RECHERCHES SUR UNE NOUVELLE ESPECE DE QUARRÉS MAGIQUES,

PAR

Mr. L. EULER.

§. 1. Une question fort curieuse, qui a exercé pendant quelque temps la sagacité de bien du monde, m'a engagé à faire les recherches suivantes, qui semblent ouvrir une nouvelle carrière dans l'Analyse, et en particulier dans la doctrine des combinaisons. Cette question rouloit sur une assemblée de 36 Officiers de six différens grades et tirés de six Régimens différens, qu'il s'agissoit de ranger dans un quarré, de manière que sur chaque ligne tant horizontale que verticale il se trouva six Officiers tant de différens ca-

caractères que de Régimens différens. Or, après toutes les peines qu'on s'est donné pour resoudre ce Problême, on a été obligé de reconnoître, qu'un tel arrangement est absolument impossible; quoiqu'on ne puisse pas en donner de démonstration rigoureuse.

§. 2. Pour mieux expliquer l'état de la question mentionnée, je marquerai les six Régimens differens par les lettres latines a, b, c, d, e, f, et les six différens grades par les grecques α, β, γ, δ, ε, ζ, et il est clair que le Caractère de chaque Officier est determiné par deux lettres, l'une latine, et l'autre grecque, dont la première marque son Régiment, et l'autre son grade et qu'il y aura en effet trente six combinaisons de deux de ces lettres, que voici:

aα	aβ	aγ	aδ	aε	aζ
bα	bβ	bγ	bδ	bε	bζ
cα	cβ	cγ	cδ	cε	cζ
dα	dβ	dγ	dδ	dε	dζ
eα	eβ	eγ	eδ	eε	eζ
fα	fβ	fγ	fδ	fε	fζ

dont chacune exprime le caractère d'un Officier. Il s'agit donc d'inscrire ces 36 termes dans les 36 cases d'un quarré, en sorte que sur chaque bande tant horizontale que verticale on rencontre tant les six lettres latines que les grecques.

§. 3. On aura donc trois conditions à remplir, dont la premiere exige, que sur chaque ligne horizontale on trouve les six lettres tant latines que grecques; en second lieu, que les douze mêmes caractères se rencontrent dans toutes les bandes verticales, et enfin, que tous les trente six termes rapportés se trouvent réellement inscrits dans le quarré; ou, ce qui revient au même, qu'aucun terme ne s'y rencontre deux fois: Car s'il ne s'agissoit que de satisfaire aux deux premières conditions, il ne seroit pas difficile de trouver plusieures solutions, dont en voici une:

aα	bζ	cδ	dε	eγ	fβ
bβ	cα	fε	eδ	aζ	dγ
cγ	dε	aβ	bζ	fδ	eα
dδ	fγ	eζ	cβ	bα	aε
eε	aδ	bγ	fα	dβ	cζ
fζ	eβ	dα	aγ	cε	bδ

mais cet arrangement a le defaut, que les termes bζ et dε s'y rencontrent deux fois, et que les termes bε et dζ y manquent entièrement.

§. 4. Puis donc que tous les soins em-

employés pour la construction d'un tel quarré de trente-six cases ont été inutiles, pour donner plus d'étendüe à mes recherches, au lieu de six Régimens et de six différens grades je mettrai un nombre quelconque n, de sorte qu'il y ait n lettres latines a, b, c, d, &c et autant de grecques $\alpha, \beta, \gamma, \delta,$ &c. à combiner de nn manières différentes et à ranger tellement dans un quarré de nn cases, que chaque bande tant horizontale que verticale contienne toutes les lettres latines et grecques et qu'aucun terme ne se rencontre deux fois dans le quarré.

§. 5. Parce donc que chaque ligne du quarré contient toutes ces différentes lettres, et que partant la somme en est partout la même: il est clair, qu'un tel arrangement satisfera à la condition des quarrés magiques ordinaires; Car pour produire tous les nombres dans l'ordre naturel, on n'a qu'à donner aux lettres latines a, b, c, d, e, &c. les valeurs o, n, 2n, 3n, 4n . . . (n—1) n et aux lettres grecques $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon,$ &c. les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, &c. . . . n. Mais puisque dans ces quarrés il s'agit seulement de la somme de tous les nombres, qui se trouvent dans chaque bande tant horizontale que verticale, il n'est point necessaire, que tous les nombres s'y trouvent sur chaque bande, pourvû que la somme en soit partout la même; ce qui est aussi la raison, par la quelle on peut construire des quarrés magiques ordinaires de 36 cases.

§. 6. Pour rendre plus commodes les opérations, que j'aurai à faire dans la suite, je mettrai au lieu des lettres latines et grecques les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. dont je nommerai, pour les distinguer entre eux, les uns les nombres *latins* et les autres les nombres *grecs*; et afin de ne jamais les confondre, je joindrai les nombres grecs aux latins en forme d'exposans, de la manière qu'on va voir dans le quarré ci-joint de 49 cases:

1^1	2^6	3^4	4^3	5^7	6^5	7^2
2^2	3^7	1^5	5^4	4^1	7^6	6^3
3^3	6^1	5^6	7^5	1^2	4^7	2^4
4^4	5^2	6^7	1^6	7^3	2^1	3^5
5^5	1^3	7^1	2^7	6^4	3^2	4^6
6^6	7^4	4^2	3^1	2^5	5^3	1^7
7^7	4^5	2^3	6^2	3^6	1^4	5^1

 dans

dans le quel j'ai rangé les nombres latins ſuivant leur ordre naturel, tant dans la première bande horizontale que verticale, de ſorte que ces nombres repréſentent en même temps les indices de ces deux bandes et ceux de leurs compagnes. J'ai ègalé auſſi les nombres grecs ou expoſans aux latins dans la première bande verticale, comme je ferai partout dans la ſuite, puisque la ſignification de ces nombres est abſolument arbitraire.

§. 7. Puisqu'il est aiſé de ſe convaincre, que tous les termes inſcrits dans le quarré précèdent ſatisfont parfaitement aux trois conditions requiſés et rapportées ci-desſus: pour rapprocher le Lecteur du point de vüe du quel il faut enviſager la plupart des methodes qui nous ont conduites aux recherches ſuivantes, nous allons en faire le commencement par l'Analyſe de la conſtruction du quarré rapporté. Pour cet effet nous reprenons le quarré latin fondamentel, qui, en omettant les expoſans, aura la forme ſuivante:

1	2	3	4	5	6	7
2	3	1	5	4	7	6
3	6	5	7	1	4	2
4	5	6	1	7	2	3
5	1	7	2	6	3	4
6	7	4	3	2	5	1
7	4	2	6	3	1	5

où chacune des ſept bandes, tant horizontales que verticales, contient tous les ſept nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

§. 8 Ayant donc établi ce quarré *latin*, tout revient à trouver une methode ſure pour joindre les nombres grecs ou expoſans à chaque nombre latin de ce quarré, et d'abord, pour commencer par l'expoſant 1, puisqu'il faut qu'il ſe rencontre dans chaque bande tant horizontale que verticale, il ſ'agit de tirer des bandes verticales ſept nombres différens entre eux et tels, qu'ils ſe rapportent en même temps à des bandes différentes horizontales; ou bién: ces nombres, qu'on tire de chaque bande verticale, doivent tous être pris à différentes hauteurs, ce qu'il faut faire pareillement par rapport aux autres expoſans 2, 3, 4, 5, &c. Ou il faut encore remarquer, que puisque nous

nous supposons les exposans de la première verticale connus et que nous les egalons toujours aux nombres latins de cette bande, les premiers termes de ces formules, que nous venons de décrire, suivront toujours l'ordre des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

§. 9. Puis donc que dans les recherches suivantes tout depend de ces formules, qui nous servent à regler l'inscription des exposans, ou à determiner les grades des Officiers rangés, je les nommerai dans la suite les *formules directrices*, dont il faut en avoir une pour chaque exposant. Ainsi dans le quarré de 49 cases rapporté ci dessus au paragraphe 6^{me} les formules directrices sont

Pour l'exposant	1	celle-ci	1	6	7	3	4	2	5
———	2	———	2	5	4	6	1	3	7
———	3	———	3	1	2	4	7	5	6
———	4	———	4	7	3	5	6	1	2
———	5	———	5	4	1	7	2	6	3
———	6	———	6	2	5	1	3	7	4
———	7	———	7	3	6	2	5	4	1

Voila donc ce qu'il faut entendre par le terme : *formules directrices*, dont nous nous servirons partout dans la suite, et il

il est d'abord évident, que, pour construire un quarré complet, il faut avoir une telle formule directrice pour chaque nombre grec ou exposant. Ensuite il faut necessairement que toutes ces formules directrices s'accordent tellement entre elles, qu'en les ecrivant l'une sous l'autre on rencontre dans chaque rangée verticale tous les différens nombres ; puisque autrement le même nombre du quarré latin ou principal dévroit recevoir deux exposans différens.

§. 10. Ayant donc établi pour un cas quelconque un quarré de nombres latins, la première operation consiste à chercher les formules directrices pour chaque exposant ; et s'il arrive, que pour un seul de ces nombres on ne puisse pas trouver une telle formule, on peut hardiment prononcer, que le quarré latin est incapable de fournir un quarré complet. Et quand même on aura trouvé des formules directrices pour tous les exposans, s'il est impossible de les choisir ensorte, qu'elles s'accordent entre elles, de la manière que je viens d'assigner et comme cela a reusa reussi dans l'exemple rapporté, c'est encore une marque sure, que le quarré latin n'est pas propre a fournir une solution du Problème. Mais il faut bien prendre garde, de ne faire cette conclusion, qu'après s'être pleinement convaincu qu'on a trouvé et examiné toutes les formules directrices, que le quarré proposé peut admettre.

§. 11. La formation des formules directrices est donc le premier et le principal objet dans ces recherches; mais je dois avoüer, que jusqu'ici je n'avois aucune methode sure qui puisse conduire à cette investigation. Il semble même qu'on doit se contenter d'une espece de simple tatonnement que je vais expliquer pour le quarré latin de 49 cases rapporté ci-dessus. — Pour trouver par exemple la formule directrice de l'exposant 4 de ce quarré, choisissons à volonté les quatre premiers termes, que je prendrai, comme ils ont été marqués 4 7 3 5, et qui sont tirés des quatre premières bandes verticales et des quatre horizontales, qui repondent aux indices 4, 6, 1, 2, et il est clair que les trois derniers termes de nôtre formule 1 2 6 doivent être tirés des trois dernières bandes verticales et des trois horizontales, qui repondent aux indices 3, 5, 7. Or les morceaux des bandes horizontales 3^e, 5^e & 7^e nous fournissent les termes suivans:

1	4	2
6	3	4
3	1	5

des-quelles resultent évidemment les trois derniers termes de nôtre directrice dans l'ordre 6, 1, 2, comme nous les avons assignés ci-dessus. Si les quatre premiers termes ne nous avoient point été connus, on voit par ce que nous venons de dire qu'il auroit falu examiner de la même manière toutes les combinaisons possibles.

§. 12. Après avoir exposé en général les opérations qu'on doit entreprendre pour construire de tels quarrés complets, je passe à des recherches plus particulières, qui varieront naturellement par rapport à la nature des quarrés latins, qui peuvent être formés en d'autant plus de manières differentes, que le nombre de cases, dont il est composé, est grand; et on aisément s'apſ'apperçoit, que bientot le nombre de toutes les façons de le conſtruire poſſibles devient ſi grand, qu'on n'en ſçauroit plus faire le dénombrement. C'est pourquoi je me contenterai ici de parcourir quelques espèces ſimples et regulières de quarrés latins, qui ne manqueront pas de nous conduire à des espèces beaucoup plus compliquées.

§. 13. D'abord le quarré latin le plus ſimple est ſans doute celui, où tous les nombres 1, 2, 3, 4, &c. marchent dans leur ordre naturel, en obſervant, qu'étant parvenu au dernier, on doit recommencer par l'unité. Les quarrés de cette première espèce d'une claſſification, qui ſ'est préſentée, pour ainſi dire, d'elle même, auront en général pour tout nombre de caſes n n la forme ſuivante.

1	2	3	4	5	6	-	-	n
2	3	4	5	6	-	-	n	1
3	4	5	6	-	-	n	1	2
4	5	6	-	-	n	1	2	3
5	6	-	-	n	1	2	3	4
6	-	-	n	1	2	3	4	5

&c.

Les quarrés de cette première espèce, qui a lieu pour tous les nombres des bandes horizontales et verticales *n*, ſeront nommés dans la ſuite quarrés latins *à ſimple marche*.

§. 14. La ſeconde espèce contiendra ſuivant cette claſſification les quarrés latins *à double marche*, qui naiſſent en prennant les nombres de la première horizontale rangés dans leur ordre naturel, deux à deux et les transpoſant dans la ſeconde horizontale, qui ſera par conſequent 2 1 4 3 6 5 8 7 &c. De celle-ci et de la première horizontale on conſtruit enſuite la troiſième et la quatrième, en ajoutant 2 à chacun de leurs termes; la cinquième et ſixième en ajoutant 2 aux termes de la troiſième et quatrième et ainſi de ſuite. Les quarrés *à double marche* ainſi formés auront en général la forme ſuivante:

1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
2	1	4	3	6	5	8	7	&c.
3	4	5	6	7	8	9	10	&c.
4	3	6	5	8	7	10	9	&c.
5	6	7	8	9	10	11	12	&c.
6	5	8	7	10	9	12	11	&c.

&c.

par la quelle on peut voir facilement, que cette ſeconde espèce ne ſçauroit avoir lieu que pour les quarrés, dont le le nombre des cases dans chaque bande est pair.

§. 15. A la troisième classe je rapporte les quarrés latins *à triple marche*, où l'on considere dans la première bande horizontale trois nombres conjointement pour les varier en trois différentes manières, avant que de former les bandes suivantes, qu'on obtient trois à trois en ajoutant 3 aux termes des trois précédentes, comme on peut voir dans la forme générale suivante:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	&c.
2	3	1	5	6	4	8	9	7	&c.
3	1	2	6	4	5	9	7	8	&c.
4	5	6	7	8	9	10	11	12	&c.
5	6	4	8	9	7	11	12	10	&c.
6	4	5	9	7	8	12	10	11	&c.
7	8	9	10	11	12	13	14	15	&c.
				&c.					

qui nous fait voir que cette construction ne peut valoir que lorsque le nombre des cases, qu'une bande renferme, est divisible par 3.

§. 16. De la même manière on peut former les quarrés de la quatrième classe procedans *à quadruple marche* en prenant

séparement quatre à quatre des termes de la première bande horizontale et passant par toutes les transpositions qu'ils admettent, et qui forment les quatre premières bandes horizontales, dont on tire les quatre suivantes en ajoutant 4 à chaque terme et ainsi des autres. Mais comme les quatre premiers termes 1 2 3 4 admettent plusieures différentes transpositions, nous aurons plusieures formes générales pour les quarrés de cette espèce, dont il suffira de rapporter le premier membre (j'appelle membre d'un quarré une de ses parties quelconque, qui forme un quarré a part), attendu qu'il est facile d'en déduire la formule générale, les transpositions étans les mêmes dans toutes les autres membres ou quarrés simples dont le grand quarré latin, qui dans cette classe doit toujours avoir un nombre de cases divisibles par $4^2=16$, est composé. Voici quatre transpositions semblables

I				II				III				IV			
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
2	1	4	3	2	1	4	3	2	3	4	1	2	4	1	3
3	4	1	2	3	4	2	1	3	4	1	2	3	1	4	2
4	3	2	1	4	3	1	2	4	1	2	3	4	3	2	1

dont il feroit superflu de former ou de rapporter les formes générales pour les

quar-

quarrés composés de pareils membres. On s'apercoit aisément, qu'on n'a qu'à varier suivant les mêmes loix les quaternaires suivans de la première horizontale. On voit aussi que cette classification pourroit nous conduire à bien d'autres quarrés réguliers ; mais nous nous arretons ici pour devélopper plus soigneusement dans les sections suivantes les quatre espèces que nous venons d'établir et pour en déduire des quarrés complets.

SECTION PREMIERE.

Des Quarrés latins à simple marche, de la forme générale:

1	2	3	4	5	6	-	-	n
2	3	4	5	6	-	-	n	1
3	4	5	6	-	-	n	1	2
4	5	6	-	-	n	1	2	3
5	6	-	-	n	1	2	3	4
6	-	-	n	1	2	3	4	5

&c.

Cas de n=2.

§. 17. Commencons par le cas le plus simple, où $n=2$ et le quarré latin: $\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{smallmatrix}$, d'où

d'où l'on ne sauroit tirer aucune formule directrice et par conséquent ce cas est impossible, puisqu'on n'en peut déduire aucun autre quarré. Et en effet, si l'on satisfait aux deux premières conditions de la question rapportées au §. 3. on parvient au quarré $\begin{smallmatrix}1^1 & 2^2\\ 2^2 & 1^1\end{smallmatrix}$ où les deux termes 1^1 et 2^2 se trouvent deux fois, pendant que les deux autres 2^1 et 1^2 manquent entièrement. Donc si la question rouloit sur une assemblée de quatre Officiers de deux différens grades et Regimens, on voit d'abord, qu'il seroit impossible de les ranger dans un quarré de la manière préscrite.

Cas de n=3.

§. 18. Passons au cas où $n=3$ et nôtre quarré latin sera:

1	2	3
2	3	1
3	1	2

dont la diagonale a termes différens, $\begin{smallmatrix}1\\ 3 & 2\end{smallmatrix}$ fournit d'abord une formule directrice pour l'exposant 1; et puisque tous les nombres croissent, en descendant, de l'unité, il est clair que les formules directrices suivont le même ordre et qu'elles seront par consequent