformées équivalentes :

$$\text{(A)}\qquad\left\{\begin{aligned} x^2 &= \frac{-a^4}{(a^2-b^2)(c^2-a^2)}\left[u^2-\left(b^2+c^2-\frac{b^2c^2}{h^2}\right)\right],\\ y^2 &= \frac{-b^4}{(b^2-c^2)(a^2-b^2)}\left[u^2-\left(c^2+a^2-\frac{c^2a^2}{h^2}\right)\right],\\ z^2 &= \frac{-c^4}{(c^2-a^2)(b^2-c^2)}\left[u^2-\left(a^2+b^2-\frac{a^2b^2}{h^2}\right)\right].\end{aligned}\right.$$

Or, qu'on différentie ces équations, et qu'on en tire les valeurs de dx, dy, dz en u et du, pour les substituer dans l'expression

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2},$$

et l'on aura, entre les variables s et u, l'équation cherchée de la polhodie s.

Si, dans cette équation, on change simplement ds en $d\sigma$, et u^2 en v^2+h^2, ce qui donne

$$u\,du=v\,dv,$$

on aura l'équation de l'herpolhodie entre son arc σ et le rayon vecteur v, émané du centre P de cette courbe plane.

Enfin, si l'on nomme φ l'angle que le rayon vecteur v fait avec une droite fixe quelconque menée dans le plan de cette courbe, on aura évidemment l'équation

$$d\sigma^2=v^2d\varphi^2+dv^2;$$

de sorte qu'en y mettant, au lieu de $d\sigma$, son expression en v et dv, tirée de la précédente, on aura l'équation de l'herpolhodie entre son rayon vecteur v et l'angle φ qu'il décrit autour du centre; ou ce qu'on appelle l'équation *polaire* de la courbe.

Tous ces calculs n'ont, comme on voit, aucune difficulté; mais avant de les développer, il est bon d'employer quelques abréviations analytiques que j'indiquerai tout à l'heure, et de commencer surtout par une remarque essentielle sur les premières données de notre analyse.

Remarque I.

Sur les données de cette analyse.

52. Les trois premières sont les rayons principaux a, b, c de l'ellipsoïde central ; et ces lignes sont toujours données par la nature du corps, puisque ce sont trois lignes réciproques aux *bras de l'inertie* de ce corps autour de ses trois axes principaux. Nous les supposerons toujours rangées dans cet ordre de grandeur

$$a > b > c.$$

Il est évident que a est le plus grand de tous les rayons de l'ellipsoïde, et qu'il est unique ; que c est le plus petit, et qu'il est unique ; qu'enfin b, perpendiculaire au plan de ces deux-là, est un rayon *moyen* qui est aussi unique, mais seulement par sa position, et non point par sa grandeur : car il est aisé de voir qu'il y a dans l'ellipsoïde une infinité de rayons de même grandeur b, et que ces rayons égaux forment les deux plans singuliers qui donnent les deux sections *circulaires* de l'ellipsoïde ; sections inclinées, au plan (ab), d'un angle dont la tangente est $\pm \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$ (1re partie, no **74**).

Actuellement, par la définition même de l'ellipsoïde *central*, les trois *moments principaux d'inertie* du corps sont entre eux comme les trois quantités $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$, et sont ainsi rangés dans l'ordre

$$\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2} < \frac{1}{c^2}.$$

Mais, par la nature des moments d'inertie d'un corps autour de trois axes rectangulaires, il est clair qu'un quelconque de ces moments est toujours plus petit que la somme des deux autres. Or, d'après l'ordre qu'on vient d'établir, cette condition d'inégalité se trouve déjà exprimée pour chacun des deux moments $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$; mais elle ne l'est point pour le dernier moment $\frac{1}{c^2}$ qui est le plus grand des trois. Il faut donc, indépendamment de la double inégalité

$$a > b > c,$$

poser encore celle-ci :

$$\frac{1}{c^2} < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

qui revient à

$$c > \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

53. On voit par la géométrie que $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ est la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'angle droit sur l'hypoténuse, dans un triangle rectangle dont a et b seraient les deux côtés. L'inégalité précédente revient donc à dire que l'axe *mineur* c d'un ellipsoïde *central* doit toujours être plus grand que cette perpendiculaire : de sorte que cet axe *mineur* ne peut s'étendre que depuis la longueur $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ de cette perpendiculaire jusqu'à celle de l'axe *moyen* b.

Il résulte de là que l'ellipsoïde central peut être un ellipsoïde plus ou moins *allongé*, et même allongé jusqu'à l'*infini*, auquel cas les deux petits axes b et c deviennent égaux ; mais il ne peut être indéfiniment *aplati*, puisque l'axe mineur c doit toujours surpasser

$$ab : \sqrt{a^2+b^2}.$$

Si l'ellipsoïde est de révolution autour de son petit axe, ou si l'on a $b = a$, le sphéroïde *central* ne peut donc s'étendre que depuis la sphère, jusqu'au sphéroïde aplati dont l'axe est la fraction $\frac{1}{\sqrt{2}}$ du rayon de l'équateur.

54. Ainsi, quoi qu'il y ait dans la nature, ou qu'on puisse y concevoir des corps de toutes les constitutions et de toutes les figures possibles ; il n'y a point d'ellipsoïdes *centraux* de toutes les formes possibles, c'est-à-dire qu'il ne serait pas permis de se donner les trois axes d'un ellipsoïde central dans une proportion arbitraire. On peut bien prendre à volonté les deux premiers a et b ; mais, une fois qu'ils sont donnés, il faut que le petit axe c soit pris plus grand que $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$; sans quoi l'ellipsoïde central qu'on aurait supposé dans l'analyse ne pourrait appartenir à aucun corps existant ni pouvant exister dans la nature. Cette remarque est importante, car en la perdant de vue dans l'interprétation des formules analytiques, on s'exposerait à regarder comme réelles des propriétés de mouvement qui n'appartiendraient qu'à des corps imaginaires.

55. Après les trois rayons principaux a, b, c de l'ellipsoïde central, vient une quatrième donnée h : c'est la *perpendiculaire* abaissée du centre sur le plan du couple impulsif, supposé tangent à la surface de cet ellipsoïde; et la seule chose à remarquer sur cette donnée h, c'est qu'elle est toujours comprise entre les deux rayons extrêmes a et c. Car, étant comparée au rayon u qui va du centre au point de contact, elle est plus courte que ce rayon oblique, et à plus forte raison, que le rayon *majeur* a qui est le plus grand de tous les rayons possibles. D'un autre côté, comme cette perpendiculaire h a son pied hors de la surface de l'ellipsoïde, elle est plus grande que le rayon *mineur* c qui est le plus petit de tous les rayons. Ainsi l'on a toujours cette double inégalité

$$a > h > c.$$

Abréviations analytiques.

56. Pour abréger les calculs, je ferai

$$b^2 + c^2 - \frac{b^2 c^2}{h^2} = \alpha^2,$$

$$c^2 + a^2 - \frac{c^2 a^2}{h^2} = \beta^2,$$

$$a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{h^2} = \gamma^2,$$

où je remarquerai d'abord que les trois quantités désignées par α^2, β^2, γ^2 sont toujours *positives*.

Car, en premier lieu, à cause de h^2 toujours $> c^2$, il est clair que α^2 et β^2 sont toujours *positifs*. Ensuite, comme on doit avoir (n° **52**),

$$c^2 > a^2 b^2 : (a^2 + b^2),$$

on a, par conséquent,

$$h^2 > a^2 b^2 : (a^2 + b^2),$$

et il en résulte que la troisième quantité γ^2 est aussi *positive*; car, en donnant à h^2 une valeur quelconque qu'elle puisse avoir, et que je représente par

$$h^2 = (a^2 b^2 + a^2 i^2) : (a^2 + b^2),$$

il vient

$$\gamma^2 = (a^2 + b^2)\left(1 - \frac{b^2}{b^2 + i^2}\right)$$

toujours *positif*.

Ainsi α, β, γ seront toujours trois lignes réelles comme les rayons a, b, c de l'ellipsoïde central : la dernière seule γ peut devenir *nulle*, et le devient dans le cas particulier de $h = ab : \sqrt{a^2 + b^2}$; ce qui est au fond le cas de $h = c$, puisque c est nécessairement compris entre h et $ab : \sqrt{a^2 + b^2}$.

57. Maintenant, si l'on prend les différences de la quantité β^2 à chacune des deux autres α^2 et γ^2, on trouve

$$\beta^2 - \alpha^2 = \frac{h^2 - c^2}{h^2}(a^2 - b^2) > 0,$$

$$\beta^2 - \gamma^2 = \frac{a^2 - h^2}{h^2}(b^2 - c^2) > 0;$$

d'où l'on voit que β *est toujours la plus grande des trois lignes* α, β, γ.

Si l'on prend ensuite la différence entre α^2 et γ^2, on trouve

$$\gamma^2 - \alpha^2 = \frac{h^2 - b^2}{h^2}(a^2 - c^2),$$

différence qui est positive ou négative, selon que h est plus grand ou plus petit que b.

Les trois lignes α, β, γ sont donc toujours rangées ainsi qu'il suit :

1°. Pour $h > b$, dans cet ordre : $\beta > \gamma > \alpha$;

2°. Pour $h < b$, dans celui-ci : $\beta > \alpha > \gamma$.

Remarque II.

Maxima et minima des rayons vecteurs de la polhodie.

58. Les trois lignes α, β, γ ne sont pas seulement propres à simplifier les expressions de notre analyse, mais elles ont encore une signification remarquable dans le problème qui nous occupe.

Et en effet, par les trois équations précédentes de l'orbe s, entre le rayon vecteur u et chacune des trois coordonnées x, y, z, il est aisé de voir que β est le plus grand des rayons vecteurs u qui vont du centre à cet orbe ou polhodie s. Car, 1°, en faisant $u = \beta$, ces trois équations sont satisfaites, et ne conduisent qu'à des valeurs positives de x^2, y^2, z^2; mais 2°, toute valeur de $u > \beta$ rend l'y^2 *négatif*, et, partant, l'y imaginaire, et ne peut ainsi appartenir comme rayon à l'orbe s.

Le rayon $u = \beta$ est donc le rayon *maximum*; et comme il répond à $y = 0$, on voit qu'il tombe toujours dans le plan principal de l'ellipse moyenne (ac).

Quant au rayon *minimum*, il faut distinguer deux cas :

1°. Si $h > b$, ce rayon *minimum* est la ligne γ; car toute valeur de $u < \gamma$ conduirait à z^2 négatif, et, partant, à z imaginaire. La ligne γ est donc alors le rayon *minimum*, et comme il répond à $z = 0$, on voit qu'il tombe dans le plan de l'ellipse majeure (ab).

Enfin, dans ce même cas de $h > b$, on voit que la troisième ligne α ne peut appartenir comme rayon à aucun des points de l'orbe s : car, en prenant la différence entre h^2 et α^2, on trouve

$$h^2 - \alpha^2 = \frac{(h^2 - b^2)(h^2 - c^2)}{h^2};$$

d'où il résulte, à cause de $h > b$ par hypothèse, que la ligne α est alors $< h$, et, par conséquent, ne peut être un des rayons de l'orbe s.

2°. Si $h < b$, c'est au contraire la ligne α qui est le rayon *minimum*, lequel répondant à $x = 0$, tombe dans le plan de l'ellipse *mineure* (bc); et l'autre ligne γ, qu'on trouve alors $< h$, ne peut appartenir comme rayon vecteur à aucun point de l'orbe s.

Suite des abréviations.

59. Nous emploierons les trois lettres e, e', e'', pour désigner les

excentricités respectives des ellipses principales (ab), (bc), (ac), de l'ellipsoïde central.

Mais, comme les carrés a^2, b^2, c^2 sont rangés dans cet ordre $a^2 > b^2 > c^2$, si l'on commence par poser $a^2 - b^2 = e^2$, et puis $b^2 - c^2 = e'^2$, il faut, pour avoir de la symétrie dans les calculs, suivre encore le même ordre, et prendre ainsi, non pas $a^2 - c^2$, mais $c^2 - a^2 = e''^2$. Seulement, comme on a $c^2 < a^2$, il faudra se rappeler que ce n'est point e''^2, mais bien $-e''^2$, qui représentera le carré de l'excentricité de l'ellipse *moyenne* (ac).

Nous poserons donc, pour la symétrie des expressions,

$$a^2 - b^2 = e^2,$$
$$b^2 - c^2 = e'^2,$$
$$c^2 - a^2 = e''^2,$$

et nous ferons le produit

$$e^2 e'^2 e''^2 = -\varepsilon^6.$$

Relations entre les quantités désignées par
α^2, β^2, γ^2, e^2, e'^2, e''^2.

60. Par les abréviations qui précèdent, les trois équations (A), (n° 51), qui ont lieu entre u et chacune des coordonnées x, y, z de l'orbe s, prennent cette forme très-simple :

$$(\mathrm{A}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon^6 x^2 &= a^4 e'^2 (u^2 - \alpha^2), \\ \varepsilon^6 y^2 &= b^4 e''^2 (u^2 - \beta^2), \\ \varepsilon^6 z^2 &= c^4 e^2 (u^2 - \gamma^2). \end{aligned} \right.$$

Or ces équations, étant ajoutées ensemble, donnent

$$\varepsilon^6 (x^2 + y^2 + z^2)$$
$$= (a^4 e'^2 + b^4 e''^2 + c^4 e^2) u^2 - (a^4 e'^2 \alpha^2 + b^4 e''^2 \beta^2 + c^4 e^2 \gamma^2);$$

donc, à cause de

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2,$$

on a ces deux premières relations,

$$a^4 e'^2 + b^4 e''^2 + c^4 e^2 = \varepsilon^6,$$
$$a^4 e'^2 \alpha^2 + b^4 e''^2 \beta^2 + c^4 e^2 \gamma^2 = 0.$$

Si l'on divise respectivement les trois mêmes équations (A), la première par a^2, la seconde par b^2, la troisième par c^2, et qu'on ajoute, on trouvera

$$\varepsilon^6 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)$$
$$= (a^2 e'^2 + b^2 e''^2 + c^2 e^2) u^2 - (a^2 e'^2 \alpha^2 + b^2 e''^2 \beta^2 + c^2 e^2 \gamma^2);$$

donc, à cause de

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

le premier membre se réduit à ε^6, et, par conséquent, le second membre devant aussi se réduire à ε^6, quel que soit u, il faut qu'on ait ces deux nouvelles relations,

$$a^2 e'^2 + b^2 e''^2 + c^2 e^2 = 0,$$
$$a^2 e'^2 \alpha^2 + b^2 e''^2 \beta^2 + c^2 e^2 \gamma^2 = -\varepsilon^6.$$

Les mêmes équations étant divisées respectivement, la première par a^4, la seconde par b^4, la troisième par c^4, donnent

$$\varepsilon^6 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right) = (e'^2 + e''^2 + e^2) u^2 - (\alpha^2 e'^2 + \beta^2 e''^2 + \gamma^2 e^2);$$

donc, à cause de

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{h^2},$$

le premier membre se réduit à $\frac{\varepsilon^6}{h^2}$; et, par conséquent, le second devant se réduire aussi à $\frac{\varepsilon^6}{h^2}$, quel que soit u, on a ces deux nouvelles relations,

$$e'^2 + e''^2 + e^2 = 0,$$
$$\alpha^2 e'^2 + \beta^2 e''^2 + \gamma^2 e^2 = -\varepsilon^6 : h^2.$$

Ainsi, en employant, pour abréger, le signe somme Σ, on a les

six relations suivantes :

(1) $\Sigma a^4 e'^2 = \varepsilon^6$, (2) $\Sigma a^4 e'^2 \alpha^2 = 0$,

(3) $\Sigma a^2 e'^2 \alpha^2 = -\varepsilon^6$, (4) $\Sigma a^2 e'^2 = 0$,

(5) $\Sigma \alpha^2 e'^2 = \frac{-\varepsilon^6}{h^2}$, (6) $\Sigma e'^2 = 0$,

qui serviront à réduire les expressions.

61. Nous ferons encore, pour la facilité de l'analyse,

$$(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)(h^2 - c^2) = h^6 - \mathrm{A} h^4 + \mathrm{B} h^2 - \mathrm{C} = \mathrm{D},$$
$$(h^2 - \alpha^2)(h^2 - \beta^2)(h^2 - \gamma^2) = h^6 - \mathrm{P} h^4 + \mathrm{Q} h^2 - \mathrm{R} = \Delta,$$

ce qui donne

$$\mathrm{A} = a^2 + b^2 + c^2,$$
$$\mathrm{B} = a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2,$$
$$\mathrm{C} = a^2 b^2 c^2,$$
$$\mathrm{P} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$
$$\mathrm{Q} = \alpha^2 \beta^2 + \beta^2 \gamma^2 + \gamma^2 \alpha^2,$$
$$\mathrm{R} = \alpha^2 \beta^2 \gamma^2.$$

Et, si l'on veut exprimer P, Q, R en A, B, C, on trouvera ces relations

$$\mathrm{P} = \frac{2\mathrm{A} h^2 - \mathrm{B}}{h^2},$$
$$\mathrm{Q} = \frac{(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}) h^4 - (\mathrm{AB} + 3\mathrm{C}) h^2 + \mathrm{AC}}{h^4},$$
$$\mathrm{R} = \frac{(\mathrm{AB} - \mathrm{C}) h^6 - (\mathrm{B}^2 + \mathrm{AC}) h^4 + 2\mathrm{BC} h^2 - \mathrm{C}^2}{h^6}.$$

62. Au reste, comme on a

$$h^2 - \alpha^2 = \frac{(h^2 - b^2)(h^2 - c^2)}{h^2},$$
$$h^2 - \beta^2 = \frac{(h^2 - c^2)(h^2 - a^2)}{h^2},$$
$$h^2 - \gamma^2 = \frac{(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)}{h^2},$$

il en résulte (en faisant le produit) qu'on a entre les deux polynômes désignés par D et Δ, la relation très-simple

$$\Delta = D^2 : h^6.$$

Tous ces préliminaires étant posés, passons au développement des calculs indiqués au commencement de ce paragraphe.

Équation de la polhodie entre l'arc s et le rayon vecteur u.

63. Les trois équations (A) du n° **60**, étant différentiées, nous donnent

$$dx^2 = \frac{a^4 e'^2 . u^2 du^2}{\varepsilon^6 (u^2 - \alpha^2)}, \quad dy^2 = \frac{b^4 e''^2 . u^2 du^2}{\varepsilon^6 (u^2 - \beta^2)}, \quad dz^2 = \frac{c^4 e^2 . u^2 du^2}{\varepsilon^6 (u^2 - \gamma^2)};$$

on a donc, en ajoutant,

$$ds^2 = \frac{u^2 du^2}{\varepsilon^6} \left(\frac{a^4 e'^2}{u^2 - \alpha^2} + \frac{b^4 e''^2}{u^2 - \beta^2} + \frac{c^4 e^2}{u^2 - \gamma^2} \right);$$

ou bien, si l'on réduit au même dénominateur et qu'on ordonne le numérateur suivant les puissances de u^2, on aura

$$ds^2 = \frac{u^2 du^2}{\varepsilon^6} \left[\frac{u^4 \Sigma a^4 e'^2 - u^2 \Sigma a^4 e'^2 (\beta^2 + \gamma^2) + \Sigma a^4 e'^2 \beta^2 \gamma^2}{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)(u^2 - \gamma^2)} \right],$$

où l'on peut reconnaître *à priori* que le numérateur doit avoir tous ses termes divisibles par ε^6; car il est facile de voir que chacun des coefficients $\Sigma a^4 e'^2$, $\Sigma a^4 e'^2 (\beta^2 + \gamma^2)$, $\Sigma a^4 e'^2 \beta^2 \gamma^2$, s'évanouit en y faisant

$$\text{soit} \quad e^2 = 0 \quad \text{ou} \quad a^2 = b^2,$$
$$\text{soit} \quad e'^2 = 0 \quad \text{ou} \quad b^2 = c^2,$$
$$\text{soit} \quad e''^2 = 0 \quad \text{ou} \quad c^2 = a^2;$$

et que, par conséquent, il est actuellement divisible par le produit

$$(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2) = \varepsilon^6.$$

Mais il s'agit ici de trouver le quotient sans faire la division.

Or, d'après la relation (1), on a d'abord

$$\Sigma a^4 e'^2 = \varepsilon^6.$$

Ensuite, le coefficient

$$\Sigma a^4 e'^2 (\beta^2 + \gamma^2)$$

(si l'on y met, au lieu de $\beta^2 + \gamma^2$ sa valeur $P - \alpha^2$) prend la forme

$$P \Sigma a^4 e'^2 - \Sigma a^4 e'^2 \alpha^2,$$

quantité qui, d'après les relations (1) et (4), se réduit à $\varepsilon^6 P$. Ainsi l'on a

$$\Sigma a^4 e'^2 (\beta^2 + \gamma^2) = \varepsilon^6 . P.$$

Enfin, le dernier coefficient

$$\Sigma a^4 e'^2 \beta^2 \gamma^2$$

(si l'on y met pour $\beta^2 \gamma^2$ sa valeur $Q - \alpha^2 (\beta^2 + \gamma^2)$) se change d'abord en

$$Q \Sigma a^4 e'^2 - \Sigma a^4 e'^2 \alpha^2 (\beta^2 + \gamma^2) = \varepsilon^6 Q - \Sigma a^4 e'^2 \alpha^2 (P - \alpha^2),$$

ou, par la relation (4),

$$= \varepsilon^6 Q + \Sigma a^2 e'^2 \alpha^2 (a^2 \alpha^2):$$

or, si l'on met, pour $(a^2 \alpha^2)$, sa valeur

$$(a^2 \alpha^2) = a^2 b^2 + a^2 c^2 - \frac{a^2 b^2 c^2}{h^2} = B - b^2 c^2 - \frac{C}{h^2},$$

ce coefficient devient

$$\varepsilon^6 Q + \left(B - \frac{C}{h^2} \right) \Sigma a^2 e'^2 \alpha^2 - C \Sigma \alpha^2 e'^2,$$

d'où, par les relations (3) et (5), on conclut enfin

$$\Sigma a^4 e'^2 \beta^2 \gamma^2 = \varepsilon^6 \left(Q - B + \frac{2C}{h^2} \right).$$

On aura donc, en substituant ces valeurs, et supprimant le facteur commun ε^6,

$$ds^2 = u^2 du^2 \left[\frac{u^4 - P u^2 + Q - B + 2C : h^2}{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)(u^2 - \gamma^2)} \right],$$

ou, en tirant la racine carrée, et mettant le dénominateur sous la forme $u^6 - P u^4 + Q u^2 - R$,

$$ds = u\,du \sqrt{\frac{u^4 - P u^2 + Q - B + 2C : h^2}{u^6 - P u^4 + Q u^2 - R}},$$

ce qui est l'équation cherchée de la polhodie s.

64. Dans le cas singulier de $h = b$, ce qui donne

$$\alpha = \gamma = b, \quad P = 2b^2 + \beta^2 \quad \text{et} \quad Q - B + 2C : h^2 = b^2(b^2 + \beta^2),$$

l'équation devient

$$ds = u\,du \sqrt{\frac{u^2 - (b^2 + \beta^2)}{(u^2 - b^2)(u^2 - \beta^2)}}.$$

C'est, en effet, entre l'arc et le rayon vecteur émané du centre, l'équation différentielle d'une ellipse aux rayons principaux b et β, ce qui s'accorde entièrement avec ce qu'on a vu, et confirme ainsi notre analyse.

On a donc, pour l'intégrale de l'équation précédente, s égal à la longueur de l'arc correspondant au rayon u dans une ellipse dont les rayons principaux sont b et β : ce qu'on peut indiquer de cette manière,

$$s = \text{arc}\,(\text{ray} = u) \qquad (\text{ellipse } b, \beta).$$

Équation de l'herpolhodie σ.

65. Si dans l'équation précédente on change simplement ds en $d\sigma$, et u^2 en $v^2 + h^2$, ce qui donne

$$u\,du = v\,dv,$$

on aura sur-le-champ

$$d\sigma = v\,dv \sqrt{\frac{(v^2 + h^2)^2 - P(v^2 + h^2) + Q - B + 2C : h^2}{(v^2 + h^2)^3 - P(v^2 + h^2)^2 + Q(v^2 + h^2) - R}},$$

pour l'équation de l'herpolhodie entre son arc σ et le rayon vecteur v émané du centre de cette courbe plane.

Équation polaire de la même courbe.

66. En nommant φ l'inclinaison du rayon vecteur v sur une droite fixe quelconque menée dans le plan de la courbe, on a évidemment

$$d\sigma^2 = v^2 d\varphi^2 + dv^2,$$

d'où l'on tire

$$d\varphi = \frac{\sqrt{d\sigma^2 - dv^2}}{v}.$$

Il ne s'agit donc que de mettre dans cette équation, au lieu de $d\sigma$, son expression précédente en v, pour avoir l'équation de l'herpolhodie entre son rayon vecteur v et l'angle φ qu'il décrit autour du centre de cette courbe.

Or, si l'on fait cette substitution, qu'on réduise au même dénominateur, et qu'on ordonne le numérateur par rapport aux puissances de v^2, on trouve, en changeant à la fois les signes des deux termes de la fraction,

$$d\varphi = \frac{dv}{v} \sqrt{\frac{h^2 v^4 + (2h^4 - P h^2 - B + 2C : h^2) v^2 + (h^6 - P h^4 + Q h^2 - R)}{R - Q(v^2 + h^2) + P(v^2 + h^2)^2 - (v^2 + h^2)^3}}.$$

Or je remarque que le numérateur de la fraction soumise au radical est un carré parfait : car, en y mettant, au lieu de Ph^2, sa valeur $2Ah^2 - B$, ce numérateur devient

$$h^2 v^4 + 2\left(\frac{h^6 - A h^4 + B h^2 - C}{h^3}\right) h v^2 + (h^6 - P h^4 + Q h^2 - R),$$

ou $\left(\text{d'après les abréviations précédentes (n}^\circ\ \mathbf{61}) \text{ et la relation } \Delta = \frac{D^2}{h^6}\right)$,

$$h^2 v^4 + 2\frac{D}{h^3} \cdot h v^2 + \frac{D^2}{h^6};$$

trinôme où l'on voit le carré parfait du binôme $hv^2 + \frac{D}{h^3}$. On a donc cette expression plus simple

$$d\varphi = \frac{dv}{v} \cdot \frac{hv^2 + D : h^3}{\sqrt{R - Q(v^2 + h^2) + P(v^2 + h^2)^2 - (v^2 + h^2)^3}}$$

pour l'équation polaire cherchée.

67. Au reste, on peut encore présenter l'équation sous cette autre forme, où l'on ne verrait que le polynôme désigné par Δ, avec ses *dérivés* Δ', Δ'', pris relativement à h^2.

Car, comme on a fait, pour abréger,

$$\Delta = h^6 - \mathrm{P}h^4 + \mathrm{Q}h^2 - \mathrm{R},$$

si l'on fait de même

$$\Delta' = 3h^4 - 2\mathrm{P}h^2 + \mathrm{Q}$$

et

$$2\Delta'' = 2.3h^2 - 2\mathrm{P},$$

l'expression précédente de $d\varphi$, en y mettant encore, au lieu de $\mathrm{D} : h^3$, sa valeur $\sqrt{\Delta}$, prendra la forme

$$d\varphi = \frac{dv}{v\sqrt{-1}} \cdot \frac{hv^2 + \sqrt{\Delta}}{\sqrt{v^6 + \Delta'' v^4 + \Delta' v^2 + \Delta}},$$

expression où il faut remarquer qu'il n'y a, au fond, rien d'imaginaire, parce que le polynôme $v^6 + \Delta'' v^4 + \Delta' v^2 + \Delta$, qui est sous le radical, est essentiellement *négatif*, comme le produit

$$(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)(u^2 - \gamma^2),$$

auquel il est équivalent : de sorte que $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{v^6 + \Delta'' v^4 + \Delta' v^2 + \Delta}$ est toujours réel, tant qu'on ne donne à v, comme cela doit être, que des valeurs prises dans les limites où elles sont naturellement renfermées.

Si l'on fait $v^2 = \rho$, l'équation précédente prend la forme

$$d\varphi = \frac{(\sqrt{\Delta} + h\rho)\,d\rho}{2\rho\sqrt{-1}\sqrt{\rho^3 + \Delta''\rho^2 + \Delta'\rho + \Delta}},$$

dont l'intégrale se rapporte évidemment aux transcendantes elliptiques.

Cas singulier de $h = b$, où l'herpolhodie devient une spirale.

68. Quand on suppose $h = b$, la polhodie s devient, comme on l'a vu, une ellipse aux rayons principaux b et β, et dont l'équation

différentielle est

$$ds = u\,du\frac{\sqrt{u^2 - (b^2 + \beta^2)}}{\sqrt{(u^2 - b^2)(u^2 - \beta^2)}}.$$

Si l'on fait

$$ds = d\sigma \quad \text{et} \quad u^2 = v^2 + b^2,$$

on a donc, pour l'herpolhodie σ,

$$d\sigma = dv\,\frac{\sqrt{\beta^2 - v^2}}{\sqrt{(\beta^2 - b^2) - v^2}},$$

équation en apparence plus simple que la première, mais dont l'intégrale exige également la rectification d'un arc d'ellipse, car il est clair qu'on a

$$\sigma = \text{arc}\left(\text{ray} = \sqrt{b^2 + v^2}\right) \qquad (\text{ellipse } b, \beta).$$

69. Mais, en y faisant

$$d\sigma = \sqrt{v^2 d\varphi^2 + dv^2},$$

pour avoir l'équation polaire de la même courbe, on trouve l'équation différentielle

$$d\varphi = b\,\frac{dv}{v\sqrt{(\beta^2 - b^2) - v^2}},$$

qui s'intègre par les *logarithmes* : car, en faisant, pour abréger,

$$\sqrt{\beta^2 - b^2} = n,$$

c'est-à-dire en nommant n l'excentricité de l'ellipse roulante s qui produit la courbe σ, on a, pour l'intégrale,

$$\varphi = \frac{b}{n}\log\left(\frac{v}{n + \sqrt{n^2 - v^2}}\right),$$

où l'on suppose que l'angle φ soit nul ou commence quand le rayon vecteur v est égal à n ou $\sqrt{\beta^2 - b^2}$ qui est sa valeur *maximum* : ce qui place l'origine au sommet de la courbe.

On a donc, en passant des logarithmes aux nombres,

$$e^{\frac{n\varphi}{b}} = \frac{v}{n + \sqrt{n^2 - v^2}},$$

e désignant ici, suivant l'usage, la base des logarithmes naturels.

Ou bien, si l'on veut tirer v en φ, on a

$$v = \frac{2n}{e^{\frac{n\varphi}{b}} + e^{-\frac{n\varphi}{b}}},$$

ce qui est la forme la plus simple de l'équation polaire de la courbe σ dans le cas singulier dont il s'agit.

70. Par cette expression de v en φ, on voit que le rayon vecteur v ne change point de grandeur quand on change le signe de l'angle φ: de sorte que la courbe jette, à gauche et à droite de son sommet, deux branches parfaitement égales. On voit encore que v diminue lorsque φ augmente, et que ce rayon v ne peut toutefois devenir nul qu'en supposant $\varphi = \pm \infty$: d'où il résulte que la courbe est une spirale double dont les deux branches continues font, en sens contraires, une infinité de révolutions autour du même centre, se rapprochant sans cesse de ce point, et de plus près que tout ce qu'on voudra, sans pouvoir jamais l'atteindre : ce qui confirme tout ce qu'on a dit précédemment sur la nature de cette spirale.

Au reste, pour une précision parfaite dans les termes, il faut bien remarquer que le centre n'est pas à la rigueur un point *asymptotique;* je veux dire, ne pourrait être regardé comme un cercle infiniment petit que la spirale tend sans cesse à venir toucher. Car en nommant j l'inclinaison de la courbe σ au rayon vecteur v qui la décrit, on trouve aisément, par le triangle rectangle formé sur les trois côtés $d\sigma$, dv, $v\,d\varphi$, l'équation

$$\sin j = \frac{b}{\sqrt{\beta^2 - v^2}};$$

d'où l'on voit que si la spirale est perpendiculaire au rayon vecteur v lorsque

$$v^2 = \beta^2 - b^2,$$

c'est-à-dire au sommet de la courbe, elle y est inclinée partout ailleurs, et même jusqu'au centre, puisque, en faisant $v = 0$, on trouve

$$\sin j = \frac{b}{\beta};$$

ce qui répond à un angle j différent d'un droit, à cause de $b < \beta$.

71. Je ne parle point de ces cas particuliers de $a = b$, $b = c$, où l'ellipsoïde central du corps est un ellipsoïde de révolution; car si l'on a, par exemple,

$$b = c,$$

il s'ensuit que

$$u = \beta = \gamma = \textit{constante}:$$

et alors il est clair que la polhodie est un cercle décrit autour de l'axe a, d'un rayon $\frac{b^2}{h}\sqrt{\frac{a^2 - h^2}{a^2 - b^2}}$; et l'herpolhodie est un autre cercle décrit autour de l'axe fixe du couple, d'un rayon

$$\sqrt{\beta^2 - h^2} = \frac{\sqrt{(a^2 - h^2)(h^2 - b^2)}}{h}.$$

VII.

Idée de la détermination du lieu du corps au bout d'un temps donné.

72. Après avoir reconnu la nature des deux courbes s et σ, il est naturel de chercher la vitesse $\frac{ds}{dt}$ ou $\frac{d\sigma}{dt}$ avec laquelle le pôle instantané décrit en même temps l'une et l'autre : et cette recherche, qui mène à celle du lieu du corps au bout d'un temps donné, n'a pas plus de difficulté que les précédentes.

Pour nous en faire une idée, considérons les variables x, y, z et u comme des fonctions du temps t. Si aux trois équations précédentes (n° **51**) déjà posées entre les variables, on joint l'équation qui exprime la quantité du couple accélérateur dû aux forces centrifuges, il sera facile d'en tirer la valeur de $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$ ou de $\frac{ds}{dt}$ en fonction du rayon vecteur u : de sorte qu'on aura d'abord l'équation

$$\frac{ds}{dt} = f(u),$$

f désignant une certaine fonction déterminée de u.

Mais, par les mêmes équations, on trouvera aussi d'une manière facile la valeur de $\frac{du}{dt}$ en fonction du même rayon u; et de cette équation, qui ne sera qu'entre les variables u et t, on pourra passer, par une simple quadrature, à l'expression de u en t. Si donc on met cette valeur à la place de u, dans l'équation précédente

$$\frac{ds}{dt} = f(u),$$

on aura, entre s et t, une équation différentielle de la forme

$$\frac{ds}{dt} = \mathrm{F}(t),$$

ce qui donnera la vitesse du pôle sur l'arc s, en fonction du temps t: vitesse parfaitement égale à la vitesse $\frac{d\sigma}{dt}$ avec laquelle le pôle décrit en même temps l'arc σ dans l'espace absolu.

De cette dernière équation

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} = \mathrm{F}(t),$$

où $\mathrm{F}(t)$ sera évidemment une fonction périodique, il ne restera donc plus qu'à remonter par une seconde intégration à la longueur même des deux arcs s et σ en fonction du temps t employé à les décrire : car sitôt qu'on aura cette intégrale, que je représenterai par

$$s = \sigma = \Phi(t),$$

on pourra dire que le problème de la rotation des corps est entièrement résolu ; c'est-à-dire qu'on est actuellement en état d'assigner le lieu précis de l'espace où se trouvera le corps au bout d'un temps quelconque donné.

Et, en effet, on saura qu'au bout de ce temps le pôle instantané doit être, sur la surface de l'ellipsoïde central, à l'extrémité S de l'arc s qui répond à ce temps donné t; et que ce même pôle doit être, sur le plan fixe, à l'extrémité Σ de l'arc σ de même longueur qui répond au même temps donné. Or, le centre de l'ellipsoïde étant retenu immobile en O à la hauteur donnée h au-dessus du plan fixe, on n'aura qu'à mettre cet ellipsoïde en contact avec ce plan de manière qu'il touche par le point déterminé S de sa surface, et au point déterminé Σ du plan dont il s'agit : et de cette manière l'ellipsoïde central se trouvera posé dans le lieu précis de l'espace où il arrive par son mouvement naturel au bout du temps donné t.

On voit combien cette analyse est claire et naturelle : on peut encore la simplifier et la varier de plusieurs manières en considérant d'autres quantités relatives à la position du corps ; il ne nous reste donc qu'à la développer, et c'est ce qu'on va faire dans la troisième partie de ce Mémoire. Mais auparavant, je crois bon de rapprocher notre méthode de l'analyse ordinaire ; de montrer, par exemple, comment le seul théorème (n° **13**) relatif aux forces centrifuges, étant traduit en analyse, donne sur-le-champ les trois équations fondamentales que l'on doit à Euler ; et comment, de ces équations, qui étaient connues, on aurait pu tirer notre solution nouvelle, à l'aide de quelques simples transformations analytiques : rapprochement toujours instructif en ce qu'il éclaire à la fois les deux méthodes.

CHAPITRE III.

OÙ L'ON RAPPROCHE L'ANALYSE PRÉCÉDENTE DE CELLE D'EULER.

Toute notre analyse est renfermée, comme je l'ai dit, dans le théorème rappelé ci-dessus, par lequel on connaît à chaque instant l'axe et la grandeur du couple accélérateur g qui vient des forces centrifuges, et fait ainsi varier l'axe et la grandeur du couple acquis G dont le corps est actuellement animé.

Il n'y a donc qu'à traduire ce théorème en analyse, pour avoir ce qu'on appelle les *équations du mouvement du corps;* et cette traduction, comme on va le voir, est extrêmement facile.

Équations du mouvement de rotation.

73. Toutes les dénominations précédentes étant conservées, qu'on reprenne un instant les simples lettres A, B, C, pour désigner les trois moments principaux d'inertie du corps.

Les trois quantités Ap, Bq, Cr seront les trois composants L, M, N du couple G dont le corps est animé : et les rotations p, q, r étant regardées comme des fonctions du temps t, les trois fonctions différentielles ou fluxions $A\frac{dp}{dt}$, $B\frac{dq}{dt}$, $C\frac{dr}{dt}$, que je dénoterai plus simplement par $A\dot p$, $B\dot q$, $C\dot r$, seront les trois composants du couple accélérateur qui peut faire varier l'axe et la grandeur du couple acquis G. Or il n'y a ici d'autre couple accélérateur que celui qui naît des forces centrifuges dues à la rotation même du corps, et notre théorème dit :

1°. Que l'axe du couple g est perpendiculaire à l'axe du couple acquis G, ou, en d'autres termes, que le cosinus de leur inclinaison mutuelle est nul. On a donc, en prenant l'expression de ce cosinus, qui est évidemment

$$\frac{Ap.A\dot p + Bq.B\dot q + Cr.C\dot r}{G.g},$$

et, l'égalant à zéro,

$$(1)\qquad A^2 p\dot p + B^2 q\dot q + C^2 r\dot r = 0,$$

ce qui est la *première équation du mouvement.*

2°. Le même théorème dit que l'axe de ce couple g est aussi perpendiculaire à l'axe instantané de la rotation actuelle θ dont les trois projections sur les axes principaux sont respectivement p, q, r. On a donc, comme ci-dessus, en prenant le cosinus de l'inclinaison mutuelle et l'égalant à zéro,

$$(2)\qquad Ap\dot p + Bq\dot q + Cr\dot r = 0,$$

seconde équation du mouvement.

3°. Enfin, le même théorème dit que l'on a, pour la grandeur du couple g, le produit de G par $\theta \sin i$; ce qui donne l'équation

$$g^2 = G^2.\theta^2(1 - \cos^2 i),$$

i étant l'inclinaison de G à θ. Donc, en mettant au lieu de G^2, θ^2, $\cos^2 i$, leurs valeurs en p, q, r, et pour g^2 son expression générale

$$A^2\dot p^2 + B^2\dot q^2 + C^2\dot r^2,$$

on aura

$$(3)\ \ldots A^2\dot p^2 + B^2\dot q^2 + C^2\dot r^2 = (A-B)^2p^2q^2 + (B-C)^2q^2r^2 + (C-A)^2p^2r^2,$$

troisième et dernière équation du mouvement.

COROLLAIRE.

74. Si, de ces trois équations, on tire les valeurs séparées de $A\dot p$, $B\dot q$, $C\dot r$, on trouve sur-le-champ ces transformées équivalentes :

$$A\dot p = (B - C)qr,$$
$$B\dot q = (C - A)pr,$$
$$C\dot r = (A - B)pq;$$

ce sont les équations d'*Euler*, et qui se trouvent ainsi démontrées de la manière la plus simple. Nous pourrions en donner encore d'autres démonstrations aussi rapides ; mais celle-ci me paraît la plus lumineuse, parce qu'on y voit parfaitement ce que ces équations expriment en dynamique.

Et en effet, dans la première, par exemple, le premier membre $A\dot p$ ou $A\frac{dp}{dt}$, est l'expression générale du couple accélérateur estimé autour de l'axe principal Ox ; et le second membre $(B - C)qr$ est la valeur du couple provenant des forces centrifuges, estimé autour du même axe, comme il est facile de s'en assurer en cherchant ce couple d'une manière directe. Or, puisque le corps est ici abandonné à lui-même, c'est-à-dire ne reçoit l'action d'aucun couple étranger, il est clair que la quantité $(B - C)qr$ est ici la seule à laquelle il faille égaler l'expression générale $A\frac{dp}{dt}$. Et la même chose se voit pour les deux autres équations toutes semblables, qui se rapportent aux deux autres axes principaux Oy et Oz.

Remarque.

75. On peut encore remarquer que cette démonstration nous mène de suite aux équations du mouvement, dans le cas général où le corps est soumis à l'action de forces accélératrices étrangères; car il est évident qu'il faudrait alors ajouter au second membre le couple qui provient de ces forces accélératrices autour de l'axe que l'on considère. Ainsi, en désignant par X, Y, Z les forces accélératrices qui agissent sur chaque molécule dm du corps parallèlement aux trois axes principaux, on aurait $\int (Zy - Yz)\,dm$ pour le couple dû à ces forces autour de l'axe principal Ox : et le premier membre $A\frac{dp}{dt}$, qui est l'expression générale du couple accélérateur dont le corps est animé, devrait être égalé à la somme des deux couples $(B-C)\,qr$ et $\int (Zy - Yz)\,dm$, l'un dû aux forces centrifuges et l'autre aux forces accélératrices étrangères. D'où l'on voit avec évidence que les équations générales du mouvement de rotation d'un corps sollicité par des forces quelconques, sont

$$A\frac{dp}{dt} = (B-C)\,qr + \int (Zy - Yz)\,dm,$$

$$B\frac{dq}{dt} = (C-A)\,pr + \int (Xz - Zx)\,dm,$$

$$C\frac{dr}{dt} = (A-B)\,pq + \int (Yx - Xy)\,dm,$$

X, Y, Z étant les forces qui sollicitent chaque molécule du corps, suivant les directions des trois axes principaux.

Quand ces forces sont de nature à se réduire à une force unique passant toujours par le centre de la rotation, les trois couples $\int (Zy - Yz)\,dm$, $\int (Xz - Zx)\,dm$, $\int (Yx - Xy)\,dm$ sont nuls, et les équations reviennent aux trois précédentes, comme si le corps était libre de toute action étrangère; c'est ce premier cas simple et naturel qui fait le principal objet de notre analyse.

II.

Comment on aurait pu déduire notre théorie des trois équations qui précèdent.

76. Considérons les trois équations (1), (2), (3), et voyons les premiers corollaires qui en découlent.

Corollaire I.

On voit d'abord que l'équation différentielle (1) s'intègre immédiatement et donne

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = \textit{constante} = G^2,$$

où je fais la *constante* égale à G^2, parce qu'il est évident que le premier membre exprime le carré du couple G dont le corps est animé. Ainsi cette intégrale répond au théorème de la *conservation de la* grandeur *du couple d'impulsion.*

Corollaire II.

L'équation (2) s'intègre de même et donne

$$A p^2 + B q^2 + C r^2 = \textit{constante} = F.$$

Pour savoir à quoi répond la *constante* F, j'observe que le premier membre étant divisé par θ^2, exprime le moment d'inertie I du corps autour de l'axe de la rotation θ (nº 1). On a donc la constante F égale à $I\theta^2$ qui est évidemment l'expression des forces vives de toutes les molécules du corps : d'où résulte le théorème de la *conservation des forces vives* dans tout le cours de la rotation.

Corollaire III.

Si, au lieu de diviser le premier membre par θ^2, on le divisait par le produit $G\theta$, il est clair que ce premier membre exprimerait le cosinus de l'inclinaison i de l'axe G à l'axe θ. D'où l'on voit que $G\theta \cos i$ est encore l'expression de la constante F; et comme G est constant (corollaire I), il en résulte

$$\theta \cos i = \textit{constante};$$

ce qui donne le théorème de la *conservation de la vitesse angulaire du corps estimée autour de l'axe du couple d'impulsion* G.

Corollaire IV.

On peut encore remarquer que l'équation (2) qui, vue sous la forme

$$\frac{\mathrm{A}p \times p + \mathrm{B}q \times q + \mathrm{C}r \times r}{g \times \theta} = 0,$$

exprime l'égalité à zéro du cosinus de l'inclinaison de g à θ, et par conséquent, la perpendicularité de ces deux axes, exprime encore, si on la regarde sous la forme

$$\frac{\mathrm{A}p \times p + \mathrm{B}q \times q + \mathrm{C}r \times r}{\mathrm{G} \times \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} = 0,$$

la perpendicularité de l'axe G à celui de la rotation $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ qui serait due au couple g. D'où l'on voit que *cet axe, sur lequel les forces centrifuges tendent à faire tourner, est toujours situé dans le plan même du couple d'impulsion.*

Corollaire V.

Enfin, l'équation (3), qu'il est facile de ramener à la forme

$$\frac{g\,dt}{\mathrm{G}} = \theta \sin i\, dt,$$

montre, comme on l'a déjà vu (première partie) que si, au bout d'un instant dt, l'axe OG du couple a passé de sa position actuelle à celle de la diagonale OG′ du rectangle construit sur les deux lignes G et $g\,dt$, et de cette manière a décrit *dans le corps* un angle $\frac{g\,dt}{\mathrm{G}}$; d'un autre côté, par la rotation du corps, cette droite OG′ a tourné en sens contraire d'un angle $\theta \sin i\, dt$ égal au premier, et se trouve ainsi revenue au même lieu OG *dans l'espace absolu;* ce qui répond au théorème de l'*invariabilité du plan du couple* G *dans toute la suite du mouvement.*

Corollaire VI.

Si, dans les deux équations intégrales précédentes, que je mets sous la forme

$$\frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{G}^2}p^2 + \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{G}^2}q^2 + \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{G}^2}r^2 = 1,$$

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{F}}p^2 + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{F}}q^2 + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{F}}r^2 = 1,$$

on regarde p, q, r comme les trois coordonnées d'un point, on voit que ce point, qui fait le *pôle instantané* de la rotation θ, est toujours situé sur les deux ellipsoïdes représentés par ces équations : ellipsoïdes dont le premier a ses trois axes de longueurs réciproques aux trois *moments d'inertie* A, B, C du corps; et le second, aux *racines carrées* de ces mêmes moments. C'est ce dernier que nous avons déjà considéré et nommé l'ellipsoïde *central.*

Le pôle instantané décrit donc sans cesse dans l'intérieur du mobile l'orbe ou la courbe fermée qui résulte de l'intersection de ces deux surfaces.

Si l'on retranche les deux équations l'une de l'autre, on a

$$\mathrm{A}(\mathrm{G}^2 - \mathrm{AF})p^2 + \mathrm{B}(\mathrm{G}^2 - \mathrm{BF})q^2 + \mathrm{C}(\mathrm{G}^2 - \mathrm{CF})r^2 = 0,$$

équation d'une surface conique du second degré, rapportée au même centre et aux mêmes axes que les précédentes. Le pôle instantané étant donc toujours sur cette surface conique, l'axe instantané lui-même y est aussi, et, par conséquent, cet axe décrit dans l'intérieur du corps la surface conique du second degré dont il s'agit.

Corollaire VII.

Si l'on regarde maintenant les trois quantités Ap, Bq, Cr ou L, M, N comme les trois coordonnées d'un point, ce point sera l'extrémité de la ligne G qui marque la grandeur du couple d'impulsion, ou ce qu'on peut nommer le pôle de ce couple. On voit donc par les mêmes équations, qui deviennent,

$$\frac{L^2+M^2+N^2}{G^2}=1,$$

$$\frac{L^2}{AF}+\frac{M^2}{BF}+\frac{N^2}{CF}=1,$$

que le pôle du couple est toujours sur la sphère au rayon G, et sur l'ellipsoïde aux rayons principaux $\sqrt{AF}$, $\sqrt{BF}$, $\sqrt{CF}$, *directement* proportionnels aux racines carrées des trois moments d'inertie A, B, C. Le pôle du couple décrit donc, dans l'intérieur du corps, l'orbe fermé qui résulte de l'intersection de ces deux surfaces; et l'axe lui-même OG trace le cône du second degré représenté par l'équation

$$\frac{G^2-AF}{A}L^2+\frac{G^2-BF}{B}M^2+\frac{G^2-CF}{C}N^2=0,$$

qu'on trouve en retranchant les deux premières l'une de l'autre.

Corollaire VIII.

Si, à la surface de l'ellipsoïde central, qui est représentée par l'équation

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2=F,$$

on conçoit un plan tangent au point dont les coordonnées soient désignées par p, q, r, et si l'on nomme p', q', r' les coordonnées courantes de ce plan, on aura, pour son équation,

$$App'+Bqq'+Crr'=F,$$

ou bien

$$Lp'+Mq'+Nr'=F.$$

Or il est clair que cette équation est celle d'un plan perpendiculaire à la ligne G dont les trois projections sur les axes sont respectivement L, M, N. Donc, le plan qui touche l'ellipsoïde central au pôle instantané, est toujours parallèle au plan du couple d'impulsion. Et comme sa distance au centre est mesurée par $\theta\cos i$, et que $\theta\cos i$ est constante (corollaire III), on voit que ce plan parallèle au plan du couple reste toujours à la même distance du centre de l'ellipsoïde.

Mais ce centre est immobile, et le plan du couple toujours parallèle à lui-même dans l'espace absolu; donc ce plan tangent au pôle est toujours un seul et même plan fixe, et tout le mouvement de l'ellipsoïde central consiste à rouler, sans glisser, sur ce plan fixe, en tournant sur le rayon mené du centre au point de contact avec une vitesse angulaire θ mesurée par ce rayon; etc., etc.

77. On voit avec quelle facilité on pourrait tirer toute notre théorie des trois équations précédentes, à l'aide de quelques simples transformations. Mais ce n'est qu'une apparente fécondité de cette méthode de pur calcul qu'on appelle assez improprement l'*analyse*. Car si les théorèmes sont déjà connus, on découvre bien vite les transformations à faire pour que les équations y répondent; mais quand on n'a aucune idée de ces théorèmes, on ne transforme guère qu'au hasard, et le plus souvent on n'arrive à rien. La vraie analyse est dans l'examen attentif du problème à résoudre, et dans ces premiers raisonnements qu'on fait pour le mettre en équations. Transformer ensuite ces équations, c'est-à-dire les combiner ensemble, ou en poser d'autres évidentes que l'on combine avec elles, n'est au fond que de la synthèse; à moins que l'idée de chaque transformation ne nous soit donnée par quelque vue nouvelle de l'esprit, ou quelque nouveau raisonnement, ce qui nous fait rentrer dans la véritable analyse. Hors de cette voie lumineuse, il n'y a donc plus d'analyse, mais une obscure *synthèse* de formules algébriques que l'on *pose*, pour ainsi dire, l'une sur l'autre, et sans trop prévoir ce que pourra donner cette combinaison. Voilà les idées nettes qu'il faut attacher aux mots : et c'est au fond ce que tout le monde paraît sentir, puisqu'on dit très-bien une *heureuse* transformation, et qu'on ne dit point un *heureux* raisonnement, ni une *heureuse* analyse.

THÉORIE NOUVELLE

DE

LA ROTATION DES CORPS,

PAR M. POINSOT.

TROISIÈME PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

DÉVELOPPEMENT DES CALCULS POUR LA DÉTERMINATION DU LIEU DU CORPS AU BOUT D'UN TEMPS DONNÉ.

1. Si, dans les trois équations différentielles (1), (2), (3) du chapitre précédent, on remet, au lieu des lettres A, B, C qui représentent les trois moments principaux d'inertie, les expressions $m\frac{R^4}{a^2}$, $m\frac{R^4}{b^2}$, $m\frac{R^4}{c^2}$ relatives à l'ellipsoïde central du corps; si l'on intègre les deux premières (1) et (2) et qu'on y mette les deux constantes F et G^2 sous la forme $m\frac{R^4}{k^2}$ et $m^2\frac{R^8}{h^2k^2}$, ce qui est permis, on aura les trois équations

$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}+\frac{r^2}{c^2}=\text{constante}=\frac{1}{k^2},$$

$$\frac{p^2}{a^4}+\frac{q^2}{b^4}+\frac{r^2}{c^4}=\text{constante}=\frac{1}{h^2k^2},$$

$$\frac{p'^2}{a^4}+\frac{q'^2}{b^4}+\frac{r'^2}{c^2}=\frac{k^2(p^2+q^2+r^2)-h^4}{h^2k^4},$$

d'où la lettre m, qui répond à la masse du corps, et la lettre R, à la grandeur de l'ellipsoïde *central*, auront entièrement disparu, comme cela doit être : car il est évident que les *moments d'inertie* du corps A, B, C, la *force vive* $I\theta^2$, le *couple* d'impulsion G sont des quantités homogènes qui peuvent toutes être mises sous cette même forme du produit mR^4 divisé par le carré d'une ligne ou le rectangle de deux autres.

2. Et maintenant, si l'on fait les lignes kp, kq, kr respectivement égales à x, y, z, il viendra, pour les équations du mouvement de rotation, les transformées suivantes :

(1) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

(2) $$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{1}{h^2},$$

(3) $$\frac{\dot{x}^2}{a^4}+\frac{\dot{y}^2}{b^4}+\frac{\dot{z}^2}{c^4}=\frac{u^2-h^2}{h^2k^2},$$

où l'on suppose, pour abréger,

(4) $$u^2=x^2+y^2+z^2.$$

Dans ces équations, il est visible que x, y, z sont les coordonnées du pôle instantané à la surface de l'ellipsoïde central dont les rayons principaux sont a, b, c; que la ligne constante h est la hauteur de ce pôle au-dessus du plan du couple d'impulsion; k, la ligne constante dont la fonction $1:k^2$ représente la *force vive* $I\theta^2$ du système : d'où résulte (à cause de $I\theta^2=G\theta\cos i$), que la grandeur du couple G se trouve ici représentée par $1:hk$.

I.

3. Cela posé, les équations finies (1), (2) et (4) donnent, comme on l'a déjà vu dans la seconde partie de ce Mémoire, et en employant les mêmes abréviations,

$$x^2=\frac{a^4e'^2}{\varepsilon^6}(u^2-\alpha^2),$$

$$y^2=\frac{b^4e''^2}{\varepsilon^6}(u^2-\beta^2),$$

$$z^2=\frac{c^4e^2}{\varepsilon^6}(u^2-\gamma^2).$$

Ensuite, les équations (1) et (2) étant différentiées et combinées avec l'équation différentielle (3), donnent

$$\dot{x}^2=\frac{a^4e'^4}{k^2.b^4c^4}\cdot y^2z^2,$$

$$\dot{y}^2=\frac{b^4e''^4}{k^2.a^4c^4}\cdot z^2x^2,$$

$$\dot{z}^2=\frac{c^4e^4}{k^2.a^4b^4}\cdot x^2y^2.$$

4. Si l'on ajoute ces trois dernières équations, et qu'on y mette, au lieu de x^2, y^2, z^2, leurs valeurs données par les trois précédentes, on trouvera d'abord

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=\dot{s}^2$$

$$=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\frac{-1}{k^2\varepsilon^6}\left[u^4.\Sigma a^4e'^2-u^2.\Sigma a^4e'^2(\beta^2+\gamma^2)+\Sigma a^4e'^2\beta^2\gamma^2\right];$$

et, réduisant le second membre, exactement de la même manière qu'on l'a fait (seconde partie, n° **63**), il viendra

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\frac{-1}{k^2}\left[\begin{array}{c}u^4-u^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)\\-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+2\dfrac{a^2b^2c^2}{h^2}\end{array}\right],$$

ou en employant, pour abréger, les mêmes lettres qu'au n° **61**; faisant de plus,

$$Q-B+2C:h^2=H,$$

et tirant la racine carrée de part et d'autre, on aura

(S) $$\frac{ds}{dt}=\frac{\sqrt{-1}}{k}\sqrt{u^4-Pu^2+H}.$$

Telle est, en fonction du rayon vecteur u, l'expression très-simple de la vitesse $\frac{ds}{dt}$ avec laquelle le pôle instantané décrit son orbe s à la surface de l'ellipsoïde central, et décrit en même temps la courbe σ sur le plan du couple d'impulsion, qui demeure fixe dans l'espace absolu.

5. Pour avoir cette vitesse $\frac{ds}{dt}=\frac{d\sigma}{dt}$ en fonction du temps t, il faut donc maintenant chercher l'expression de u en t; or c'est ce qu'on peut obtenir par un calcul très-facile. Car, comme on a (à cause de $u^2 = x^2 + y^2 + z^2$)

$$u\dot{u} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z},$$

si l'on met, au lieu de x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, leurs valeurs données plus haut, on trouvera

$$u\dot{u} = \frac{ee'e''}{\varepsilon^3} \cdot \frac{\Sigma a^4 e'^2}{k\varepsilon^6} \sqrt{(u^2 - \alpha^2)(u^2 - \beta^2)(u^2 - \gamma^2)},$$

d'où l'on tire, à cause de $\Sigma a^4 e'^2 = \varepsilon^6$, et de $ee'e'' = \varepsilon^3 \sqrt{-1}$, et en se servant des dénominations du n° **61**,

$$\text{(U)} \qquad \dot{u} \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{-1}}{k} \cdot \frac{\sqrt{u^6 - \mathrm{P}u^4 + \mathrm{Q}u^2 - \mathrm{R}}}{u}.$$

Telle est, en fonction de u, l'expression de la vitesse avec laquelle le pôle instantané se rapproche ou s'éloigne alternativement du centre de l'ellipsoïde central, et oscille ainsi suivant le rayon vecteur u, dans la partie qui s'étend du *maximum* au *minimum* de ce rayon; partie qui est $\beta - \alpha$ quand h est $< b$, et $\beta - \gamma$ quand h est $> b$.

6. Si, entre cette équation (U) et la précédente (S), on élimine le temps t, ce qui se fait ici très-simplement en divisant, membre à membre, l'une par l'autre, on aura, en s et u, l'équation différentielle

$$\frac{ds}{du} = \frac{u\sqrt{u^4 - \mathrm{P}u^2 + \mathrm{H}}}{\sqrt{u^6 - \mathrm{P}u^4 + \mathrm{Q}u^2 - \mathrm{R}}};$$

ce qui est exactement la même équation qu'on avait trouvée directement pour la polhodie (seconde partie, n° **63**). On pouvait donc se borner ici à calculer l'une des deux expressions $\frac{ds}{dt}$, $\frac{du}{dt}$; car, en la comparant à celle de $\frac{ds}{du}$ qui nous était déjà connue, on aurait trouvé l'autre : mais il est toujours bon de confirmer les résultats du calcul.

7. Quant à l'imaginaire $\sqrt{-1}$ que l'on voit dans les deux premières expressions, elle n'y est qu'en apparence; car les deux polynômes

$$u^4 - \mathrm{P}u^2 + \mathrm{H} \quad \text{et} \quad u^6 - \mathrm{P}u^4 + \mathrm{Q}u^2 - \mathrm{R}$$

sont ici essentiellement *négatifs*, à cause du rayon vecteur u toujours plus petit que la ligne β, et toujours plus grand que chacune des deux autres α et γ.

II.

8. Maintenant, l'équation différentielle (U), qui ne renferme que les deux variables u et t, étant mise sous la forme

$$dt = \frac{k}{2} \cdot \frac{2\,u\,du}{\sqrt{(u^2 - \alpha^2)(\beta^2 - u^2)(u^2 - \gamma^2)}},$$

se ramène immédiatement aux quadratures.

On aura donc en intégrant, et déterminant la constante arbitraire de manière que le temps t commence quand le rayon vecteur u est à son *maximum* β,

$$t = f(u^2) - f(\beta^2),$$

f désignant ici une certaine fonction de u^2; et de là, par la fonction inverse que je désignerai par f_1, on tirera

$$u^2 = f_1[t + f(\beta^2)],$$

où il est évident que f_1 sera une fonction périodique du temps t.

Ainsi, quoique le temps t croisse à l'infini, la valeur de cette fonction ne peut s'étendre que depuis le *maximum* de u^2, qui est toujours β^2, jusqu'à son *minimum* qui est, ou γ^2, ou α^2 selon qu'on a $h >$ ou $< b$.

En désignant donc par τ le temps que le pôle I met à passer d'un sommet de son orbe s au sommet suivant, temps exprimé, dans le premier cas, par

$$\tau = f(\gamma^2) - f(\beta^2),$$

et dans le second, par

$$\tau = f(\alpha^2) - f(\beta^2),$$

si l'on demande la valeur du rayon u au bout d'un temps quelconque, on pourra commencer par ôter de ce temps donné tous les multiples de 4τ qui y seraient contenus, et conserver seulement le reste, qui ne pourrait être que de la forme

$$t, \quad \text{ou} \quad t+\tau, \quad \text{ou} \quad t+2\tau, \quad \text{ou} \quad t+3\tau,$$

selon que le pôle I serait dans le premier, le deuxième, le troisième ou le quatrième quart de son orbe s.

9. Connaissant la valeur de u^2 en t, si on la suppose substituée à la place de u^2 dans l'équation

$$ds = \frac{dt}{k}\sqrt{\mathrm{P}u^2 - u^4 + \mathrm{H}},$$

on aura par une nouvelle intégration, et en déterminant la constante arbitraire de manière que l'arc s commence avec le temps t,

$$s = \sigma = \mathrm{F}(t) - \mathrm{F}(0).$$

Équation où il faut observer qu'on doit mettre le temps donné t pris dans toute son étendue, et non pas diminué des multiples de 4τ qu'il pourrait contenir, comme il était permis de le faire dans l'expression précédente de u^2.

Ayant ainsi le rayon u et l'arc σ en fonction de t, on en pourra conclure la position du corps au bout d'un temps quelconque t, comme on l'a fait voir à la fin du chapitre précédent.

10. Mais ces intégrations ou quadratures ne peuvent se faire ni algébriquement, ni par des arcs de cercle ou des logarithmes; elles demandent essentiellement l'emploi des transcendantes elliptiques; de sorte que le lieu du corps au bout d'un temps quelconque donné ne peut, en général, se calculer que par la voie des séries, ou au moyen de certaines Tables qu'on aurait construites pour ces fonctions supérieures.

Dans certains cas particuliers, relatifs soit à la direction du couple d'impulsion, soit à l'espèce du corps, la difficulté s'abaisse, et tout se réduit aux règles ordinaires, comme nous le ferons voir un peu plus loin.

III.

Changement des variables s et u dans les formules qui précèdent.

11. Si, dans les expressions précédentes de $\frac{ds}{dt}, \frac{du}{dt}$, on change s en σ, et u^2 en $\nu^2 + h^2$, ce qui donne $u\dot{u} = \nu\dot{\nu}$, on aura les formules nouvelles

$$\dot{\sigma}^2 = \frac{-1}{k^2}\left[(\nu^2 + h^2)^2 - \mathrm{P}(\nu^2 + h^2) + \mathrm{H}\right]$$

$$\dot{\nu}^2 = \frac{-1}{k^2\nu^2}\left[(\nu^2 + h^2)^3 - \mathrm{P}(\nu^2 + h^2)^2 + \mathrm{Q}(\nu^2 + h^2) - \mathrm{R}\right],$$

où ν est le rayon vecteur allant du centre de la courbe σ au pôle instantané qui la décrit.

12. Or, en nommant φ l'angle que ce rayon ν fait avec une droite quelconque fixe située dans le plan de cette courbe σ, on a évidemment

$$\nu^2\dot{\varphi}^2 = \dot{\sigma}^2 - \dot{\nu}^2.$$

Mettant au lieu de $\dot{\sigma}^2$ et $\dot{\nu}^2$ leurs valeurs ci-dessus, et multipliant tout par $k^2\nu^2$, il vient

$$\begin{aligned} k^2\nu^4\dot{\varphi}^2 = &- [(\nu^2 + h^2)^2 - \mathrm{P}(\nu^2 + h^2) + \mathrm{H}] \\ &+ [(\nu^2 + h^2)^3 - \mathrm{P}(\nu^2 + h^2)^2 + \mathrm{Q}(\nu^2 + h^2) - \mathrm{R}], \end{aligned}$$

ou bien, en développant les binômes, et ordonnant le second membre par rapport à ν,

$$k^2\nu^4\dot{\varphi}^2 = \left[\begin{array}{l} h^4\nu^4 + (2h^4 - \mathrm{P}h^2 + \mathrm{Q} - \mathrm{H})\nu^2 \\ \qquad + (h^6 - \mathrm{P}h^4 + \mathrm{Q}h^2 - \mathrm{R}) \end{array}\right].$$

Maintenant, si dans le terme $(2h^4 - \mathrm{P}h^2 + \mathrm{Q} - \mathrm{H})\nu^2$, on met, au lieu de $\mathrm{P}h^2$ sa valeur $2\mathrm{A}h^2 - \mathrm{B}$, et au lieu de $\mathrm{Q} - \mathrm{H}$ sa valeur $\frac{\mathrm{B}h^2 - 2\mathrm{C}}{h^2}$, on trouvera l'équation

$$k^2\nu^4\dot{\varphi}^2 = h^2\nu^4 + 2\,\frac{h^6 - \mathrm{A}h^4 + \mathrm{B}h^2 - \mathrm{C}}{h^3}\cdot h\nu^2 + (h^6 - \mathrm{P}h^4 + \mathrm{Q}h^2 - \mathrm{R}),$$

et en posant, pour abréger, comme on l'a déjà fait (seconde partie, n° **61**),

$$h^6 - A h^4 + B h^2 - C, \quad \text{ou} \quad (h^2 - a^2)(h^2 - b^2)(h^2 - c^2) = D,$$
$$h^6 - P h^4 + Q h^2 - R, \quad \text{ou} \quad (h^2 - \alpha^2)(h^2 - \beta^2)(h^2 - \gamma^2) = \Delta,$$

et observant qu'on a, entre D et Δ, la relation

$$\Delta = \frac{D^2}{h^6},$$

on aura l'équation

$$k^2 v^2 \dot{\varphi}^2 = h^2 v^4 + 2 \frac{D}{h^3} \cdot h v^2 + \frac{D^2}{h^6},$$

où il est évident que le second membre est le carré parfait du binôme $hv^2 + \frac{D}{h^3}$.

13. Ainsi l'on a, en extrayant la racine carrée de part et d'autre,

$$k v^2 \dot{\varphi} = h v^2 + \frac{D}{h^3};$$

d'où, en dégageant φ et remettant pour D sa valeur

$$(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)(h^2 - c^2),$$

on tire

$$\dot{\varphi} \quad \text{ou} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{h}{k} + \frac{(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)(h^2 - c^2)}{k h^3 v^2},$$

expression très-simple de la vitesse angulaire avec laquelle le pôle instantané de rotation tourne autour du centre de l'herpolhodie σ; cette vitesse, comme on le voit, est composée d'une partie constante, et d'une partie variable qui est réciproque au carré du rayon vecteur v, et, par conséquent, périodique comme ce rayon.

14. Si l'on divise cette expression de $\frac{d\varphi}{dt}$ par celle de $\frac{dv}{dt}$, donnée plus haut (n° **12**), on aura l'expression de $\frac{d\varphi}{dv}$ en fonction de v, c'est-à-dire l'équation différentielle de la courbe plane σ, entre son rayon vecteur v et l'angle φ que ce rayon décrit autour du centre de cette

courbe σ; cette équation sera donc

$$\frac{d\varphi}{dv} = \frac{h v^2 + \sqrt{\Delta}}{v\sqrt{(v^2 + h^2)^3 - P(v^2 + h^2)^2 + Q(v^2 + h^2) - R}},$$

ce qui s'accorde parfaitement avec l'équation polaire de l'herpolhodie telle qu'on l'a trouvée directement (seconde partie, n° **66**).

On peut remarquer que cette équation ne renferme que les quatre constantes a, b, c et h, dont les trois premières sont relatives à l'espèce du corps, et la quatrième h, à la position du couple d'impulsion. Et il est clair que la constante k n'y doit pas entrer, puisque la courbe décrite par le pôle instantané ne peut dépendre de la grandeur $1 : hk$ du couple qui a frappé le corps, ni par conséquent de la constante k qui répond aux *forces vives*: la courbe est décrite plus ou moins vite, mais elle est toujours la même pour les mêmes données a, b, c et h.

15. On peut employer, si l'on veut, ces nouvelles variables v et φ, au lieu des précédentes, pour avoir la position du corps au bout d'un temps quelconque t. Car, en intégrant la première équation qui donne l'expression de $\frac{dv}{dt}$ en fonction de v, et faisant commencer le temps t avec le rayon vecteur

$$v = \sqrt{\beta^2 - h^2},$$

on aura, comme plus haut (n° **8**),

$$t = f(v^2 + h^2) - f(\beta^2),$$

ou

$$v^2 = f_1(t + f\beta^2) - h^2.$$

De cette valeur v^2 on conclut celles des trois coordonnées x, y, z du pôle instantané à la surface de l'ellipsoïde central, puisque chacune d'elles x, y, z est donnée en u^2 (n° **3**), et, par conséquent, en $v^2 + h^2$: on a donc déjà la position de ce pôle sur l'ellipsoïde central.

Mettant ensuite cette valeur de v^2 en t dans la seconde équation qui donne $\frac{d\varphi}{dt}$ en fonction de v, et intégrant, en faisant commencer l'angle φ avec le temps t, on aura

$$\varphi = \mathrm{f}(t) - \mathrm{f}(0);$$

ce qui donnera la position du pôle instantané sur le plan fixe du couple d'impulsion : et de là on pourra conclure la position du corps dans l'espace absolu au bout du temps t.

Mais, quelques coordonnées qu'on emploie, l'intégration ramènera toujours, ce qui est ici fort naturel, à la théorie des fonctions *elliptiques :* théorie aujourd'hui très-connue, et à laquelle je renvoie le lecteur, pour ne pas m'écarter du principal objet de ce Mémoire. Je me bornerai donc à quelques exemples où les quadratures se font par les règles ordinaires.

Application des formules à quelques cas particuliers qui n'exigent pas l'emploi des transcendantes elliptiques.

I.

Cas particuliers relatifs à la position du couple d'impulsion.

16. Il est presque inutile de s'arrêter au cas particulier de $h=a$; car il n'y a, sur la surface de l'ellipsoïde central, qu'un seul point où le plan tangent puisse être à une distance $h=a$ du centre de cet ellipsoïde. On a donc alors $u=a$, et le corps tourne constamment, avec une vitesse angulaire $\theta = a:k$, autour de son axe majeur a, lequel se confond avec l'axe du couple d'impulsion et demeure immobile et dans le corps et dans l'espace absolu.

Il n'y a ici qu'une seule remarque à faire : c'est que le pôle instantané I étant immobile, il semble que la vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$ de ce pôle autour de l'axe du couple devrait être nulle, aussi bien que sa vitesse absolue $\frac{d\sigma}{dt}$, et non pas égale à la quantité finie $\frac{a}{k}$ que donne l'expression générale de $\frac{d\varphi}{dt}$ quand on y fait $h=a$. Mais il faut observer que la vitesse angulaire d'un point autour d'un centre fixe est une quantité qui ne dépend pas de la distance de ce point au centre que l'on considère. Ainsi, quoique le rayon vecteur φ du pôle I soit ici égal à zéro, et que ce pôle soit réellement immobile, on n'en peut pas conclure que sa vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$ soit aussi égale à zéro; et

voilà pourquoi on la trouve égale à la quantité finie $a:k$. Et l'on peut bien voir d'ailleurs que cette valeur est la véritable; car, dans notre analyse, où la grandeur du couple d'impulsion est exprimée par $\frac{1}{hk}$, et le moment d'inertie du corps par $\frac{1}{a^2}$, il est clair que le quotient $\frac{a}{k}$ exprime la rotation θ, c'est-à-dire la vitesse angulaire d'un point quelconque de ce corps, et, par conséquent, celle du point particulier qui fait le pôle lui-même.

On peut dire exactement les mêmes choses dans le cas particulier de $h=c$, c'est-à-dire quand le plan du couple sera donné tangent au pôle *mineur* de l'ellipsoïde : il n'y a qu'à changer a en c.

Mais il n'en est pas de même dans le cas singulier de h égal à l'axe *moyen* b; car, outre le pôle moyen B, il y a sur l'ellipsoïde une infinité de points I où le plan tangent du couple peut être à la même distance $h=b$ du centre de cet ellipsoïde; et cette suite de points forme les deux ellipses singulières dont j'ai précédemment parlé (seconde partie, n° **68**), et sur l'une desquelles le pôle instantané I peut se mouvoir dans toute la suite du temps. C'est ce qu'il est bon de développer.

Solution dans le cas singulier de $h=b$.

17. Si l'on suppose $h=b$, on trouve d'abord ces réductions,

$$\alpha^2=\gamma^2=b^2;$$

et l'équation différentielle du n° **8** devient

$$\frac{2\,dt}{k}=\frac{2u\,du}{(u^2-b^2)\sqrt{\beta^2-u^2}},$$

laquelle s'intègre par logarithmes, et donne, en y faisant, pour abréger,

$$n^2=\beta^2-b^2,$$

l'équation

$$\frac{2nt}{k}=l.\frac{n+\sqrt{\beta^2-u^2}}{n-\sqrt{\beta^2-u^2}};$$

intégrale où l'on a déterminé la constante arbitraire par la supposition que le temps t commence quand le rayon vecteur $u = \beta$.

On a donc, en passant des logarithmes aux exponentielles, l'équation

$$e^{\frac{2nt}{k}} = \frac{n + \sqrt{\beta^2 - u^2}}{n - \sqrt{\beta^2 - u^2}};$$

d'où l'on tire, en résolvant par rapport à u^2,

$$u^2 = b^2 + \frac{4n^2}{\left(e^{\frac{nt}{k}} + e^{\frac{-nt}{k}}\right)^2},$$

pour l'expression du rayon vecteur u en fonction du temps t.

Or chacune des coordonnées x, y, z du pôle instantané I étant elle-même exprimée en u^2, on en aura la valeur en t, et, par conséquent, on saura quelle est, sur la surface de l'ellipsoïde central, la position du pôle I au bout d'un temps quelconque t.

Pour avoir maintenant sa position sur le plan fixe du couple d'impulsion, au bout du même temps, on prendra, pour les deux coordonnées de ce point, le rayon vecteur υ émané du centre de l'herpolhodie σ, avec l'angle φ que ce rayon fait avec une droite fixe dans le plan de cette courbe.

Or, à cause de $h = b$, on a

$$\upsilon^2 = u^2 - b^2,$$

et l'équation précédente donne sur-le-champ

$$\upsilon = \frac{2n}{e^{\frac{nt}{k}} + e^{\frac{-nt}{k}}}.$$

Ensuite, comme l'expression différentielle de $\frac{d\varphi}{dt}$ (n° **13**) se réduit ici (à cause de $h = b$) à l'expression très-simple $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{h}{k}$, on aura tout de suite,

$$\varphi = \frac{b}{k}\, t,$$

en faisant commencer l'angle φ avec le temps t.

Connaissant donc, en fonction de t, les deux coordonnées polaires υ et φ du pôle I sur le plan fixe du couple d'impulsion, et ayant déjà les trois coordonnées x, y, z du même pôle sur la surface de l'ellipsoïde central, on en conclura, comme on l'a dit plus haut, la position que le corps doit occuper dans l'espace au bout du temps t, et la question sera ainsi complétement résolue.

18. De l'équation ci-dessus,

$$\varphi = \frac{b}{k}\, t,$$

si l'on tire t en φ, et qu'on le mette dans l'expression précédente de υ, on a

$$\upsilon = \frac{2n}{e^{\frac{n\varphi}{b}} + e^{\frac{-n\varphi}{b}}}$$

pour l'équation polaire de la double spirale σ décrite par le pôle instantané dans l'espace absolu ; ce qui s'accorde parfaitement avec ce qu'on avait déjà trouvé dans la seconde partie de ce Mémoire. FIG. 25.

II.

Cas particuliers relatifs à l'espèce du corps.

L'ellipsoïde central du corps peut être un *sphéroïde* elliptique allongé, ou aplati vers les pôles, ce qui convient à tous les corps de révolution, et à une infinité d'autres où le corps a deux de ses trois moments principaux d'inertie égaux entre eux : et enfin, l'ellipsoïde central peut être une sphère parfaite, ce qui convient, non-seulement aux corps sphériques ou réguliers, mais encore à une infinité d'autres.

19. Soit d'abord le cas d'un sphéroïde allongé, c'est-à-dire le cas de

$$b = c;$$

on trouve alors

$$u^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \frac{(a^2 + b^2)\,h^2 - a^2 b^2}{h^2} = constante,$$

et, par conséquent,

$$\upsilon^2 = \beta^2 - h^2 = \frac{(a^2 - h^2)(h^2 - b^2)}{h^2} = constante ;$$

d'où l'on voit d'abord que la vitesse angulaire θ du corps autour du rayon instantané u, et la vitesse angulaire $\theta \sin i$ autour du rayon v, sont toutes deux constantes, et respectivement égales à

$$\theta = \frac{\beta}{k}, \quad \theta \sin i = \frac{\sqrt{\beta^2 - h^2}}{k}.$$

On trouve ensuite, 1° que la polhodie s est un cercle décrit autour de l'axe du sphéroïde, d'un rayon ρ exprimé par

$$\rho = \frac{b^2 . \sqrt{a^2 - h^2}}{h . \sqrt{a^2 - b^2}},$$

et que la circonférence en est parcourue par le pôle instantané I avec une vitesse uniforme $\frac{ds}{dt}$ dont la valeur est

$$\frac{ds}{dt} = \frac{b^2}{hk} . \frac{\sqrt{a^2 - h^2} . \sqrt{h^2 - b^2}}{h};$$

d'où résulte, en divisant $\frac{ds}{dt}$ par le rayon ρ, la valeur

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2} . \sqrt{h^2 - b^2}}{hk}$$

pour la vitesse angulaire de ce pôle autour de l'axe du sphéroïde.

2°. Que l'herpolhodie σ est un autre cercle d'un rayon

$$v = \sqrt{\beta^2 - h^2},$$

ou

$$v = \frac{\sqrt{a^2 - h^2} . \sqrt{h^2 - b^2}}{h},$$

et que la circonférence de ce cercle décrit autour de l'axe fixe du couple d'impulsion, est parcourue avec une vitesse uniforme $\frac{d\sigma}{dt}$ parfaitement égale à la précédente $\frac{ds}{dt}$; d'où résulte, en divisant $\frac{d\sigma}{dt} = \frac{ds}{dt}$ par le rayon v, le quotient $\frac{b^2}{hk}$ pour la vitesse angulaire du pôle I autour de l'axe fixe dans l'espace absolu : valeur qui s'accorde parfaitement, comme cela doit être, avec celle que donnerait l'expression générale de $\frac{d\varphi}{dt}$ si l'on y faisait $b = c$.

On voit donc qu'ici tout est uniforme et circulaire, et qu'il n'est pour ainsi dire besoin d'aucune intégration; car on a immédiatement

$$u = \beta, \quad v = \sqrt{\beta^2 - h^2}, \quad s = \sigma = \frac{b^2}{hk} . \sqrt{\beta^2 - h^2} . t, \quad \varphi = \frac{b^2}{hk} . t,$$

en faisant commencer l'angle φ et les arcs s et σ avec le temps t.

20. Dans le cas particulier de $b = a$, ce qui répond au cas d'un sphéroïde central aplati vers les pôles, on trouverait, *mutatis mutandis*, des expressions toutes semblables aux précédentes.

21. Enfin, si l'on avait les axes extrêmes a et c égaux entre eux, ce qui entraînerait l'égalité des trois axes a, b, c et de la ligne h, il n'y aurait plus rien qui ne fût, pour ainsi dire, évident de soi-même. Le corps tournerait constamment autour d'un même diamètre $2a$ avec une vitesse angulaire $\theta = a : k$.

Il faut toutefois se rappeler que ce cas si particulier de

$$a = b = c = h$$

convient non-seulement aux corps homogènes qui sont sphériques ou réguliers, mais encore à une infinité d'autres de constitution quelconque.

CHAPITRE II.

NOUVELLE IMAGE DE LA ROTATION DES CORPS.

22. Soient toujours O le centre du corps; OG l'axe du couple d'impulsion; OI l'axe instantané de la rotation θ, et i l'inclinaison mutuelle de ces deux axes. FIG. 21.

On peut toujours supposer qu'à chaque instant dt la rotation θ soit décomposée en deux : l'une autour de l'axe OG du couple, et l'autre autour d'une droite OT perpendiculaire à OG dans le plan des deux axes OG et OI.

Or, par la première rotation $\theta \cos i$ autour de OG, cet axe OG reste immobile dans le corps et dans l'espace; mais, par la seconde $\theta \sin i$ autour de OT, il y a une certaine ligne OG′ du corps qui vient se placer sur OG dans l'espace : de sorte que OG, qui est réellement fixe dans l'espace, paraît décrire un angle GOG′ dans l'intérieur du corps. Or c'est le plan de cet angle infiniment petit, et dont la valeur est

$$\mathrm{GOG'} = \theta \sin i \,.\, dt,$$

qui forme l'élément de la surface conique tracée par l'axe OG du couple dans l'intérieur du corps.

23. La ligne OT, qui est perpendiculaire au plan de cet angle, est donc normale à la surface de ce cône. La suite des normales OT correspondantes à toutes les positions de la génératrice OG forme donc, dans l'intérieur du corps, une autre surface conique de même sommet normale à la première. Et il est évident que ces deux cônes que je représente, pour abréger, par (OG) et (OT), sont en quelque sorte *réciproques* l'un de l'autre : car les génératrices de l'un peuvent être regardées comme la suite des normales à la surface de l'autre.

24. On trouve aisément (seconde partie, n° **76**, corollaire VII) que la surface conique, décrite par l'axe OG du couple, a pour équation

$$(h^2 - a^2)\,x^2 + (h^2 - b^2)\,y^2 + (h^2 - c^2)\,z^2 = 0;$$

on peut donc en conclure que l'autre surface conique, décrite par OT toujours normale à la première, a pour équation

$$\frac{x^2}{h^2 - a^2} + \frac{y^2}{h^2 - b^2} + \frac{z^2}{h^2 - c^2} = 0.$$

25. On voit donc :

Que ces surfaces sont celles de deux cônes droits, à bases elliptiques, autour d'un axe commun qui est, ou le grand axe a, ou le petit axe c, de l'ellipsoïde central, selon qu'on a $h > b$, ou $h < b$;

Que, dans le cas singulier de $h = b$, le premier cône (OG), décrit par l'axe du couple, se réduit à l'un des deux plans représentés par l'équation

$$z = x\sqrt{\frac{a^2 - h^2}{h^2 - c^2}};$$

et le second cône (OT), à une simple droite OT perpendiculaire à ce plan;

Et qu'enfin, dans le cas où l'ellipsoïde central du corps est de révolution, les deux cônes sont des cônes droits à bases circulaires autour de l'axe du sphéroïde.

26. Voyons maintenant, à l'aide de ces images, comment s'exécute dans l'espace le mouvement d'un corps qui a reçu l'impulsion d'un couple dans une direction quelconque donnée.

Pour mieux fixer les idées et simplifier le discours, on peut considérer le plan MON du couple (qui reste fixe dans l'espace) comme étant le plan *horizontal*, et, par conséquent, l'axe OG de ce couple comme la *verticale*.

Cela posé, il est visible que, dans tout le cours du mouvement, la surface du premier cône (OG) doit passer par la verticale OG, et que la surface du second (OT) doit être en contact avec le plan horizontal MN. Car, la ligne OG étant toujours normale à la surface du cône (OT), et perpendiculaire au plan MN, ce plan horizontal MN ne peut être autre chose que le plan tangent à la surface. Donc, *pendant le mouvement du corps, le cône* (OT) *demeure perpétuellement en contact avec le plan fixe du couple appliqué.*

27. Actuellement, il est bien facile de se représenter le mouvement du corps par celui de ce cône intérieur (OT), qui est attaché au corps et l'entraîne avec soi dans l'espace absolu.

En effet, par la rotation $\theta \sin i$ autour de la génératrice OT, ce cône roule sur le plan horizontal MN et amène en contact, au bout d'un instant dt, une certaine génératrice infiniment voisine OT′ : par la seconde rotation $\theta \cos i$ autour de la verticale OG, cette génératrice OT′ glisse sur ce même plan en tournant d'un certain angle infiniment petit T′OT″. Ainsi, par les deux rotations composantes de θ, la génératrice OT, ou la ligne de contact du cône avec le plan MN a décrit sur ce plan, au bout d'un instant dt, un angle TOT″ composé des deux angles TOT′, T′OT″ dont on vient de parler. FIG. 21.

Pour se représenter le mouvement du corps, il faut donc concevoir qu'à chaque instant dt, on fait rouler le cône (OT) sur le plan fixe MN, par l'angle

$$TOT' = d\omega,$$

dû à la rotation $\theta \sin i$ autour de la ligne de contact OT; et, ensuite, qu'on le fait glisser, sur ce même plan, par l'angle

$$T'OT'' = d\psi,$$

dû à la rotation $\theta \cos i$ autour de la verticale OG : et par ces deux mouvements, exécutés l'un après l'autre, on a le lieu du corps au bout de cet instant dt.

28. Dans la nature, ces deux mouvements ne sont pas exécutés l'un après l'autre, ils sont *simultanés,* ou plutôt ils n'en font qu'un seul qui est le composé de ces deux-là. Mais, comme on ne considère qu'un temps infiniment petit dt, les deux espaces qu'un point quelconque du corps tend à décrire en vertu des deux rotations $\theta \sin i$ et $\theta \cos i$, sont censés *rectilignes,* comme les deux côtés d'un parallélogramme : et ce point étant porté d'abord le long de l'un de ces côtés, et ensuite sur une ligne égale et parallèle à l'autre, se trouve alors au bout de la diagonale, c'est-à-dire au même lieu de l'espace où il serait arrivé par son mouvement naturel en suivant cette diagonale. Si donc on imagine que cette double opération, que je viens de décrire, soit répétée pour chaque partie infiniment petite dt du temps t, on aura la suite des lieux où le corps passe dans le cours de sa rotation, ou l'image fidèle de son mouvement dans l'espace.

Mais si l'on demandait simplement de *marquer le lieu où se trouvera le corps au bout d'un temps quelconque,* sans s'occuper de la route que le corps suit pour y arriver, on n'aurait pas besoin de supposer que la double opération dont il s'agit soit répétée à chaque instant. On pourrait d'un seul coup faire rouler le cône (OT) par un angle fini ω égal à la somme de tous les angles TOT' que la génératrice OT trace à la surface de ce cône pendant le temps donné t; et, ensuite, le faire glisser en tournant autour de la verticale OG par un angle ψ égal à la somme de tous les angles T'OT'' qui sont dus à la rotation du corps autour de cette verticale pendant le même temps t. Par ces deux opérations, exécutées l'une après l'autre, et dans l'ordre qu'on voudra, le corps, il est vrai, n'aurait pas suivi le mouvement qu'il a dans la nature, mais il se trouverait actuellement posé dans le même

lieu de l'espace où il arrive par son mouvement naturel au bout du temps t. D'où l'on voit que le problème de déterminer le lieu du corps au bout d'un temps quelconque, se réduit à chercher les deux sommes ou intégrales

$$\omega = \int (TOT'), \quad \psi = \int (T'OT''),$$

en fonction du temps t.

29. Quant à la seconde intégrale ψ, elle se trouve sur-le-champ; car il est évident qu'on a

$$T'OT'' = d\psi = \theta \cos i \,.\, dt;$$

or on a trouvé

$$\theta \cos i = const. = \frac{h}{k};$$

on a donc

$$d\psi = \frac{h}{k} \cdot dt,$$

d'où l'on tire

$$\psi = \frac{h}{k} \cdot t,$$

en faisant commencer l'angle ψ avec le temps t.

Mais l'autre intégrale

$$\omega = \int (TOT')$$

ne se trouve pas aussi aisément : il faut commencer par chercher l'expression différentielle de l'angle TOT'.

Pour cela je remarque que cet angle TOT', ajouté à l'angle T'OT'', forme l'angle TOT'' que la projection de l'axe instantané OI décrit autour de l'axe du couple; car le point T est la projection continuelle du pôle I sur le plan de ce couple. On a donc, en nommant $d\varphi$ ce dernier angle,

$$d\omega + d\psi = d\varphi :$$

or on a trouvé précédemment

$$d\varphi = \theta \cos i \,.\, dt + \frac{(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)(h^2 - c^2)}{h^3 \,.\, k^3 \,.\, \theta^2 \sin^2 i} \cdot dt;$$

on a donc, en comparant les deux expressions de $d\varphi$,

$$d\omega = \frac{(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)(h^2 - c^2)}{h^3 \,.\, k^3 \,.\, \theta^2 \sin^2 i} \cdot dt,$$

d'où l'on tire

$$\omega = \frac{(h^2-a^2)(h^2-b^2)(h^2-c^2)}{h^3 k}\int\frac{dt}{k^2\theta^2-h^2}.$$

Pour avoir ω, il faudra donc mettre d'abord, au lieu de θ^2, sa valeur en fonction de t, et puis intégrer l'expression $\int dt:(k^2\theta^2-h^2)$; mais cette intégrale demande encore l'emploi des fonctions elliptiques.

30. Il faut remarquer que les lignes h et k étant essentiellement positives, et $d\psi$ étant égal à $\frac{h}{k}dt$, cet angle $d\psi$ peut toujours être regardé comme ayant le même signe $+$; mais l'angle $d\omega$ a tantôt le signe $+$ et tantôt le signe $-$, selon que h est $<$ ou $>$ b.

FIG. 21. Si $h<b$, le cône OT entoure le petit axe c de l'ellipsoïde central, et, dans ce cas, l'angle $d\omega$, de même signe que $d\psi$, *s'ajoute* à cet angle pour former l'angle $d\varphi$ que la projection de l'axe instantané décrit autour de l'axe du couple.

FIG. 22. Si $h>b$, le cône (OT) entoure le grand axe a; et, dans ce cas, l'angle $d\omega$, de signe contraire à $d\psi$, doit en être retranché pour former l'angle $d\varphi$.

31. Enfin, dans le cas singulier de $h=b$, le cône (OT) se réduit à une droite OT située dans le plan des axes extrêmes a et c, et inclinée sur a d'un angle dont la tangente est $-\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}}$: l'angle $d\omega$ est *nul*, et $d\varphi$ se réduit simplement à l'angle

$$d\psi=\frac{h}{k}dt.$$

Ainsi, dans le cas de $h=b$, il existe dans le corps un axe *singulier* OT qui a la propriété de décrire uniformément le plan fixe MON du couple, avec une vitesse constante

$$\frac{h}{k}=\frac{b}{k},$$

tandis que le corps tourne autour de cet axe singulier avec une vitesse variable

$$\theta\sin i=\sqrt{\theta^2-\frac{b^2}{k^2}}.$$

Dans ce cas, on n'a besoin que des règles ordinaires du calcul intégral pour déterminer la position du corps au bout d'un temps donné t. Car, pour amener le corps dans cette position, il suffirait de le faire tourner d'abord autour de l'axe du couple d'un angle

$$\psi=\frac{b}{k}t;$$

et ensuite, de le faire tourner sur son axe singulier OT, d'un angle τ égal à $\int\theta\sin i.dt$. Or, dans le cas de $h=b$, nous avons trouvé, pour l'expression de $\theta\sin i$ en fonction de t,

$$\theta\sin i=\frac{2n}{k}\cdot\frac{e^{\frac{nt}{k}}}{1+e^{\frac{2nt}{k}}},$$

où e désigne la base des logarithmes de Néper, et n la valeur du radical $\sqrt{\beta^2-b^2}$. Multipliant donc par dt cette expression de $\theta\sin i$, intégrant, et faisant commencer l'arc τ avec le temps t, on a

$$\tau=2\left(\text{arc tang}\,e^{nt:k}-\frac{\pi}{4}\right).$$

32. Les deux cas de $h=a$, ou $h=c$ n'ont aucune difficulté; car les axes OI, OG se confondent entre eux et avec l'axe a, ou l'axe c du corps; et tout se réduit à une simple rotation constante $h:k$, autour de cet axe a, ou c, qui demeure immobile dans l'espace absolu.

33. Si l'ellipsoïde central a deux de ses axes égaux entre eux, le cône (OT) est un cône droit à base circulaire autour de l'axe de révolution de ce sphéroïde. Alors $\theta\sin i$ est constant, et, par conséquent, $d\omega$ est constant, aussi bien que $d\psi$ et $d\varphi$, et l'on a sur-le-champ la valeur de ces angles pour un temps quelconque t.

Si l'ellipsoïde central a ses trois axes égaux et devient une sphère, tout se réduit à un mouvement simple de rotation autour du diamètre qui fait l'axe du couple appliqué G.

Tous ces cas particuliers n'ont aucune espèce de difficulté et se résolvent d'eux-mêmes : il n'y a de remarquable que le cas singulier de $h=b$ qui se résout par l'intégration de la différentielle $\int\theta\sin i.dt$, laquelle ne dépend que des fonctions exponentielles et circulaires.

Remarque I.

34. J'ai trouvé plus haut l'expression de l'angle $d\omega$ par celle de l'angle $d\varphi$, qui nous était déjà connue (n° **13**). Mais cet angle $d\omega$, que trace le cône (OT) en roulant sur le plan du couple, peut se trouver aussi d'une manière directe, comme on va le voir dans l'article suivant, ce qui servira à confirmer notre analyse.

Au point T de la surface de ce cône (OT), la ligne de moindre courbure est évidemment la génératrice OT; et, par conséquent, la ligne de plus grande courbure est perpendiculaire à cette génératrice.

Considérons sur cette ligne de courbure l'arc infiniment petit ds qui se couche en un instant dt sur le plan MN quand le cône roule sur ce plan en vertu de la rotation $\theta \sin i$ qu'il a sur sa génératrice actuelle OT. Il est évident que $\theta \sin i . dt$ est l'angle de contingence, c'est-à-dire l'angle formé par les deux tangentes menées aux extrémités de l'arc ds, ou, ce qui revient au même, l'angle formé par les deux normales menées à la surface du cône en ces deux points. Or cet angle est exprimé par $\frac{ds}{\text{R}}$, en nommant R le rayon de la courbure. On a donc

$$\theta \sin i . dt = \frac{ds}{\text{R}}.$$

Mais l'angle formé par les deux génératrices voisines OT et OT′ qui vont du point O aux deux bouts du même arc ds, et que nous avons nommé $d\omega$, est évidemment exprimé par

$$d\omega = \frac{ds}{\text{OT}} = \frac{ds}{k\theta \sin i};$$

on a donc, pour l'expression de $d\omega$,

$$d\omega = \frac{\text{R}}{k}\, dt,$$

où R désigne le rayon de la plus grande courbure à la surface du cône (OT), au point T extrémité de la génératrice

$$\text{OT} = k\theta \sin i.$$

Or, l'équation de la surface conique (OT) étant

$$\frac{x^2}{h^2 - a^2} + \frac{y^2}{h^2 - b^2} + \frac{z^2}{h^2 - c^2} = 0,$$

le rayon R de la courbure en un point quelconque dont les coordonnées seraient x, y, z, est exprimé par

$$\text{R} = \frac{(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)\left[\sqrt{z^2 + \frac{(h^2 - c^2)^2}{(h^2 - b^2)^2}y^2 + \frac{(h^2 - c^2)^2}{(h^2 - a^2)^2}x^2}\right]^3}{(h^2 - c^2)(x^2 + y^2 + z^2)},$$

et, comme le point T dont il s'agit n'est pas un point quelconque de la surface du cône, mais un point qui doit se trouver en même temps sur la surface de l'ellipsoïde dont l'équation est

$$\frac{x^2}{(h^2 - a^2)^2} + \frac{y^2}{(h^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(h^2 - c^2)^2} = \frac{1}{h^2},$$

le trinôme qui est sous le radical se réduit ici à la constante $\frac{(h^2 - c^2)^2}{h^2}$. En substituant cette valeur, il vient donc pour R, cette expression

$$\text{R} = \frac{(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)(h^2 - c^2)}{h^3(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Or on a

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{OT}^2 = k^2\theta^2 \sin^2 i;$$

il vient donc, pour l'expression de $d\omega = \frac{\text{R}}{k}\, dt$,

$$d\omega = \frac{(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)(h^2 - c^2)}{h^3 . k^3 . \theta^2 . \sin^2 i} . dt,$$

ce qui s'accorde parfaitement avec ce qu'on avait trouvé plus haut par une voie différente.

Remarque II.

35. Je ferai encore ici une remarque importante pour montrer comment, dans le cas de $h > b$, le mouvement angulaire $d\varphi$ du pôle instantané I de rotation est égal à la *différence* $d\psi - d\omega$ de l'angle $d\psi$ par lequel le cône (OT) glisse sur le plan du couple, à l'angle $d\omega$ par FIG. 23.

lequel ce cône roule sur le même plan; tandis que, dans le cas de $h<b$, l'angle $d\varphi$ est égal à la *somme* $d\psi + d\omega$ de ces deux angles.

Pour plus de clarté, considérons les choses au moment où le pôle instantané I traverse l'ellipse moyenne (ac) de l'ellipsoïde central. Si l'on mène en I la tangente à cette ellipse, qu'on abaisse sur elle la perpendiculaire OP, et qu'on achève le rectangle IPOT ; on voit que OP sera la direction de l'axe du couple d'impulsion, et OT la génératrice actuelle du cône (OT); et comme OI est situé dans l'angle droit COA des axes extrêmes c et a, il est clair que la perpendiculaire OP à la tangente en I sera située aussi dans le même angle droit : donc OT perpendiculaire à OP tombera *au-dessous* de l'axe OA par rapport aux axes OI et OP que je regarde comme étant *au-dessus*.

Or, si l'on a $h > b$, on sait que le cône décrit par OT a pour axe le grand axe $OA = a$ de l'ellipsoïde central : donc, si l'on mène à ce cône le plan tangent suivant OT, ce qui sera le plan même du couple d'impulsion, le cône (OT) sera situé au-dessus de ce plan du même côté que les points I et P. Si donc, en vertu de la rotation $\theta \cos i$ autour de OP, ce cône glisse en un instant dt, d'un angle $d\psi$ sur ce plan tangent, il est clair qu'en vertu de la rotation $\theta \sin i$ autour de OT, il roule sur le même plan par un angle $d\omega$ de *signe contraire* à $d\psi$: de sorte que le mouvement angulaire $d\varphi$ de la génératrice OT est exprimé par la différence $d\psi - d\omega$ de ces deux angles.

FIG. 21. Mais si l'on a $h < b$, ce n'est plus autour du grand axe OA, mais autour du *petit axe* OC, que le cône (OT) se trouve décrit. Et alors ce cône, au lieu d'être situé au-dessus du plan qui le touche en OT, du même côté que le pôle I et le point P, se trouve situé au-dessous, du côté opposé. Si donc ce cône, par la rotation autour de OP, glisse sur le plan d'un angle $d\psi$, il est clair que par l'autre rotation autour de OT, il roule sur ce plan d'un angle $d\omega$ de *même signe* que $d\psi$: de sorte que, dans ce cas, le mouvement angulaire $d\varphi$ du point T est exprimé par la somme $d\psi + d\omega$ de ces deux angles.

36. On voit par là comment il arrive que, dans le cas singulier de $h = b$, on a simplement

$$d\varphi = d\psi = \theta \cos i \,.\, dt = \frac{h}{k}\, dt :$$

car, le cas de $h = b$ pouvant être considéré comme appartenant à la fois à l'un et à l'autre des deux cas précédents, l'angle $d\omega$ devrait avoir également le signe $+$ et le signe $-$; ce qui ne peut être ici, à moins qu'on n'ait $d\omega = 0$: c'est, en effet, ce qui a lieu, et réduit alors $d\varphi$ à $d\psi$, c'est-à-dire que, dans ce cas singulier, la vitesse angulaire du pôle instantané, autour de l'axe fixe du couple, est constante et mesurée par $\frac{b}{k}$ dans toute la suite du mouvement.

Résumé de notre théorie.

37. On peut donc considérer, *dans l'intérieur du corps*, trois cônes du second ordre, savoir :

1°. Le cône (OI) décrit par l'axe instantané OI;

2°. Le cône (OT) décrit par la projection continuelle de OI sur le plan fixe MN du couple d'impulsion ;

3°. Le cône (OG) décrit par l'axe fixe OG de ce couple dans l'intérieur du mobile.

Ces trois cônes sont *droits*, à *bases elliptiques*, et tous trois décrits autour d'un *même axe*, qui est, ou le *grand axe* a, ou le *petit axe* c de l'ellipsoïde central, selon que h est $>$ ou $<$ que l'*axe moyen* b de cet ellipsoïde.

Dans le cas singulier de $h = b$, le cône (OI) se réduit à un plan passant par l'axe moyen. Le cône (OG) se réduit à un autre plan passant par ce même axe, et le cône (OT) se réduit à une droite perpendiculaire à ce dernier plan.

Les surfaces de ces cônes sont toutes trois décrites et achevées dans le même temps.

L'axe OG du couple trace la sienne avec une vitesse angulaire

$$\theta \sin i = \sqrt{\theta^2 - \frac{h^2}{k^2}}.$$

L'axe OT trace la sienne avec une vitesse angulaire

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)(h^2 - c^2)}{h^3 k (k^2\theta^2 - h^2)}.$$

L'axe OI trace la sienne avec une vitesse angulaire que l'on trouve égale à

$$\frac{\sqrt{(Q-H)\,k^2\theta^2 - R}}{k^3\theta^2},$$

expression où l'on a

$$Q - H = \frac{(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)\,h^2 - 2a^2b^2c^2}{h^2},$$

et

$$R = \alpha^2\beta^2\gamma^2.$$

38. Mais, au lieu de ces trois cônes, on peut ne considérer que trois lignes courbes, et simplifier ainsi les images. Car, I étant le pôle instantané à la surface de l'ellipsoïde central, T la projection de ce point sur le plan du couple, et P sa projection sur l'axe OG, on peut considérer les trois orbes elliptiques, à double courbure, s, τ et π décrits par les points I, T et P dans l'intérieur du corps, et regarder ces orbes comme les bases de nos trois surfaces coniques dont le commun sommet est au centre O. Faisant donc abstraction de tout le reste, pour ne plus voir que ce centre O et l'une de ces trois espèces de roues s, τ, π, que je viens de définir, le mouvement du corps pourrait se peindre des trois manières suivantes :

FIG. 24. I. Si l'on suppose que l'orbe s, mis en contact avec le plan fixe MIN parallèle au plan du couple, roule sans glisser sur ce plan, et de manière qu'il tourne sans cesse sur son rayon OI avec une vitesse angulaire θ proportionnelle à ce rayon, on aura le mouvement précis du corps dans l'espace : c'est l'image la plus claire de ce mouvement.

II. Si, sur le plan MON du couple (qu'on suppose ici mené par le centre O), on fait rouler l'orbe τ avec la vitesse angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ trouvée ci-dessus, et qu'en même temps on le fasse glisser avec la vitesse angulaire constante $\frac{h}{k}$, on aura de même la représentation exacte du mouvement du corps : c'est une autre image de ce mouvement, mais un peu moins simple que la précédente.

III. Enfin, si l'on imagine que l'orbe π, dont le rayon OP est constant et de longueur h, glisse le long de sa tangente au point P

avec une vitesse angulaire $\frac{\sqrt{k^2\theta^2 - h^2}}{k}$, et tourne sur son rayon OP avec une vitesse angulaire constante $\frac{h}{k}$, on aura une troisième image du mouvement du corps; mais peut-être encore moins simple que la seconde. On pourrait donc écarter l'une et l'autre; mais, dans une matière aussi difficile, cette variété de démonstrations ne peut que jeter plus de jour sur le fond des choses, et je n'ai pas cru devoir les supprimer. Au reste, de toutes ces démonstrations, la meilleure, je veux dire celle où l'esprit trouve l'appui le plus naturel et le plus sensible, est celle de l'ellipsoïde central, dont on retient le centre immobile au même point de l'espace, et qu'on fait rouler sur le plan fixe du couple, sans aucun mouvement de *rasion* sur ce plan.

Équations des trois orbes s, τ, π, que nous venons de considérer.

39. On a déjà vu que l'orbe s, décrit à la surface de l'ellipsoïde central, par le pôle instantané I, est donné par l'intersection de cet ellipsoïde, dont l'équation est

$$(1)\qquad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1,$$

avec la surface d'un autre ellipsoïde, dont l'équation est

$$(2)\qquad \frac{h^2x'^2}{a^4} + \frac{h^2y'^2}{b^4} + \frac{h^2z'^2}{c^4} = 1,$$

x', y', z' étant les coordonnées du pôle I parallèles aux axes respectifs a, b, c de l'ellipsoïde central.

On a vu que le plan du couple, supposé conduit par le centre O de cet ellipsoïde, a pour équation

$$(3)\qquad \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 0.$$

Donc, si du pôle I on abaisse une perpendiculaire IT sur ce plan, on aura, pour les équations de cette droite,

$$(4)\qquad a^2z'(x - x') - c^2x'(z - z') = 0,$$
$$(5)\qquad a^2y'(x - x') - b^2x'(y - y') = 0.$$

Or, si de ces trois dernières équations, on tire les valeurs de x, y, z coordonnées du pied T de la perpendiculaire, on trouvera [en faisant les réductions qui proviennent des deux premières équations (1) et (2)], ces expressions très-simples,

$$x = \frac{h^2 - a^2}{a^2} x', \quad y = \frac{h^2 - b^2}{b^2} y', \quad z = \frac{h^2 - c^2}{c^2} z';$$

d'où l'on tire

$$x' = \frac{a^2 x}{h^2 - a^2}, \quad y' = \frac{b^2 y}{h^2 - b^2}, \quad z' = \frac{c^2 z}{h^2 - c^2}.$$

Donc, en mettant ces valeurs de x', y', z' dans les équations (1) et (2), on aura en x, y, z les deux équations

$$\frac{a^2 x^2}{(h^2 - a^2)^2} + \frac{b^2 y^2}{(h^2 - b^2)^2} + \frac{c^2 z^2}{(h^2 - c^2)^2} = 1,$$

$$\frac{h^2 x^2}{(h^2 - a^2)^2} + \frac{h^2 y^2}{(h^2 - b^2)^2} + \frac{h^2 z^2}{(h^2 - c^2)^2} = 1,$$

qui appartiennent à deux nouveaux ellipsoïdes dont l'intersection donne l'orbite τ décrite par le point T qui est la projection continuelle du pôle I sur le plan du couple.

Remarque I.

40. Si l'on retranche ces deux équations l'une de l'autre, on a

(OT) $$\frac{x^2}{h^2 - a^2} + \frac{y^2}{h^2 - b^2} + \frac{z^2}{h^2 - c^2} = 0,$$

équation de la surface conique décrite par la ligne OT dans l'intérieur du corps. Et c'est ce qui s'accorde parfaitement avec ce que nous avons trouvé d'une autre manière, en cherchant cette surface conique, comme la suite des normales OT à la surface du cône décrit par l'axe OG du couple dans l'intérieur du mobile. Et, en effet, cette dernière surface décrite par OG a pour équation

(OG) $$(h^2 - a^2) x^2 + (h^2 - b^2) y^2 + (h^2 - c^2) z^2 = 0.$$

Or il est clair que l'une de ces deux surfaces coniques peut être re-

gardée comme la suite des normales à la surface de l'autre : d'où l'on voit qu'il suffit d'en connaître une pour les avoir toutes deux.

41. Dans le cas singulier de $h = b$, le cône (OG) se réduit à un plan passant par l'axe moyen b, et dont l'équation est

$$\frac{z}{x} = \frac{c}{a} \cdot \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}};$$

et le cône (OT) à une simple ligne droite perpendiculaire à ce plan, et dont l'équation est

$$\frac{z}{x} = -\frac{c}{a} \cdot \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}}.$$

Par conséquent, l'orbite τ décrite par le point T ne peut être ici qu'une ligne terminée OT, allant du centre O jusqu'au point T qui répond à la distance *maximum* $\sqrt{\beta^2 - b^2}$ de ce point au centre O.

42. Dans les deux cas particuliers de $h = a$, ou $h = c$, l'orbite τ se réduit à un point qui est le centre O de l'ellipsoïde central.

Remarque II.

43. Si l'on ne combinait ensemble que les équations (1), (2), (4) et (5) pour en éliminer x', y', z', et qu'on n'employât point l'équation (3) du plan du couple, on aurait en x, y, z une équation qui répondrait à la surface tracée par la suite des normales IT que l'on mènerait à la surface de l'ellipsoïde central, le long de l'orbite s décrite par le pôle instantané I ; et si l'on portait ensuite sur chaque normale IT, à partir de son pied I, et du même côté que l'ellipsoïde, une longueur IT égale à la ligne h, la suite des extrémités de toutes ces lignes formerait encore l'orbite τ décrite par le point T.

Au lieu de l'équation (3) on pourrait donc employer l'équation suivante :

(P) $$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = h^2,$$

qui exprime que la ligne IT est de longueur constante h. Mais comme cette équation exprimerait également que la ligne IT peut être portée de l'autre côté du plan tangent, la combinaison des cinq équations (1), (2), (4), (5) et (P) donnerait, non-seulement l'orbite τ décrite par le pied de la perpendiculaire IT au plan du couple, mais une autre orbite τ' décrite par le point T' situé à la même distance IT' au dehors de l'ellipsoïde : courbe tout à fait différente dans l'espace relatif, et qui est ici étrangère à la question; mais, dans l'espace absolu, la route du point T' serait parfaitement égale et parallèle à la route du point T.

Remarque III.

44. La combinaison des cinq équations (1), (2), (4), (5) et P est peut-être encore plus facile que celle des quatre premières avec l'équation (3). Car, en tirant des équations (4) et (5) les valeurs de $(z - z')$, $(y - y')$ pour les porter dans l'équation (P), on a tout de suite

$$(x - x')^2 \left[1 + \frac{a^4}{x'^2}\left(\frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}\right)\right] = h^2,$$

d'où, en mettant pour $\frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}$ sa valeur $\frac{1}{h^2} - \frac{x'^2}{a^4}$ tirée de l'équation (2), on a

$$(x - x')^2 \cdot \frac{a^4}{h^2 x'^2} = h^2,$$

ce qui donne

$$x' = \frac{a^2 x}{h^2 \pm a^2};$$

et il est évident qu'on aurait de même

$$y' = \frac{b^2 y}{h^2 \pm b^2}, \quad z' = \frac{c^2 z}{h^2 \pm c^2},$$

expressions toutes semblables à celles du n° **39**, mais où des deux signes $\pm$ il ne faut prendre que le signe $-$, si l'on veut ne considérer, sur la normale IT, que le point T qui tombe du même côté que la surface de l'ellipsoïde central à l'égard du plan tangent en I : car, en prenant les signes $+$, on aurait un point T situé de l'autre côté de ce plan tangent, et la ligne OT, menée du centre O, ne serait plus perpendiculaire à la normale IT, comme on le veut dans la question proposée.

45. Au reste, pour lever toute équivoque, il est évident que les coordonnées du point T qui sont x, y, z doivent être telles, qu'elles satisfassent à l'équation du plan du couple, qui est

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 0.$$

Or, en y mettant pour x, y, z les doubles valeurs

$$x = \frac{(h^2 \pm a^2)x'}{a^2}, \quad y = \frac{(h^2 \pm b^2)y'}{b^2}, \quad z = \frac{(h^2 \pm c^2)z'}{c^2},$$

on aurait

$$\frac{x'^2}{a^4}(h^2 \pm a^2) + \frac{y'^2}{b^4}(h^2 \pm b^2) + \frac{z'^2}{c^4}(h^2 \pm c^2) = 0,$$

ou, d'après l'équation (2),

$$\pm \frac{x'^2}{a^2} \pm \frac{y'^2}{b^2} \pm \frac{z'^2}{c^2} + 1 = 0;$$

mais celle-ci, à cause de l'équation (1), n'est évidemment possible qu'en adoptant à la fois les trois signes inférieurs $-$, ce qui nous ramène aux expressions simples de x, y, z trouvées par la première analyse.

Enfin, quant à l'orbe π décrit par le point P pris à la distance $OP = h$ sur l'axe OG du couple d'impulsion, il est très-facile d'en trouver les équations. Il est évident que cette courbe n'est autre chose que l'intersection de la sphère dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 = h^2,$$

avec la surface conique décrite par OG, et dont l'équation est

$$(h^2 - a^2)x^2 + (h^2 - b^2)y^2 + (h^2 - c^2)z^2 = 0.$$

D'où l'on voit que cette courbe π est un orbe sphérique, à double courbure, comme les orbes elliptiques τ et s, et qu'elle est décrite autour du même axe.

46. En considérant les deux cônes (OP) et (OT) terminés par ces orbes π et τ qui leur servent de bases, le mouvement du corps se fait de telle manière que le corps tourne, à chaque instant dt, sur les génératrices OP et OT de ces deux cônes, avec des vitesses angulaires proportionnelles aux longueurs mêmes de ces génératrices : de sorte que la première vitesse $\theta \cos i$ est constante comme la ligne OP, et que la seconde $\theta \sin i$ est variable comme la ligne OT.

CHAPITRE III.

MOUVEMENTS ANGULAIRES DES AXES PRINCIPAUX DU CORPS DANS L'ESPACE ABSOLU.

I.

Nous n'avons considéré jusqu'ici que le mouvement de l'axe *instantané,* parce qu'il suffit de le connaître, et dans le corps et dans l'espace, pour avoir le mouvement du corps lui-même, et, par suite, les mouvements des trois axes principaux que le corps entraîne avec soi dans l'espace absolu.

Mais il n'est peut-être pas inutile d'indiquer en peu de mots ces corollaires, et de montrer, à l'égard de chacun de ces axes principaux a, b, c, le mouvement qu'il a pour tourner autour de l'axe *fixe* du couple d'impulsion ; pour s'abaisser et se relever alternativement sur le plan de ce couple : ce qui répond aux mouvements qu'on appelle, en Astronomie, la *précession* des nœuds, la *nutation* de l'axe ; quantités analogues à celles qui, dans l'analyse précédente (relative à l'axe et à l'équateur *instantanés*), sont désignées par $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{di}{dt}$, et dont les valeurs en fonction de θ, et par conséquent, du temps t, sont exprimées par

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{h}{k} + \frac{\sqrt{\Delta}}{k(k^2\theta^2 - h^2)},$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{h}{\theta\sqrt{k^2\theta^2 - h^2}}.$$

47. Soient donc ici λ, μ, ν les trois angles que les rayons principaux a, b, c font avec l'axe fixe du couple d'impulsion, et représentons les lettres x, y, z pour désigner les lignes kp, kq, kr ; il est aisé de voir qu'on a les trois équations suivantes :

$$(1) \qquad \cos\lambda = \frac{hx}{a^2}, \quad \cos\mu = \frac{hy}{b^2}, \quad \cos\nu = \frac{hz}{c^2},$$

et, par conséquent, celles-ci :

$$(2) \qquad \sin^2\lambda = \frac{a^4 - h^2x^2}{a^4}, \quad \sin^2\mu = \frac{b^4 - h^2y^2}{b^4}, \quad \sin^2\nu = \frac{c^4 - h^2z^2}{c^4}.$$

D'où l'on peut conclure en passant, que si l'on prolonge les rayons a, b, c jusqu'aux points A′, B′, C′ où ils vont rencontrer le plan du couple d'impulsion (lequel est à la distance h du centre O), on aura, en faisant les lignes variables

$$\mathrm{OA'} = \rho_a, \quad \mathrm{OB'} = \rho_b, \quad \mathrm{OC'} = \rho_c,$$

les équations

$$\rho_a^2 = \frac{a^4}{x^2}, \quad \rho_b^2 = \frac{b^4}{y^2}, \quad \rho_c = \frac{c^4}{z^2};$$

ce qui donne ces deux propriétés assez remarquables,

$$\frac{1}{\rho_a^2} + \frac{1}{\rho_b^2} + \frac{1}{\rho_c^2} = \textit{constante} = \frac{1}{h^2},$$

$$\frac{a^2}{\rho_a^2} + \frac{b^2}{\rho_b^2} + \frac{c^2}{\rho_c^2} = \textit{constante} = 1.$$

48. Maintenant, soient $\frac{d\pi_a}{dt}$, $\frac{d\pi_b}{dt}$, $\frac{d\pi_c}{dt}$, ou simplement $\dot{\pi}_a$, $\dot{\pi}_b$, $\dot{\pi}_c$ les vitesses angulaires des projections des trois axes a, b, c sur le plan du couple, je dis qu'on aura les trois équations suivantes :

$$\dot{\pi}_a = \frac{h}{k} \cdot \frac{a^2 - x^2}{a^2 \sin^2\lambda},$$

$$\dot{\pi}_b = \frac{h}{k} \cdot \frac{b^2 - y^2}{b^2 \sin^2\mu},$$

$$\dot{\pi}_c = \frac{h}{k} \cdot \frac{c^2 - z^2}{c^2 \sin^2\nu},$$

dont la démonstration directe est très-facile.

Et, en effet, il est clair que $\dot{\pi}_a\, dt$ ne désigne autre chose que l'angle décrit par la projection du rayon a sur le plan du couple pendant l'instant dt. Or la projection de a est $a\sin\lambda$, et, par conséquent, l'expression $a^2\sin^2\lambda.\dot{\pi}_a\,dt$ représente l'aire décrite par cette projection de a : mais l'aire décrite sur un plan par la projection d'une ligne n'est autre chose que la projection de l'aire décrite dans l'espace par la ligne elle-même. Nous n'avons donc qu'à chercher l'aire que le rayon a décrit dans l'espace, à la projeter sur le plan du couple, et à l'égaler à l'expression $a^2\sin^2\lambda.\dot{\pi}_a\,dt$.

Or, dans un instant dt, le corps tourne autour de a d'un angle $p\,dt$; mais, par cette première rotation, la ligne a demeure immobile et ne produit aucune aire dans l'espace : il ne reste donc à considérer que les deux autres rotations $q\,dt$, $r\,dt$ qui ont lieu dans le même instant autour des deux autres axes b et c.

Par la première, le corps tourne autour de b d'un angle $q\,dt$; et, par conséquent, le rayon a décrit un secteur $a^2 q\,dt$ dans un plan perpendiculaire à b, lequel, étant projeté sur le plan du couple, donne l'aire

$$a^2 q\,dt \times \cos\mu.$$

Par la dernière rotation, le corps tourne autour de c d'un angle $r\,dt$, et le rayon a décrit un secteur $a^2 r\,dt$ perpendiculaire à c, lequel, projeté sur le plan du couple, donne l'aire

$$a^2 r\,dt \times \cos\nu.$$

On a donc l'équation

$$a^2\sin^2\lambda.\dot{\pi}_a\,dt = (a^2 q\cos^2\mu + a^2 r\cos\nu)\,dt,$$

ou bien, en divisant de part et d'autre par $a^2\,dt$, et remettant, au lieu de q et r, leurs valeurs $\frac{x}{k}$ et $\frac{z}{k}$,

$$\sin^2\lambda.\dot{\pi}_a = \frac{h}{k}\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) = \frac{h}{k}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right);$$

ce qui est la première de nos trois équations. Et il est évident qu'on aurait de même la seconde, en y changeant a en b, x en y, et λ en μ; et ensuite la troisième, en y changeant a en c, x en z, et λ en ν.

Ainsi on aura

$$(\Pi)\qquad \left\{\begin{aligned} \dot{\pi}_a &= \frac{h}{k}\cdot\frac{a^2-x^2}{a^2\sin^2\lambda},\\ \dot{\pi}_b &= \frac{h}{k}\cdot\frac{b^2-y^2}{b^2\sin^2\mu},\\ \dot{\pi}_c &= \frac{h}{k}\cdot\frac{c^2-z^2}{c^2\sin^2\nu}; \end{aligned}\right.$$

ce qu'il fallait démontrer.

49. Si l'on multiplie la première de ces trois équations par $\sin^2\lambda$, la deuxième par $\sin^2\mu$, la troisième par $\sin^2\nu$, et qu'on les ajoute, il vient

$$\sin^2\lambda.\dot{\pi}_a + \sin^2\mu.\dot{\pi}_b + \sin^2\nu.\dot{\pi}_c = \frac{h}{k}(3-1) = 2\frac{h}{k}.$$

Or, qu'on prenne sur les axes principaux, et à partir du centre, trois lignes égales à l'unité, et l'on pourra voir $\sin\lambda$, $\sin\mu$, $\sin\nu$ comme les trois projections de ces lignes sur le plan fixe du couple; et $\sin^2\lambda.\dot{\pi}_a$, $\sin^2\mu.\dot{\pi}_b$, $\sin^2\nu.\dot{\pi}_c$ comme les fluxions des trois aires décrites par ces projections sur le même plan. Donc, en considérant la somme de ces trois aires, on aura, pour cette somme, l'expression très-simple

$$2\frac{h}{k}t,$$

où l'on peut remarquer que $\frac{h}{k}$ est la vitesse angulaire constante $\theta\cos i$ du système autour de l'axe fixe du couple d'impulsion G.

50. Si, en considérant les mêmes équations (Π), on multiplie la première par $\frac{\sin^2\lambda}{a^2}$, la deuxième par $\frac{\sin^2\mu}{b^2}$, la troisième par $\frac{\sin^2\nu}{c^2}$, il vient

$$\frac{1}{a^2}\sin^2\lambda.\dot{\pi}_a = \frac{h}{ka^2} - \frac{h}{k}\frac{x^2}{a^4},$$

$$\frac{1}{b^2}\sin^2\mu.\dot{\pi}_b = \frac{h}{kb^2} - \frac{h}{k}\frac{y^2}{b^4},$$

$$\frac{1}{c^2}\sin^2\nu.\dot{\pi}_c = \frac{h}{kc^2} - \frac{h}{k}\frac{z^2}{c^4},$$

d'où, en ajoutant, on tire cette équation remarquable,

$$\frac{1}{a^2}\sin^2\lambda.\dot{\pi}_a + \frac{1}{b^2}\sin^2\mu.\dot{\pi}_b + \frac{1}{c^2}\sin^2\nu.\dot{\pi}_c = \frac{h}{k}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{h^2}\right).$$

Or $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ ne sont autre chose que les bras de l'inertie du corps autour des axes principaux : si donc, à partir du centre O, on porte sur les axes, trois lignes égales aux *bras respectifs de l'inertie* autour des mêmes axes, on pourra considérer $\frac{1}{a}\sin\lambda$, $\frac{1}{b}\sin\mu$, $\frac{1}{c}\sin\nu$ comme les trois projections de ces lignes sur le plan du couple, et $\frac{1}{a^2}\sin^2\lambda.\dot{\pi}_a$, $\frac{1}{b^2}\sin^2\mu.\dot{\pi}_b$, $\frac{1}{c^2}\sin^2\nu.\dot{\pi}_c$ comme les fluxions des trois aires que ces projections décrivent sur le même plan pendant le mouvement du corps; donc, en multipliant par dt et intégrant, on aura pour la somme de ces aires décrites dans le temps t,

$$\frac{h}{k}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{h^2}\right)\cdot t.$$

51. Voilà donc deux propriétés nouvelles du mouvement d'un corps libre qui tourne sur son centre de gravité :

1°. *Si, à partir de ce centre, on porte sur les axes principaux du corps, trois lignes égales entre elles et d'une longueur quelconque* R, *la somme des aires décrites par leurs trois projections sur le plan fixe du couple d'impulsion sera proportionnelle au temps; et elle sera exprimée par* $2\frac{h}{k}\cdot R^2 t$;

2°. *Si l'on porte sur les mêmes axes principaux, trois lignes proportionnelles aux trois bras de l'inertie du corps autour des mêmes axes, la somme des trois aires décrites par leurs projections sur le plan du couple sera aussi proportionnelle au temps;* et cette somme sera exprimée par

$$j^2\cdot\frac{h}{k}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{h^2}\right)\cdot t,$$

j étant le commun rapport des trois lignes aux trois bras d'inertie; ce qui forme deux théorèmes très-remarquables dans la théorie de la

rotation d'un corps libre de toute action étrangère : théorèmes en quelque sorte géométriques, et qu'il ne faut pas confondre avec ceux qui regardent le principe ordinaire de la conservation des aires, quoiqu'ils en dépendent au fond, et qu'on puisse en rapprocher les expressions, comme on peut le voir dans l'article suivant.

52. Et, en effet, si l'on considère tous les rayons vecteurs menés du centre à toutes les molécules égales du corps, et la moyenne de toutes les aires que leurs projections tracent sur le plan fixe du couple, on aura évidemment, pour cette *aire moyenne,* l'expression $\frac{G}{m}$; G étant la grandeur du couple d'impulsion, et m la masse du corps, ou le nombre de toutes ses molécules. Ainsi, comme on a représenté G par $\frac{m}{hk}$, on aura, pour l'expression de cette aire moyenne, décrite dans le temps t,

$$\frac{1}{hk}\cdot t.$$

53. Si donc on voulait que l'aire précédente $2\frac{h}{k}\cdot R^2.t$, due aux mouvements des trois rayons égaux R, pris sur les trois axes du corps, fût égale à cette aire moyenne $\frac{1}{kh}\cdot t$ du système de tous les rayons vecteurs menés aux particules du corps, il faudrait choisir la longueur du rayon R de manière qu'on eût

$$2\frac{h}{k}R^2 = \frac{1}{kh};$$

ce qui donne, pour R, l'expression

$$R = \frac{1}{h\sqrt{2}}.$$

Ainsi, en prenant, sur les axes principaux du corps, trois lignes égales à $\frac{1}{h\sqrt{2}}$, on peut dire que, pendant le mouvement du corps, ces trois lignes projetées sur le plan du couple y décrivent trois aires dont la somme est égale à l'aire moyenne du système : de sorte qu'en multipliant cette aire par la masse m du corps, on a l'aire totale due au couple d'impulsion G.

54. On pourrait chercher de même les rayons inégaux R_a, R_b, R_c, mais proportionnels aux bras respectifs de l'inertie $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, qu'il faudrait prendre sur les axes, pour que l'aire décrite fût égale à l'aire moyenne du système. En désignant, comme ci-dessus, par j le rapport inconnu de R_a à $\frac{1}{a}$, de R_b à $\frac{1}{b}$, de R_c à $\frac{1}{c}$, on aurait, pour déterminer j, l'équation

$$j^2 \cdot \frac{h}{k}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{h^2}\right)=\frac{1}{kh},$$

d'où l'on tire

$$j^2=\frac{a^2b^2c^2}{h^2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)-a^2b^2c^2},$$

et, par conséquent, en faisant $a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2=B$ et $a^2b^2c^2=C$,

$$R_a=\frac{bc}{\sqrt{Bh^2-C}},$$

$$R_b=\frac{ac}{\sqrt{Bh^2-C}},$$

$$R_c=\frac{ab}{\sqrt{Bh^2-C}}.$$

Ainsi, en prenant les aires décrites par les projections de ces trois lignes, on aurait en somme une aire égale à l'aire moyenne du système.

II.

Propriétés des mouvements de nutation des trois axes principaux vers l'axe fixe du couple d'impulsion.

55. Les trois équations (2) du n° 47 donnent :

$$a^2\sin^2\lambda=a^2-h^2\frac{x^2}{a^2},$$

$$b^2\sin^2\mu=b^2-h^2\frac{y^2}{b^2},$$

$$c^2\sin^2\nu=c^2-h^2\frac{z^2}{c^2};$$

donc, en ajoutant, on a l'équation

(A) $a^2\sin^2\lambda+b^2\sin^2\mu+c^2\sin^2\gamma=a^2+b^2+c^2-h^2=$ *constante*.

Les mêmes équations (2) donnent

$$\sin^2\lambda=1-h^2\frac{x^2}{a^4},\quad \sin^2\mu=1-h^2\frac{y^2}{b^4},\quad \sin^2\nu=1-h^2\frac{z^2}{c^4};$$

donc, en ajoutant, on a

(B) $\sin^2\lambda+\sin^2\mu+\sin^2\nu=3-1=2=$ *constante*,

ce qui revient à l'équation connue

$$\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu=1,$$

comme cela doit être.

Donc, *si l'on considère les trois pôles* A, B, C *de l'ellipsoïde central, il résulte de l'équation précédente* (A), *que la somme des carrés de leurs distances à l'axe fixe du couple d'impulsion est constante dans tout le cours du mouvement.*

On peut regarder $\sin^2\lambda$ comme $a^2\sin^2\lambda\times\frac{1}{a^2}$, c'est-à-dire comme le produit du carré de la distance du pôle A à l'axe du couple, multipliée par le carré du bras $\frac{1}{a}$ de l'inertie du corps. Il résulte donc de l'équation (B) cet autre théorème :

La somme des carrés des bras de l'inertie du corps respectivement multipliés par les carrés des distances variables des pôles à l'axe du couple, est constante dans tout le cours du mouvement.

III.

Des courbes σ_a, σ_b, σ_c décrites sur le plan du couple par les projections des trois pôles A, B, C *de l'ellipsoïde central.*

56. Si l'on considère les trois courbes σ_a, σ_b, σ_c que décrivent les trois pôles A, B, C projetés sur le plan du couple, on voit que ces trois courbes, dont le cours est infini, et qui, en général, ne se fer-

ment point, sont de même genre que l'herpolhodie σ décrite sur le même plan par le pôle instantané de rotation.

Si h est $> b$, par exemple, et que a soit ainsi l'axe que l'orbe elliptique s du pôle instantané entoure comme un essieu, la courbe σ_a décrite, sur le plan du couple, par la projection du pôle A, sera, comme l'herpolhodie σ, formée par une suite d'ondes égales et régulières autour du même centre P. Et même, comme le *maximum* du rayon vecteur $v_a = a \sin\lambda$ répond au *minimum* de x, et ce *minimum* au *minimum* du rayon vecteur v de la courbe σ, on voit que les sommets supérieurs des ondes de la courbe σ_a répondent aux sommets inférieurs de la courbe σ, et les inférieurs aux supérieurs.

57. Pendant ce temps, les projections des pôles B et C décrivent aussi, autour du même centre P, des courbes σ_b, σ_c qui ont des sommets alternatifs de *maximum* et de *minimum*, où ces deux pôles passent aux mêmes époques, mais l'un B passant par un sommet supérieur, quand l'autre C passe à un sommet inférieur, et réciproquement : et cela, à un angle droit de distance entre le rayon vecteur v_b de l'un et le rayon vecteur v_c de l'autre.

Si h est $< b$, auquel cas l'orbe elliptique s entoure le petit axe c comme son essieu, on aura les mêmes propriétés pour les courbes décrites par les projections des trois pôles.

Ce qu'on peut remarquer dans les deux cas, c'est que la courbe σ_b, décrite par le pôle *moyen* B, est la seule dont les sommets répondent toujours à des sommets de même nom dans l'herpolhodie σ, et que le contraire a toujours lieu pour les deux autres courbes σ_a, σ_c.

Cas singulier de $h = b$.

58. Enfin si $h = b$, auquel cas singulier l'orbe s est une ellipse passant par l'axe moyen b, et la courbe σ une spirale autour du centre P, 1° le pôle moyen B décrira de même une spirale autour du même centre, se rapprochant sans cesse de ce point comme la spirale σ, sans jamais pouvoir l'atteindre; 2° le pôle A décrira aussi une spirale, mais qui ira sans cesse en s'éloignant du même centre, depuis sa distance *minimum* $a \cdot \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}$, jusqu'à sa distance *maximum* a qu'elle ne pourra jamais atteindre : cette spirale, décrite par le pôle A, va donc sans cesse en s'épanouissant vers une circonférence de cercle du rayon a, qui en est comme l'asymptote; 3° enfin, il en sera de même de la spirale décrite par le pôle C, et dont le plus petit rayon sera $= c \cdot \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$, et le plus grand $= c$.

Cas où l'ellipsoïde central est de révolution.

59. Si l'ellipsoïde central est de révolution, l'orbe s est un cercle autour de l'axe de révolution, la courbe σ est un cercle sur le plan du couple, et la projection du pôle de la figure décrit aussi un cercle concentrique. Dans ce cas, il n'y a point, à proprement parler, d'autre pôle de la figure que celui qui fait l'extrémité de l'axe de révolution. Mais si l'on voulait en marquer arbitrairement deux autres sur l'équateur du sphéroïde, pris à un angle droit de distance l'un de l'autre, et considérer les deux courbes que leurs projections décrivent, on aurait deux courbes parfaitement égales, qui ne seraient point circulaires, mais qui formeraient des ondulations régulières autour du même centre : les sommets de noms différents sur les deux courbes étant toujours à un angle droit de distance angulaire l'un de l'autre.

Remarque I.

60. On a trouvé pour la vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$ du pôle instantané I autour du centre, de l'axe du couple,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{h}{k} + \frac{(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)(h^2 - c^2)}{h^3 k v^2},$$

v étant le rayon vecteur de l'herpolhodie σ. Voyons quelle est, en fonction de son rayon vecteur v_a, l'expression de la vitesse angulaire $\frac{d\pi_a}{dt}$ du pôle A de l'ellipsoïde autour du même axe fixe.

Cette vitesse angulaire est exprimée, comme on l'a vu plus haut, par

$$\frac{d\pi_a}{dt} = \frac{h}{k} \cdot \frac{a^2 - x^2}{a^2 \sin^2 \lambda}.$$

Or, $a^2 \sin^2 \lambda$ étant le carré du rayon vecteur ν_a de la courbe σ_a, on a d'abord

$$\frac{d\pi_a}{dt} = \frac{h}{k} \cdot \frac{a^2 - x^2}{\nu_a^2};$$

mais, de

$$\nu_a^2 = a^2 \sin^2 \lambda = \frac{a^4 - h^2 x^2}{a^2},$$

on tire

$$a^2 - x^2 = \frac{a^2}{h^2}(\nu_a + h^2 - a^2);$$

on a donc, en mettant pour $a^2 - x^2$ cette valeur,

$$\frac{d\pi_a}{dt} = \frac{a^2}{kh} + \frac{a^2(h^2 - a^2)}{kh \cdot \nu_a^2};$$

d'où l'on voit que l'expression de la vitesse angulaire $\frac{d\pi_a}{dt}$ du pôle A de la figure est semblable à celle de la vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$ du pôle instantané I, l'une et l'autre se composant d'une partie constante et d'une partie réciproque au carré du rayon vecteur.

Et il est évident qu'on peut dire la même chose des deux autres pôles B et C, puisque leurs mouvements angulaires sont donnés par la même expression que la précédente en y changeant simplement a en b, et a en c.

Remarque II.

61. Si le corps était de révolution, autour de l'axe principal a par exemple, il est certain que la vitesse angulaire $\frac{d\pi_a}{dt}$ du pôle A serait égale à celle du pôle instantané I. On doit donc trouver, dans le cas de $b = c$,

$$\frac{d\pi_a}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

C'est, en effet, ce qui a lieu, car il est aisé de voir que, dans le cas de $b = c$, le carré du rayon vecteur ν de l'herpolhodie σ est constant

et qu'il a pour valeur

$$\nu^2 = \frac{(a^2 - h^2)(h^2 - b^2)}{h^2};$$

d'un autre côté, on a, pour le carré du rayon vecteur ν_a de la courbe σ_a,

$$\nu_a^2 = \frac{h^2(a^2 - h^2)}{h^2 - b^2}:$$

or, en mettant ces valeurs de ν^2 et ν_a^2 dans les expressions respectives de $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\pi_a}{dt}$, on trouve d'abord

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{h}{k} + \frac{(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)^2 . h^2}{h^3 k . (a^2 - h^2)(h^2 - b^2)} = \frac{h}{k} - \frac{h^2(h^2 - b^2)}{h^3 k} = \frac{b^2}{kh},$$

et ensuite

$$\frac{d\pi_a}{dt} = \frac{h}{k} + \frac{h}{k} \cdot \frac{(h^2 - a^2)(h^2 - b^2)}{h^2(a^2 - h^2)} = \frac{h}{k} - \frac{h}{k} \cdot \frac{h^2 - b^2}{h^2} = \frac{b^2}{kh},$$

même valeur que la précédente, comme cela devait être.

Remarque III.

62. Comme dans notre analyse la quantité $\frac{1}{hk}$ exprime la grandeur du couple d'impulsion, on tire de l'expression précédente,

$$\frac{d\pi_a}{dt} = \frac{b^2}{hk},$$

qui ne renferme que le produit hk et le carré de b^2, cette conséquence remarquable : c'est que, dans un corps dont l'ellipsoïde central est de révolution, le mouvement $\frac{d\pi_a}{dt}$ des nœuds de l'équateur sur le plan fixe du couple ne dépend que de la grandeur de ce couple, et point du tout de sa direction; que ce mouvement ne dépend pas non plus du moment d'inertie autour de l'axe a du corps, mais du seul moment d'inertie autour du rayon b de l'équateur. Ainsi, quelles que soient la position du couple par rapport à l'axe, et la valeur du moment d'inertie $\frac{1}{a^2}$ autour de cet axe, le pôle A du corps tournera toujours avec la même vitesse angulaire $\frac{d\pi_a}{dt}$ autour de l'axe fixe du couple d'impulsion.

Or il n'est pas difficile de reconnaître que, même sans changer la masse d'un corps, on en pourrait changer la figure d'une infinité de manières telles, que le sphéroïde *central* y aurait pour tous un équateur de même rayon b, mais un axe a qui différerait de l'un à l'autre. On peut donc dire qu'un même couple G, appliqué comme on voudra à l'un quelconque de ces corps, y produirait exactement la même *précession*, c'est-à-dire le même mouvement angulaire de la ligne des nœuds de l'équateur sur le plan fixe de ce couple.

IV.

Équations différentielles des courbes σ_a, σ_b, σ_c.

63. Si l'on voulait avoir l'équation polaire de l'une des courbes σ_a, entre son rayon vecteur ν_a et l'angle π_a qu'il décrit sur le plan fixe, il suffirait de chercher l'expression de $\frac{d\nu_a}{dt}$ en fonction de ν_a, et de la comparer à celle de $\frac{d\pi_a}{dt}$ qui nous est déjà connue.

Ainsi, comme on a

$$a^2 - \nu_a^2 = \frac{h^2}{a^2}x^2,$$

et d'ailleurs

$$x^2 = \frac{a^4}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \cdot (u^2 - \alpha^2),$$

on aura, en faisant, pour abréger,

$$\frac{a^2 h^2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} = n,$$

l'équation

$$(1) \qquad a^2 - \nu_a^2 = n(u^2 - \alpha^2),$$

d'où l'on tire

$$-\frac{\nu_a d\nu_a}{dt} = n \cdot \frac{u\,du}{dt}.$$

Or on a trouvé précédemment (n° **8**)

$$\frac{u\,du}{dt} = \frac{1}{k}\sqrt{(u^2 - \alpha^2)(\beta^2 - u^2)(u^2 - \gamma^2)},$$

et l'on a, d'après l'équation (1) ci-dessus,

$$u^2 - \alpha^2 = \frac{a^2 - \nu_a^2}{n};$$

$$\beta^2 - u^2 = \frac{n(\beta^2 - \alpha^2) - (a^2 - \nu^2)}{n},$$

$$u^2 - \gamma^2 = \frac{n(\alpha^2 - \gamma^2) + (a^2 - \nu_a^2)}{n};$$

donc, en substituant ces valeurs, on aura

$$\nu_a \cdot \frac{d\nu_a}{dt} = -\frac{1}{k\sqrt{n}} \cdot \sqrt{(a^2 - \nu_a^2)[n(\beta^2 - \alpha^2) - (a^2 - \nu_a^2)][(a^2 - \nu_a^2) + n(\alpha^2 - \gamma^2)]}.$$

Maintenant, comme on a pour l'expression de $\frac{d\pi_a}{dt}$,

$$\frac{d\pi_a}{dt} = \frac{a^2}{hk} \cdot \frac{h^2 - (a^2 - \nu_a^2)}{\nu_a^2},$$

on aura, en divisant cette équation par la précédente,

$$\frac{d\pi_a}{d\nu_a} = \frac{a^2\sqrt{n}}{h} \cdot \frac{\nu_a^2 - a^2 + h^2}{\nu_a \cdot \sqrt{(\nu_a^2 - a^2)[\nu_a^2 - a^2 + h(\gamma^2 - \alpha^2)][n(\alpha^2 - \beta^2) - \nu_a^2]}},$$

ce qui est, entre le rayon vecteur ν_a et l'angle π_a qu'il décrit sur le plan fixe du couple d'impulsion, l'équation cherchée de la courbe σ_a.

On trouverait de même les équations polaires des deux autres courbes σ_b, σ_c décrites sur le même plan par les projections des deux pôles B et C de l'ellipsoïde central : il suffirait de changer a en b, et a en c dans l'équation précédente, mais avec cette attention de faire le même changement dans l'expression du nombre n, qui étant ici,

pour σ_a, $\qquad n = \frac{a^2 h^2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}$,

serait pour σ_b, $\qquad n = \frac{b^2 h^2}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}$,

et pour σ_c, $\qquad n = \frac{c^2 h^2}{(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)}$.

64. Si, au lieu de la courbe σ_a, décrite par la projection du pôle A, on voulait considérer la courbe $\sigma_{a'}$ tracée par le point A' où l'axe a prolongé va rencontrer le plan du couple, il est clair qu'en nommant $v_{a'}$ le rayon vecteur de cette nouvelle courbe $\sigma_{a'}$, on aurait d'abord entre v_a et $v_{a'}$, cette relation

$$\text{(R)} \qquad v_a^2 = \frac{a^2 v_{a'}^2}{h^2 + v_{a'}^2}.$$

Or, ces deux rayons vecteurs v_a et $v_{a'}$ étant toujours dans une même direction, il est évident que le mouvement angulaire du rayon $v_{a'}$ est parfaitement égal à celui du rayon v_a, et que, par conséquent, pour avoir la vitesse angulaire $\frac{d\pi_{a'}}{dt}$ du rayon $v_{a'}$, il suffit de mettre, dans l'expression précédente de $\frac{d\pi_a}{dt}$, au lieu de v_a, sa valeur en $v_{a'}$ qui est donnée ci-dessus. On aura donc de suite l'équation

$$\frac{d\pi_{a'}}{dt} = \frac{h}{k} \cdot \frac{v_{a'}^2 + h^2 - a^2}{v_{a'}^2}.$$

A présent, pour obtenir l'équation polaire de cette nouvelle herpolhodie $\sigma_{a'}$, il faudrait chercher l'expression de $\frac{dv_{a'}}{dt}$ en fonction de $v_{a'}$. Or l'équation (R) étant différentiée donne d'abord

$$\frac{dv_{a'}}{dt} = \frac{(h^2 + v_{a'}^2)^{\frac{3}{2}}}{a(v_{a'} - av_{a'} + h^2)} \cdot \frac{dv_a}{dt};$$

il ne reste donc qu'à trouver le facteur $\frac{dv_a}{dt}$ en fonction du rayon $v_{a'}$.

Mais nous avons trouvé plus haut $\frac{dv_a}{dt}$ en fonction du rayon v_a, et celui-ci, par l'équation (R), est donné en $v_{a'}$; donc, en faisant ces substitutions, on aura l'expression de $\frac{dv_{a'}}{dt}$ en fonction du rayon vecteur $v_{a'}$.

Donc enfin, si l'on divise l'expression de $\frac{d\pi_{a'}}{dt}$ par celle de $\frac{dv_{a'}}{dt}$, il viendra

$$\frac{d\pi_{a'}}{dv_{a'}} = \textit{fonction} \text{ de } v_{a'},$$

ce qui donnera l'équation polaire de la courbe $\sigma_{a'}$.

On trouverait les deux autres courbes σ_b, σ_c par le simple changement de a en b, et de a en c dans la précédente.

65. On peut remarquer entre ces nouvelles courbes et les premières une différence assez notable. Chacune des trois premières courbes σ_a, σ_b, σ_c est, comme l'herpolhodie σ, toujours renfermée entre deux cercles de rayons finis, dont elle va toucher alternativement l'une et l'autre circonférences. Mais, des trois courbes $\sigma_{a'}$, $\sigma_{b'}$, $\sigma_{c'}$, il n'y en a qu'une seule qui circule ainsi entre deux circonférences finies; et cette courbe est ou $\sigma_{a'}$ ou $\sigma_{c'}$ selon qu'on a

$$h > b \quad \text{ou} \quad h < b.$$

Pour les deux autres, elles vont porter les sommets *supérieurs* de leurs ondes sur des circonférences de cercle d'un rayon infini. C'est ce qu'il est facile de reconnaître par la simple comparaison du rayon vecteur v_a au rayon vecteur $v_{a'}$; etc.

66. Par les deux variables π_a et v_a, déterminées en fonction du temps t, on aurait la projection du pôle A sur le plan fixe, et comme la hauteur de ce point au-dessus du plan est exprimée par $\sqrt{a^2 - v_a^2}$, on connaîtrait la position du pôle A dans l'espace absolu : et ainsi pour les deux autres pôles B et C du corps. Mais l'intégration de ces expressions $\frac{d\pi_a}{dt}$ et $\frac{dv_a}{dt}$ a les mêmes difficultés et demande l'emploi des mêmes fonctions elliptiques que les précédentes $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ relatives au pôle instantané I de la rotation, etc., etc.

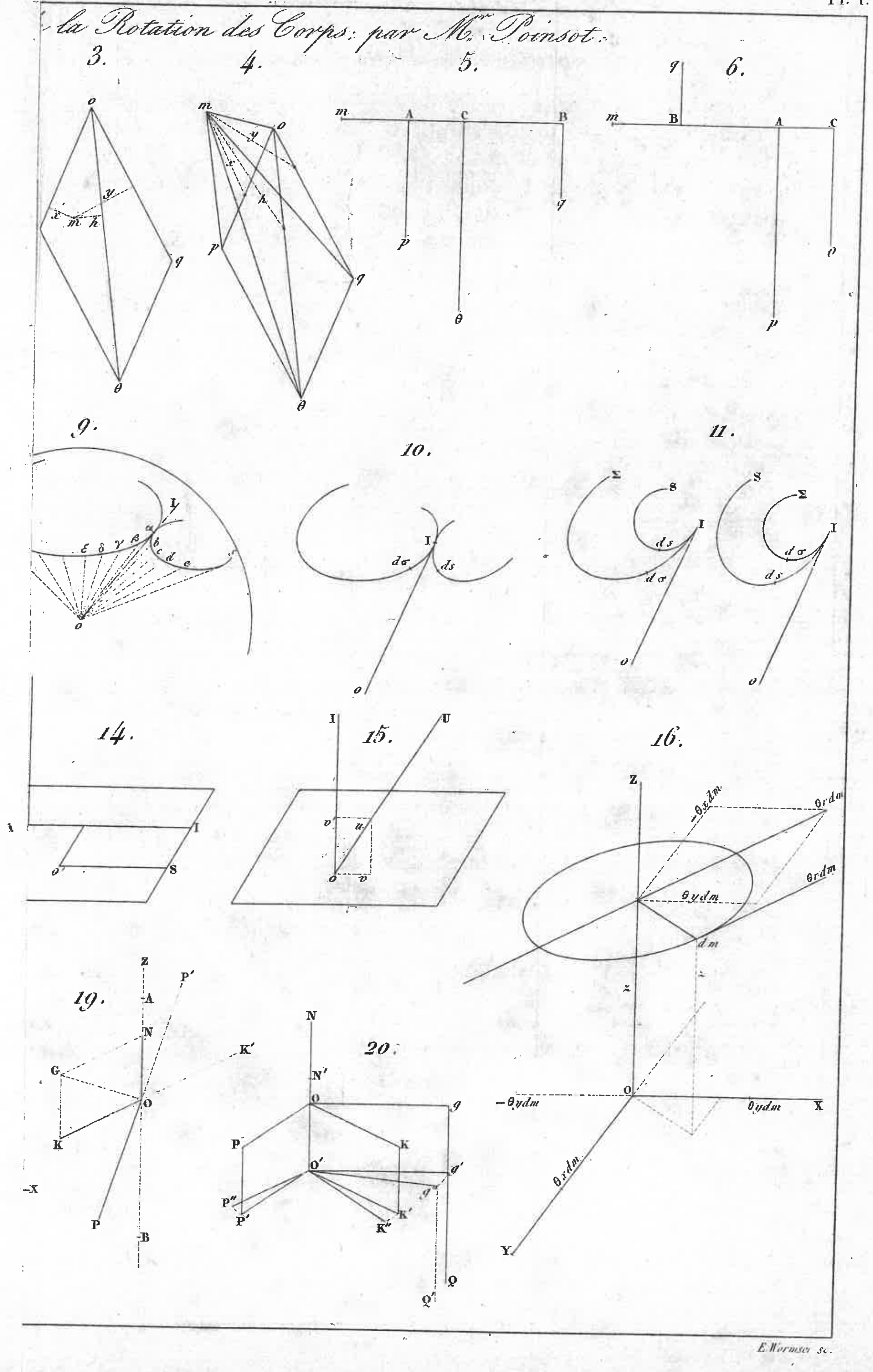
67. Mais je n'irai pas plus loin dans ces détails : nous n'avions ici d'autre but principal que de bien démontrer notre théorie nouvelle de la rotation des corps, et de l'élever à un point de clarté où elle devînt, pour ainsi dire, élémentaire : or il me semble que, par les nouveaux théorèmes et les images variées qui précèdent, cet important objet se trouve entièrement rempli.

J'ajouterai seulement, sur la nature du mouvement de rotation d'un corps libre, ce dernier corollaire : c'est que l'ellipsoïde central du corps est perpétuellement coupé par le plan fixe du couple d'impulsion suivant une ellipse dont la forme varie, mais dont l'aire est constante.

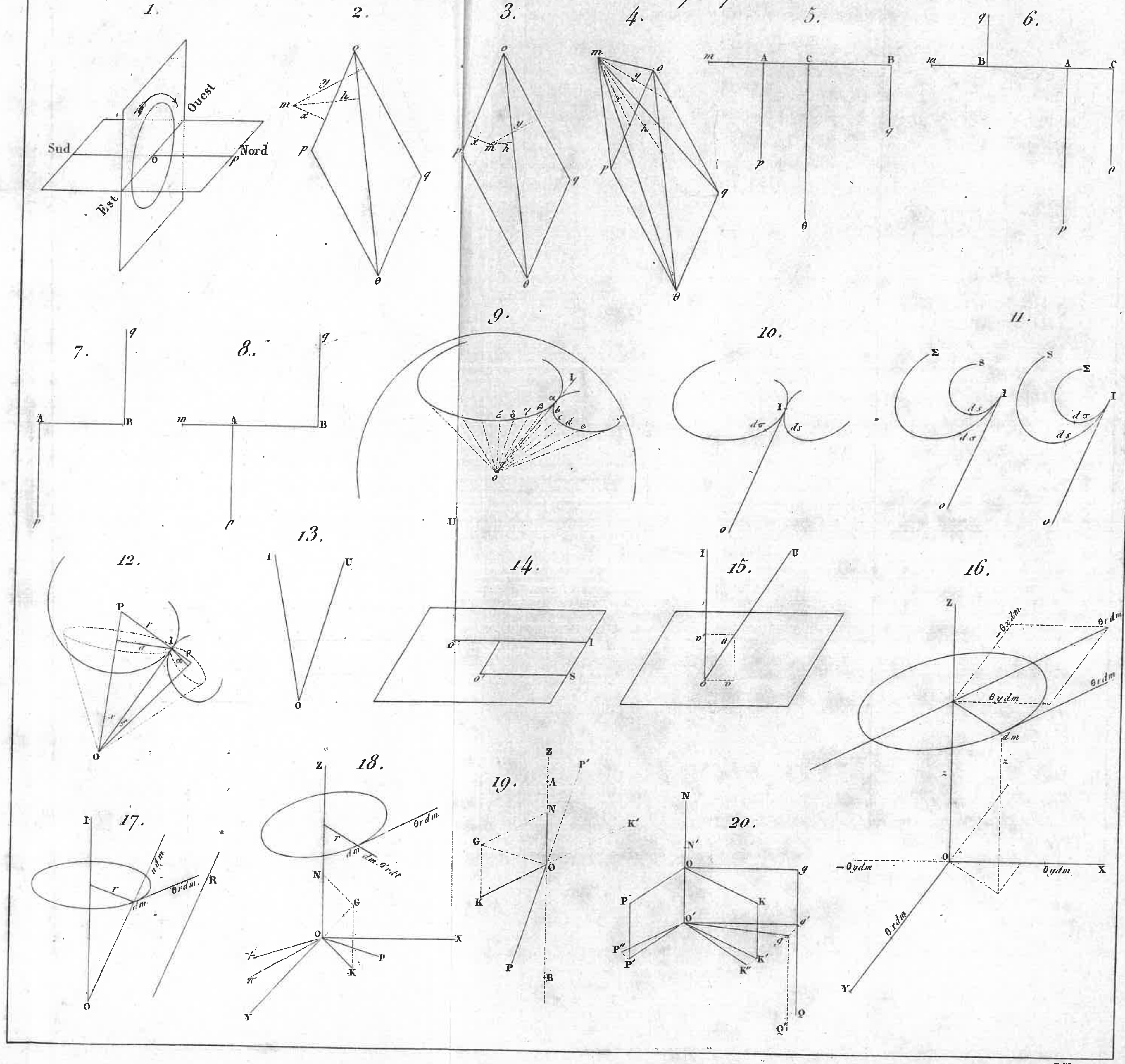
Cela se voit presque immédiatement si l'on considère que tous les rhomboïdes construits sur trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde sont égaux en volume, et qu'il en est de même de tous les cylindres inscrits à ces rhomboïdes ; que, par conséquent, de cette infinité de cylindres égaux, ceux qui ont même hauteur, ont des bases équivalentes. Or c'est précisément ce qui a lieu pour les cylindres dont les deux bases parallèles touchent l'ellipsoïde central aux deux bouts de l'axe instantané de rotation.

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER, rue du Jardinet, n° 12.

Pl. I.



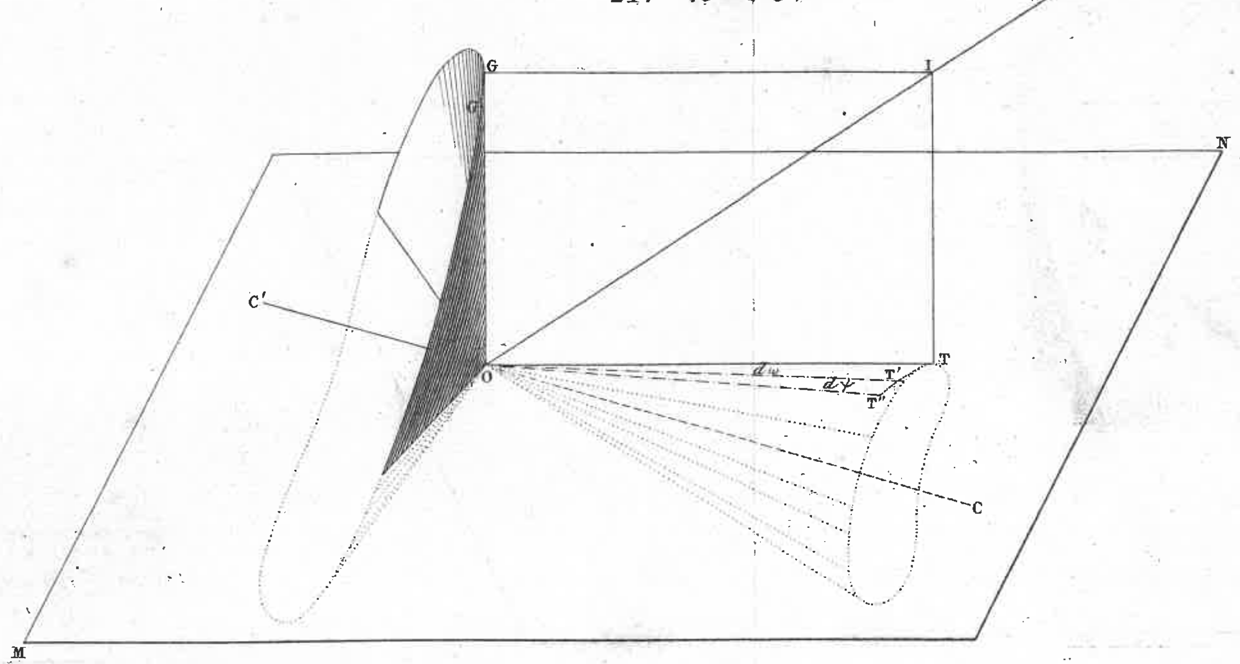
Théorie nouvelle de la Rotation des Corps; par M. Poinsot.



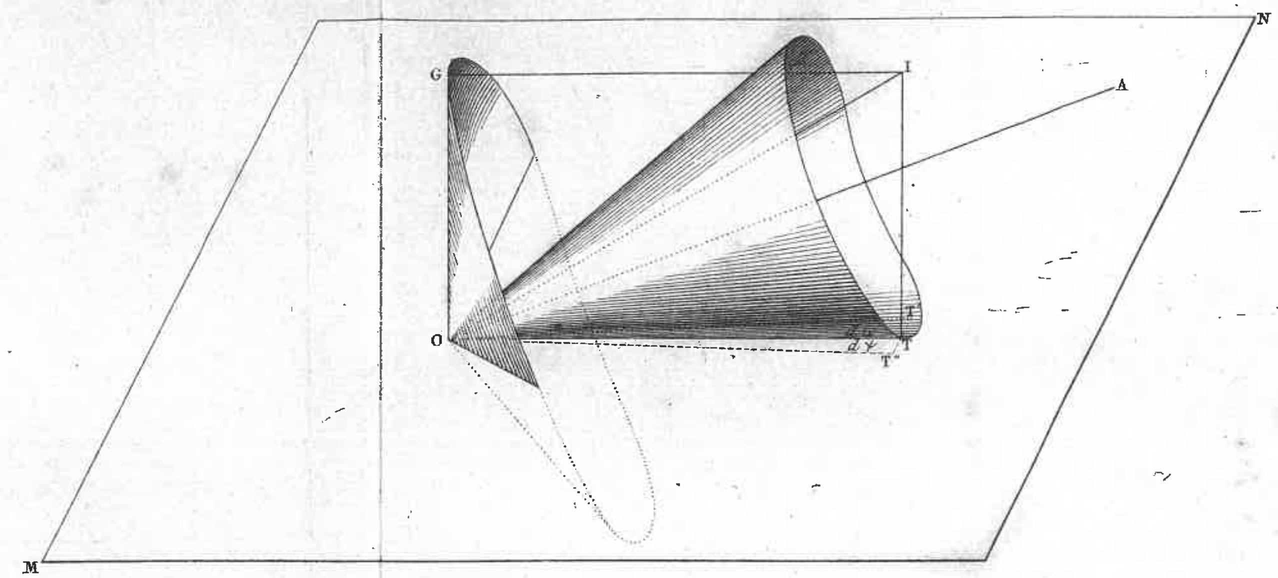
E. Wormser sc.

Théorie nouvelle de la Rotation des Corps; par Mr. Poinsot.

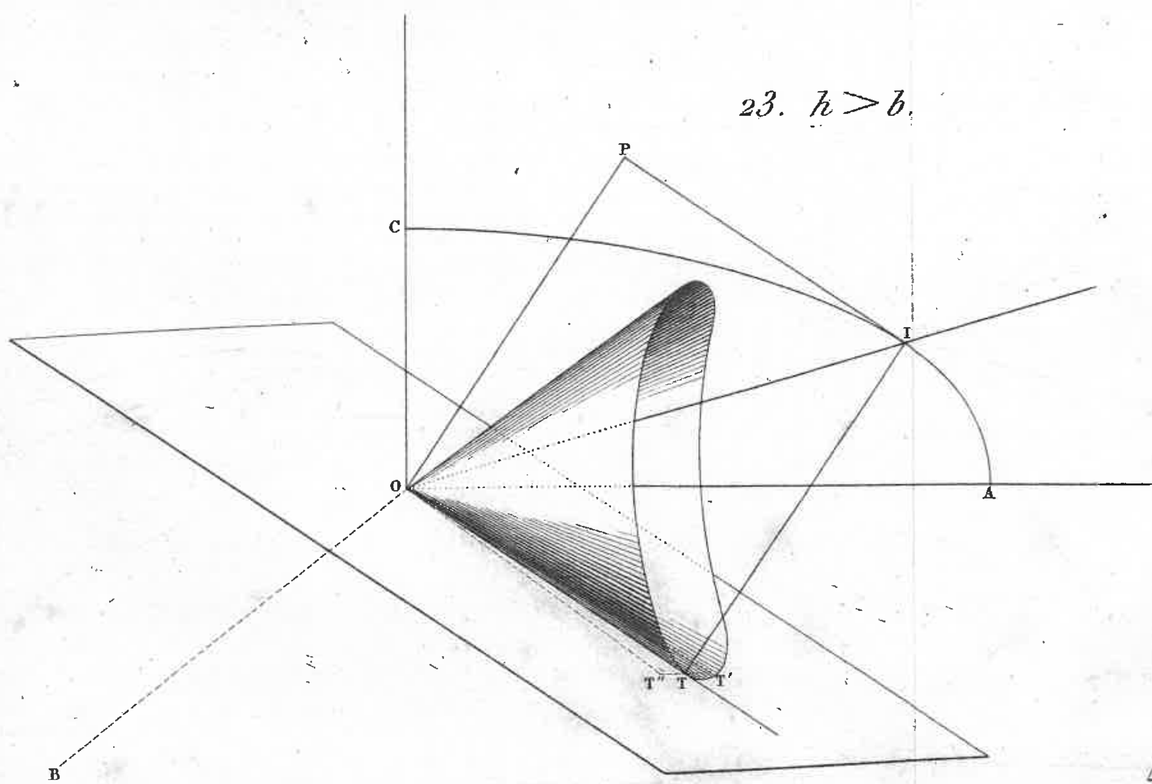
21. $h < b$.



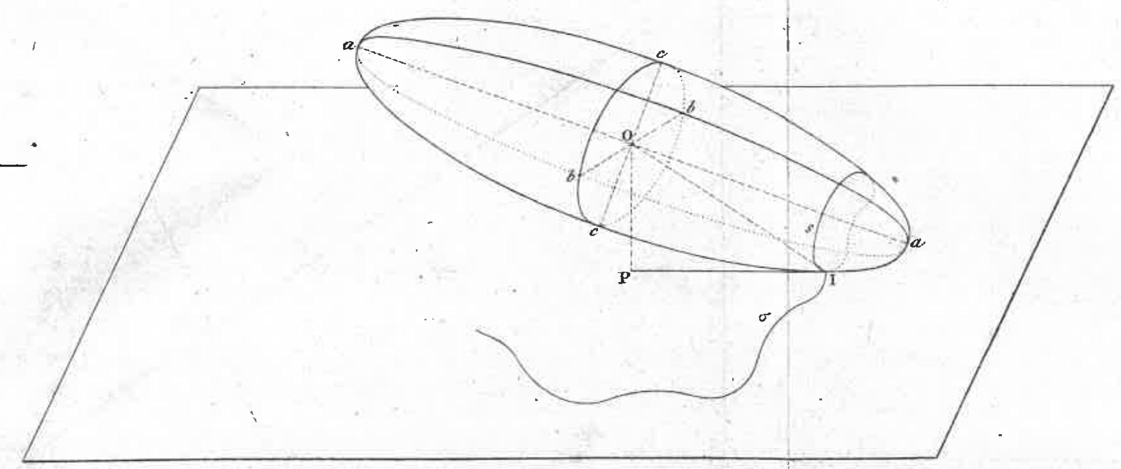
22. $h > b$.



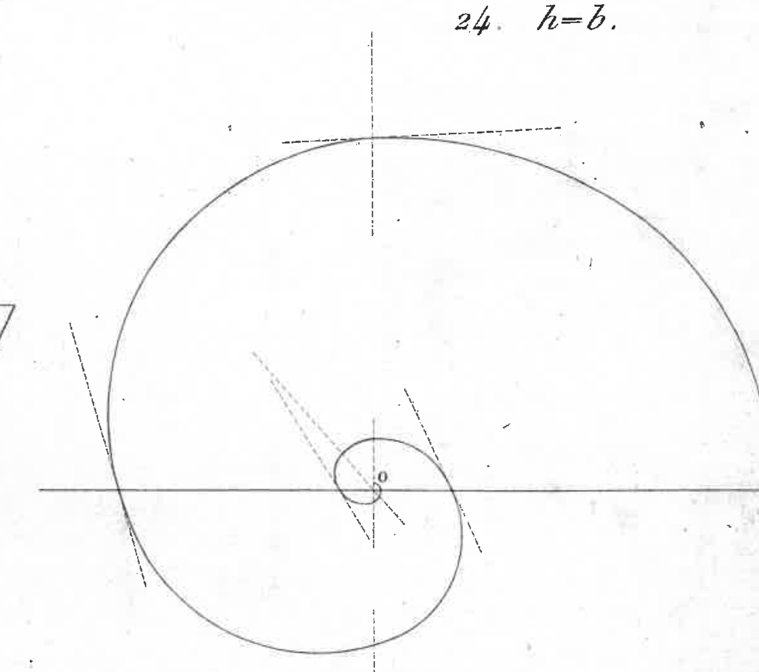
23. $h > b$.



25.



24. $h = b$.



Digeon, imp. r. S. Jacques, 29, à Paris. E. Wormser sc.