IMAGES DE REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES ASSOCIÉES À CERTAINES FORMES MODULAIRES DE SIEGEL DE GENRE 2

SALIM TAYOU

Abstract. We study the image of the ℓ-adic Galois representations associated to the four vector valued Siegel modular forms appearing in the work of Chenevier and Lannes [3]. These representations are symplectic of dimension 4. Following methods used by Dieulefait in [4], we determine the primes ℓ for which these representations are absolutely irreducible. In addition, we show that their image is "full" for all primes ℓ such that the associated residual representation is absolutely irreducible, except in two cases.

Table des matières

1. Introduction 1
2. Action de l'inertie 4
3. Étude de l'irréductibilité 5
4. Sous-groupes maximaux du groupe projectif symplectique 9
5. Étude de l'image 11
6. Calculs explicites 16

Références 17

1. Introduction

Soient j, k des entiers ≥ 0 et $\mathrm{S}_{j,k}(\Gamma_2)$ l'espace des formes modulaires paraboliques de Siegel pour le groupe $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) =: \Gamma_2$ à coefficients vectoriels $\mathrm{Sym}^j \mathbb{C}^2 \otimes \det^k$ (on dira aussi "de poids (j, k)"). Dans ce travail, on s'intéresse à la détermination des images des représentations galoisiennes ℓ-adiques associées à quatre telles formes modulaires de poids dans la liste $\{(6, 8), (8, 8), (4, 10), (12, 6)\}$. Notre motivation provient du travail de Chenevier et Lannes sur le comptage des p-voisinages au sens de Kneser entre réseaux de Niemeier (voir [3]), dans lequel ces formes interviennent de manière essentielle.

Date: 26 mai 2016.

On rappelle que l'espace $\mathrm{S}_{j,k}(\Gamma_2)$ est muni d'une action d'opérateurs de Hecke (voir par exemple le chapitre 16 de [15])). Soit $f \in \mathrm{S}_{j,k}(\Gamma_2)$ une forme propre pour l'action de ces opérateurs (f non nulle). Le sous-corps de $\mathbb{C}$ engendré par les valeurs propres de l'action sur f des opérateurs en question est alors un corps de nombres, que l'on notera $\mathbb{Q}(f)$. De plus, on associe suivant Andrianov un produit Eulérien $\zeta_f(s) = \prod_p Q_p(p^{-s})^{-1}$, absolument convergent pour $\mathrm{Re}(s)$ assez grand, où pour tout premier p l'élément $Q_p(X) \in \mathbb{Q}(f)[X]$ est un polynôme de degré 4 de la forme

$$Q_p(X) = 1 - a_p(f)X + b_p(f)X^2 - p^{2k+j-3}a_p(f)X^3 + p^{4k+2j-6}X^4,$$

les coefficients $a_p(f)$ et $b_p(f)$ étant les valeurs propres de certains opérateurs de Hecke explicites.

Le théorème suivant est essentiellement dû à Weissauer [17] (voir également la discussion du chapitre VIII.2.15 de [3]).

Théorème 1.1. *Soit $f \in \mathrm{S}_{j,k}(\Gamma_2)$ une forme propre pour l'action des opérateurs de Hecke. Pour tout nombre premier ℓ et toute place λ de $\mathbb{Q}(f)$ au dessus de ℓ, il existe un $\overline{\mathbb{Q}(f)_\lambda}$-espace vectoriel V de dimension 4, muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée b, ainsi qu'une représentation semi-simple et continue*

$$r_f : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GSp}(b)$$

non ramifiée hors de ℓ et vérifiant les propriétés suivantes :

(i) pour tout nombre premier $p \neq \ell$, $\det(1 - X r_f(\mathrm{Frob}_p)) = Q_p(X)$,

(ii) si $\eta : \mathrm{GSp}(b) \to \overline{\mathbb{Q}(f)_\lambda}^\times$ est le facteur de similitude associé à b, alors on a $\eta \circ r_f = \chi_\ell^{j+2k-3}$, χ_ℓ désignant le caractère cyclotomique ℓ-adique.

On rappelle que Tsushima a déterminé dans [14] une formule explicite pour la dimension de l'espace $\mathrm{S}_{j,k}(\Gamma_2)$ pour $k \geq 5$. Cette dimension vaut 1 pour les quatre couples (j,k) dans $\{(6,8),(8,8),(4,10),(12,6)\}$ déjà mentionnés. Si f est un élément non nul de $\mathrm{S}_{j,k}(\Gamma_2)$ pour l'une de ces quatre valeurs, il est en particulier automatiquement vecteur propre de tous les opérateurs de Hecke. De plus, on a alors $\mathbb{Q}(f) = \mathbb{Q}$ et les polynômes Q_p associés à f sont dans $\mathbb{Z}[X]$ d'après la proposition IX.1.9 de [3]. On notera $r_{j,k,\ell}$ la représentation ℓ-adique r_f associée à cette forme f et à ℓ par le théorème ci-dessus. C'est une représentation irréductible d'après un résultat de Calegari et Gee [1] et le §X.1.3 de [3].

On notera également $\overline{r_{j,k,\ell}}$ la $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation résiduelle associée à $r_{j,k,\ell}$ par un procédé standard (voir par exemple la discussion à la fin du chapitre X.1 de [3]). Disons brièvement que la représentation $r_{j,k,\ell}$ est définie sur une extension finie E de $\mathbb{Q}_\ell$ et admet un $\mathcal{O}_E$-réseau stable L. On définit $\overline{r_{j,k,\ell}}$ comme étant la semi-simplifiée de la représentation $L/(\pi_E L) \otimes_{\mathcal{O}_E/\pi_E} \overline{\mathbb{F}_\ell}$, où π_E désigne une uniformisante de $\mathcal{O}_E$. Elle est en fait définie sur le corps fini $\mathbb{F}_\ell$ et peut être choisie à valeurs dans le groupe fini $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_\ell)$ (voir *loc. cit.*). Elle est continue, non-ramifiée hors de ℓ, et vérifie des conditions similaires aux (i) et (ii) de l'énoncé ci-dessus, dans lesquelles Q_p et χ_ℓ sont remplacés par leurs réductions modulo ℓ.

Théorème 1.2. *Soit ℓ un nombre premier. Alors la représentation $\overline{r_{j,k,\ell}}$ est absolument irréductible si, et seulement si, on a $\ell \geq 7$ et si l'on est dans l'un des cas suivants :*

$$(j,k) = (6,8) \quad \textit{et} \quad \ell \neq 11, 17, \qquad (j,k) = (8,8) \quad \textit{et} \quad \ell \neq 13, 17, 23,$$

$$(j,k) = (12,6) \quad \textit{et} \quad \ell \neq 7, 13, 19, \quad (j,k) = (4,10) \quad \textit{et} \quad \ell \neq 11, 19, 41.$$

Une partie des résultats de ce théorème est déjà connue d'après le théorème X.4.4 et la prop. X.4.10 de [3] pour des petites valeurs de ℓ ($\ell < j + 2k - 3$) et pour $(8,8,23)$ et $(4,10,41)$. Pour ℓ assez grand, nous reprenons la méthode de Dieulefait dans [4], qui démontre que le théorème vaut pour tout ℓ assez grand, et ce avec un minorant effectif. Un examen de cette méthode, ainsi que la connaissance des polynômes caractéristiques de $r_{j,k,\ell}(\mathrm{Frob}_p)$ pour $p = 2, 3$ (déterminés par Faber et van der Geer dans [15, §3], voir aussi [3, tables C.3 et C.4] et [8]), nous permet de conclure pour tout triplet non couvert par les résultats de Chenevier et Lannes [3].

Le théorème principal que l'on démontre dans cet article est le suivant :

Théorème 1.3. *Soit ℓ un nombre premier. On suppose que $\overline{r_{j,k,\ell}}$ est absolument irréductible et que $(j,k,\ell) \neq (6,8,13), (4,10,17)$. Alors l'image de la représentation $r_{j,k,\ell}$ est conjuguée à*

$$\{M \in \mathrm{GSp}_4(\mathbb{Z}_\ell) | \eta(M) \in (\mathbb{Z}_\ell{}^\times)^{j+2k-3}\}.$$

La démonstration de ce théorème procède de la manière suivante. Tout d'abord, on se ramène (par un argument dû à Serre) à montrer que l'image de $\overline{r_{j,k,\ell}}$ contient $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_\ell)$. Si ce n'était pas le cas, cette image serait incluse dans l'un des sous-groupes maximaux de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_\ell)$ classifiés par Mitchell [9] (voir le §4). Nous élaborons pour cela la méthode de Dieulefait [4] et dégageons des critères effectifs permettant d'exclure chacun des cas possibles. L'application de ces critères nécessite de connaître le polynôme caractéristique de $r_{j,k,\ell}(\mathrm{Frob}_p)$ pour $p \leq 13$, qui est connu d'après [3, table C.3, C.4]. Mentionnons que le cas $(6,8,13)$ non traité par le théorème 1.3 a déjà été mis en évidence dans les travaux de Chenevier et Lannes (voir [3] chapitre X. remarque

4.11 où une conjecture est faite). Le fait que le cas $(4, 10, 17)$ soit particulier semble nouveau. Les résultats des calculs laissent penser que l'image stabilise un plan non dégénéré dans $\Lambda^2 V$. Il serait intéressant d'avoir une démonstration de ces résultats.

L'article s'organise comme suit : dans le premier paragraphe, on donne des rappels sur les caractères fondamentaux ainsi que la description de la restriction de $\overline{r_{j,k,\ell}}$ à un sous-groupe d'inertie en ℓ. Dans le deuxième paragraphe, on démontre l'irréductibilité des représentations $\overline{r_{j,k,\ell}}$. Dans le troisième paragraphe, on énonce la liste des sous-groupes maximaux de $\mathrm{PGSp}(4, \mathbb{F}_\ell)$. Enfin, le dernier paragraphe démontre le théorème 1.3.

Les méthodes de cet article permettent sans doute d'obtenir des résultats analogues concernant les représentations galoisiennes ℓ-adiques associées à des formes propres dans $\mathrm{S}_{j,k}(\Gamma_2)$ pour d'autres couples (j, k) que ceux considérés ici, du moins lorsque la dimension de cet espace est 1 et que ℓ est assez grand. Cependant, si l'on désire des résultats complets (incluant toutes les valeurs de ℓ, notamment les petites) il faut pouvoir disposer de diverses congruences, comme celles "à la Harder" démontrées dans [3, Thm 4.4], ainsi que de tables de polynômes caractéristiques de Frobenius (il n'est pas certain que celles de Faber et van der Geer suffisent). Mégarbané nous a communiqué des résultats dans ce sens pour les formes vérifiant $j + 2k - 3 = 25$.

Remerciements. Je tiens à remercier Gaëtan Chenevier pour sa relecture détaillée, ses remarques judicieuses et son encadrement pour l'écriture de cet article. Je remercie également Quentin Guignard et Thomas Mégarbané pour les corrections apportées à ce document.

2. Action de l'inertie

Caractères fondamentaux. Une bonne référence pour cette partie est le premier paragraphe de l'article de Serre [11]. On se donne un nombre premier ℓ, et on fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ du corps des nombres ℓ-adiques $\mathbb{Q}_\ell$ et $\overline{\mathbb{F}_\ell}$ du corps fini $\mathbb{F}_\ell$. On fixe un isomorphisme $\sigma : \mathbb{Z}_\ell^{nr}/\ell\mathbb{Z}_\ell^{nr} \to \overline{\mathbb{F}_\ell}$, où $\mathbb{Z}_\ell^{nr}$ désigne l'anneau des entiers de l'extension maximale non-ramifiée de $\mathbb{Q}_\ell$ dans $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ et que l'on note $\mathbb{Q}_\ell^{nr}$. Le groupe d'inertie en ℓ est $\mathrm{I}_\ell = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell^{nr})$.

Si $N > 0$, on notera x_N une racine $(\ell^N - 1)$-ième de ℓ dans $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$. On définit alors le caractère fondamental de niveau N par la composée

$$\psi_N : \mathrm{I}_\ell \to \mu_{\ell^N - 1} \to \overline{\mathbb{F}_\ell}^\times$$

donnée par

$$\tau \mapsto \frac{\tau(x_N)}{x_N} \mapsto \sigma\left(\frac{\tau(x_N)}{x_N}\right).$$

Ceci est indépendant du choix de x_N car I_ℓ agit trivialement sur les racines (ℓ^N-1)-ième de l'unité dans $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$. L'image de ψ_N est alors le groupe multiplicatif de l'unique sous-corps de $\overline{\mathbb{F}_\ell}$ de cardinal ℓ^N. On peut vérifier que ψ_1 est la réduction modulo ℓ du caractère cyclotomique χ_ℓ restreint à I_ℓ. D'autre part, si M divise N alors $\psi_M = {\psi_N}^{\frac{\ell^N-1}{\ell^M-1}}$.

Soit $\psi : \mathrm{I}_\ell \to \overline{\mathbb{F}_\ell}^\times$ un caractère continu. Il existe un entier $N \geq 1$ et un entier $0 \leq a < \ell^N$ tel que $\psi = \psi_N^a$. Notons a' l'unique élément de $\{0, \ldots, \ell-1\}$ tel que $a \equiv a' \bmod \ell$. Observons que a' ne dépend pas du choix de l'écriture de ψ sous la forme $\psi = \psi_N^a$. En effet, supposons que l'on ait l'égalité $\psi_N^a = \psi_M^b$. On constate que l'on a $\psi_N^a = \psi_{NM}^{a\frac{\ell^{NM}-1}{\ell^N-1}}$, $0 \leq a\frac{\ell^{NM}-1}{\ell^N-1} < \ell^{NM}$ et la congruence $a \equiv a\frac{\ell^{NM}-1}{\ell^N-1} \bmod \ell$. En procédant de manière similaire pour b, on peut donc supposer que $N = M$, ce qui entraîne $a = b$. Nous appellerons *poids* de ψ l'élément $a' \in \{0, \ldots, \ell-1\}$ bien défini par ces observations. On le note $k(\psi)$.

Soit V une $\overline{\mathbb{F}_\ell}$-représentation continue de dimension finie d du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Soit U la semi-simplifiée de la restriction de V à I_ℓ. C'est une somme directe de d caractères. On appelle *poids d'inertie modérée* de V la collection des poids de ces caractères. Il s'agit donc d'une famille de d entiers (non nécessairement distincts) de $\{0, \ldots, \ell-1\}$.

Lemme 2.1. *Soit V une $\overline{\mathbb{F}_\ell}$-représentation continue de dimension finie d du groupe* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$*. On suppose que V a pour poids d'inertie modérée les entiers k_i avec $i = 1, \cdots, d$. On suppose de plus que $k_i + k_j < \ell$ pour $i < j$. Alors les poids d'inertie modérée de $\Lambda^2 V$ sont les $k_i + k_j$ avec $i < j$.*

La démonstration de ce lemme est laissée au lecteur.

Action de l'inertie. Soit ℓ un nombre premier. On a défini dans l'introduction une représentation galoisienne ℓ-adique $\overline{r_{j,k,\ell}}$ pour $(j,k) \in \{(6,8),(8,8),(4,10),(12,6)\}$. La proposition suivante décrit l'action du groupe d'inertie en ℓ. On fixe un plongement $\overline{\mathbb{Q}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}$, ce qui nous fournit un morphisme de groupes $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell) \to \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. D'après les rappels ci-dessus concernant la définition de $r_{j,k,\ell}$, et d'après [2], la représentation $r_{j,k,\ell}$ est une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation cristalline de dimension 4, de poids de Hodge-Tate $0, k-2, j+k-1$, et $j+2k-3$. Le théorème de Fontaine-Laffaille [5] admet donc la conséquence suivante.

Proposition 2.2. *On suppose $\ell > j + 2k - 2$. Les poids d'inertie modérée de la restriction de $\overline{r_{j,k,\ell}}$ à* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)$*, sont* $0, k-2, j+k-1$ *et* $j+2k-3$.

3. Étude de l'irréductibilité

On va étudier l'irréductibilité des $\overline{r_{j,k,l}}$ pour $(j,k) \in \{(6,8),(8,8),(4,10),(12,6)\}$. Le but sera de démontrer le théorème 1.2. Soient p un nombre premier et (j,k) l'un des quatre couples définis dans l'introduction. Si $r \geq 1$ est un entier, on note $\tau_{j,k}(p^r)$ la trace de Frob_p^r dans la représentation $r_{j,k,\ell}$. D'après le théorème 1.1 et [3, Prop. IX.1.9], c'est un nombre entier indépendant du choix du nombre premier $\ell \neq p$. Le polynôme caractéristique de $r_{j,k,\ell}(\mathrm{Frob}_p)$ est alors de la forme :

$$P_{j,k,p}(X) = X^4 Q_p(\tfrac{1}{X})$$
$$= X^4 - \tau_{j,k}(p)X^3 + \tfrac{\tau_{j,k}(p)^2 - \tau_{j,k}(p^2)}{2}X^2 - \tau_{j,k}(p)p^{2k+j-3}X + p^{4k+2j-6}.$$

Le calcul des $\tau_{j,k}(p^r)$ pour des petites valeurs de p et r a été effectué par Faber et van der Geer (voir le chapitre 25 dans [15]), et de manière différente par Chenevier et Lannes dans [3]. Nous n'utiliserons ces calculs explicites que pour $p = 2, 3, 5, 7, 13$.

La représentation $\overline{r_{j,k,\ell}}$ vérifie $\overline{r_{j,k,\ell}}^* \simeq \overline{r_{j,k,\ell}} \otimes \chi_l^{-(j+2k-3)}$. On en déduit que l'ensemble fini $\mathrm{J}(\overline{r_{j,k,\ell}})$ des facteurs de Jordan-Hölder de $\overline{r_{j,k,\ell}}$ est stable par l'opération $W \mapsto W^* \otimes \chi_l^{j+2k-3}$. Observons d'abord que $\mathrm{J}(\overline{r_{j,k,\ell}})$ ne peut pas contenir des éléments de dimension 3. En effet, dans le cas contraire, soit W un tel élément, alors W est irréductible et la restriction b_W de la forme bilinéaire alternée b à W est dégénérée. Son noyau est alors de dimension 1 ou 3. Mais comme b est d'indice 2, le noyau de b_W est de dimension 1 et c'est une sous-représentation de W ce qui n'est pas possible.

L'objectif est de montrer que $\mathrm{J}(\overline{r_{j,k,\ell}})$ est réduit à un singleton sauf dans les cas exclus par le théorème 1.2. Si $\ell \leq j + 2k - 3$, cela résulte de la proposition 4.10 du chapitre X de [3]. Cependant, les critères d'irréductibilité *ad hoc* employés *loc. cit.*, qui donnent des conditions suffisantes mais non nécessaires a priori, deviennent fastidieux à vérifier, notamment le calcul de l'entier κ, quand ℓ grandit. De plus, ils ne permettent au mieux que de traiter un nombre fini de valeurs de ℓ, pour un (j,k) donné. L'ingrédient nouveau utilisé ci-dessous est l'action de l'inertie en ℓ.

On suppose dorénavant $\ell > j + 2k - 3$. Si $\mathrm{J}(\overline{r_{j,k,\ell}})$ n'est pas un singleton, alors on n'est dans l'une des situations suivantes :

Existence d'une droite stable. Comme la représentation $\overline{r_{j,k,\ell}}$ est non ramifiée hors de ℓ, l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur une droite stable D est donnée par une puissance entière de χ_ℓ (Kronecker-Weber). Comme de plus on a $\ell > j + 2k - 2$, la proposition 2.2 montre que c'est χ_ℓ^i avec $i = 0, k-2, j+k-1, j+2k-3$. Il s'ensuit que $\chi_\ell^i(\mathrm{Frob}_p)$ pour ℓ premier différent de p, est racine du polynôme $P_{j,k,p}$ modulo ℓ. D'autre part, $D^* \otimes \chi_\ell^{j+2k-3}$ est également une droite stable, donc $\chi_\ell^{j+2k-3-i}(\mathrm{Frob}_p)$ est également racine du polynôme $P_{j,k,p}$ modulo ℓ. On a donc, selon la valeur de i, que 1 ou $\chi_\ell^{j+k-1}(\mathrm{Frob}_p)$ est racine du polynôme $P_{j,k,p}$

modulo ℓ, pour ℓ nombre premier différent de p.
Dans le premier cas, on obtient la condition que ℓ divise le nombre :

$$A_{j,k}(p) = \frac{\tau_{j,k}(p)^2 - \tau_{j,k}(p^2)}{2} - \tau_{j,k}(p)(p^{2k+j-3}+1) + p^{4k+2j-6} + 1.$$

Dans le second cas, on doit avoir ℓ qui divise :

$$B_{j,k}(p) = p^{2k-4}(1+p^{2j+2}) - \tau_{j,k}(p)p^{k-2}(1+p^{j+1}) + \frac{\tau_{j,k}(p)^2 - \tau_{j,k}(p^2)}{2}.$$

Existence de deux composantes de dimension 2 *reliées.* C'est le cas où la représentation se décompose en somme de deux représentations galoisiennes irréductibles :

$$\overline{r_{j,k,\ell}} \simeq \pi_1 \oplus \pi_2$$

telle que $\pi_1^* \otimes \chi_l^{j+2k-3} \simeq \pi_2$. Cette relation montre que les ensembles P_1 et P_2, constitués respectivement des poids de l'inertie modérée de π_1 et π_2, vérifient $P_2 = -P_1 + j + 2k - 3$. Comme $\ell > j + 2k - 2$, 0 est dans P_1 (quitte à échanger π_1 et π_2), auquel cas $j + 2k - 3$ est dans P_2, et donc $P_1 = \{0, j+k-1\}$ ou $P_1 = \{0, k-2\}$ (noter que les quatre poids sont distincts par hypothèses). Deux cas sont alors à envisager.

Dans le premier cas, le polynôme $P_{j,k,p}$ se factorise modulo ℓ sous la forme :

$$P_{j,k,p}(X) = \left(X^2 - AX + p^{3k+j-5}\right)\left(X^2 - \frac{A}{p^{k-2}}X + p^{j+k-1}\right).$$

En identifiant et en éliminant A, on voit que ℓ doit diviser

$$C_{j,k}(p) = \left(\frac{\tau_{j,k}(p)^2 - \tau_{j,k}(p^2)}{2} - p^{j+k-1} - p^{j+3k-5}\right)\left(1+p^{k-2}\right)^2 - p^{k-2}\tau_{j,k}(p)^2.$$

Dans le second cas, on doit avoir une factorisation de la forme :

$$P_{j,k,p}(X) = \left(X^2 - AX + p^{3k+2j-4}\right)\left(X^2 - \frac{A}{p^{j+k-1}}X + p^{k-2}\right).$$

En identifiant et en éliminant A, on voit que ℓ doit diviser :

$$D_{j,k}(p) = \left(\frac{\tau_{j,k}(p)^2 - \tau_{j,k}(p^2)}{2} - p^{k-2} - p^{2j+3k-4}\right)(1+p^{j+k-1})^2 - p^{j+k-1}\tau_{j,k}(p)^2.$$

Existence de deux composantes de dimension 2 *non reliées.* Dans ce dernier cas, $\overline{r_{j,k,\ell}}$ est la somme de deux représentations irréductibles $\overline{r_{j,k,l}} \simeq \pi_1 \oplus \pi_2$ avec $\pi_1^* \otimes \chi_\ell^{j+2k-3} \simeq \pi_1$ et $\pi_2^* \otimes \chi_\ell^{j+2k-3} \simeq \pi_2$.

Comme $\ell > j+2k-2$, la proposition 2.2 s'applique. Quitte à échanger les rôles de π_1 et π_2, on peut supposer que 0 est un poids de l'inertie modérée de π_1, de sorte que ses deux poids sont 0 et $j + 2k - 3$, et ceux de π_2 sont $k - 2$ et $j + k - 1$.

On utilise alors la résolution par Wintenberger et Khare de la conjecture de Serre (voir [6] et [12]). En effet, considérons la représentation $\rho := \pi_2 \otimes \chi_\ell^{2-k}$. Elle est irréductible (comme représentation du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}$). Elle est impaire car son déterminant est $\chi_\ell^{j+2k-3-2k+4} = \chi_\ell^{j+1}$, et $j+1$ est impair. Comme elle est non ramifiée hors de ℓ, le conducteur $\mathrm{N}(\rho)$ de ρ est 1. Les poids de l'inertie modérée de ρ sont $0 < j+1 < \ell$. Si la restriction de ρ à I_ℓ est irréductible, alors le poids de Serre $k(\rho)$ vaut $j+2$ par la recette de Serre. Dans les autres cas, elle est réductible de semi-simplifiée $1 \oplus \chi_\ell^{j+1}$. Mais par construction de $\overline{r_{j,k,\ell}}$, la restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)$ de la représentation π_2 est du type de celles étudiées par Fontaine et Laffaille dans [5]. On a $k-2 < j+k-1$, d'après ces auteurs (voir aussi le théorème 2 de [16]), c'est donc nécessairement une extension de χ_ℓ^{k-2} par χ_ℓ^{j+k-1}, comme on le voit sur le module filtré associé. Ainsi, ρ est une extension de 1 par χ_ℓ^{j+1}, de sorte que la recette de Serre donne encore $k(\rho) = j+2$ car on a $1 < j+1 < \ell-1$. D'après Khare, ρ est donc la représentation résiduelle associée à une forme modulaire parabolique pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ de poids $j+2$. Mais pour $j = 4, 6, 8, 12$, l'espace des formes modulaires paraboliques de poids $j+2$ pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est nul, une contradiction.

Résultats des calculs explicites. En utilisant les tables données dans [3], on calcule $A_{j,k}(p)$, $B_{j,k}(p)$, $C_{j,k}(p)$ et $D_{j,k}(p)$ pour certains nombres premiers p. On retiendra le fait que les conditions de réductibilité précédemment étudiées imposent à ℓ de diviser les éléments de chaque ligne des tables 2, 3, 4 et 5, dès que ℓ est supérieur à $j+2k-2$. On remarquera par exemple que 23 divise les éléments de la troisième ligne pour $(j,k) = (8,8)$ et 41 divise les éléments de la deuxième ligne pour $(j,k) = (4,10)$. Cela permet donc de compléter la démonstration du théorème 1.2.

Le résultat suivant résulte sans doute (pour tout ℓ) de la construction des $r_{j,k;\ell}$ par Weissauer [17]. Nous en proposons ci-dessous une démonstration alternative.

Corollaire 3.1. *Soient (j,k) l'un des quatre couples ci-dessus et ℓ un nombre premier ≥ 7. Alors la représentation $r_{j,k,\ell}$ est définie sur $\mathbb{Q}_\ell$. En particulier, son image est conjuguée à un sous-groupe de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Z}_\ell)$.*

Preuve du corollaire 3.1. Nous avons déjà dit que la représentation $r_{j,k,\ell}$ est irréductible, et à traces dans $\mathbb{Q}(f)_\ell = \mathbb{Q}_\ell$. Soit R la $\mathbb{Q}_\ell$-algèbre engendrée par le groupe $r_{j,k,\ell}(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ dans l'anneau des endomorphismes de V. La théorie de Wedderburn assure que R est centrale et simple de rang 16. D'après la propriété (ii) du théorème 1.1, les conjugaisons complexes de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ ont pour valeurs propres $1, 1, -1, -1$. Ce n'est donc pas une algèbre à division et on a alors deux cas possibles : soit $R \simeq \mathrm{M}_4(\mathbb{Q}_\ell)$, ce qui équivaut à dire que la représentation

$r_{j,k,\ell}$ est définie sur $\mathbb{Q}_\ell$, soit $R \simeq \mathrm{M}_2(H)$ où H est l'unique algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}_\ell$. Dans ce deuxième cas, la représentation résiduelle $\overline{r_{j,k,\ell}}$ est alors somme directe de deux représentations de dimension 2, disons (V_1, r_1) et (V_2, r_2), toutes les deux définies sur $\mathbb{F}_{\ell^2}$, et telles que $(V_2, r_2) \simeq (V_1, \phi_\ell \circ r_1)$, où $\phi_\ell : \mathrm{GL}(V_1) \to \mathrm{GL}(V_1)$ est l'élévation à la puissance ℓ. Bien entendu, cette possibilité est exclue si $\overline{r_{j,k,\ell}}$ est irréductible, de sorte qu'il n'y a qu'un nombre fini de cas restant à traiter d'après le théorème précédent. Or, dans ces cas, la représentation $\overline{r_{j,k,\ell}}$ a été étudiée dans le Théorème X.4.4 de [3]. D'après cette référence, elle est alors réductible, tous ses facteurs sont définis sur $\mathbb{F}_\ell$, et ils sont sans multiplicité si $\ell \geq 7$. □

4. Sous-groupes maximaux du groupe projectif symplectique

Soient k un corps de caractéristique différente de 2, V un espace vectoriel de dimension 4 sur k muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée A. La forme A définit un élément de $\Lambda^2 V^*$. On définit le groupe des similitudes symplectiques de A comme suit :

$$\mathrm{GSp}(A) := \{g \in \mathrm{GL}(V), \exists \eta(g) \in k^\times, \forall x, y \in V, A(g(x), g(y)) = \eta(g) A(x, y)\}.$$

Le scalaire $\eta(g)$ s'appelle facteur de similitude de g et l'application $\eta : \mathrm{GSp}(A) \to k^\times$ est un morphisme de groupe, de noyau le groupe $\mathrm{Sp}(A)$, le groupe symplectique associé à A, et on a la suite exacte courte :

$$1 \to \mathrm{Sp}(A) \to \mathrm{GSp}(A) \xrightarrow{\eta} k^\times \to 1.$$

On suppose que V est muni d'une base (e_0, e_1, e_2, e_3) dans laquelle la matrice de A est $J = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix}$. On note dans ce cas

$$\mathrm{GSp}_4(k) := \mathrm{GSp}(A), \quad \mathrm{Sp}_4(k) := \mathrm{Sp}(A)$$

et on a donc :

$$\mathrm{GSp}_4(k) = \{M \in \mathrm{M}_4(k), \exists \eta(M) \in k^\times : M^t J M = \eta(M) J\}.$$

On note $\mathrm{PGSp}(A)$ le quotient du groupe $\mathrm{GSp}(A)$ par son centre, formé des homothéties. De même, $\mathrm{PSp}(A)$ est le quotient de $\mathrm{Sp}(A)$ par $\{\pm \mathrm{Id}_V\}$, où Id_V désigne l'application identité de V. On a alors la suite exacte :

$$1 \to \mathrm{PSp}(A) \to \mathrm{PGSp}(A) \xrightarrow{\eta} k^\times / {k^\times}^2 \to 1.$$

On dispose d'une application bilinéaire :

$$b : \Lambda^2 V \times \Lambda^2 V \to \Lambda^4 V$$

induite par l'application multilinéaire alternée

$$\begin{aligned} V \times V \times V \times V \quad &\to \Lambda^4 V \\ (u, v, w, z) \quad &\mapsto u \wedge v \wedge w \wedge z. \end{aligned}$$

L'application b est symétrique car les tenseurs d'ordre 2 commutent. Elle est non dégénérée. Ceci peut se voir simplement en écrivant sa matrice dans la base des tenseurs purs associés à la base (e_0, e_1, e_2, e_3). Identifions (de manière un peu arbitraire) la droite $\Lambda^4 V$ à k au moyen de la base $e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$. Cela permet de voir b comme une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\Lambda^2 V$ (on peut même vérifier qu'elle est hyperbolique, ou autrement dit, qu'elle possède un sous-espace isotrope de dimension 3). En particulier, elle induit un isomorphisme entre $\Lambda^2 V$ et $\Lambda^2 V^*$. Notons $\widetilde{A}$ l'élément de $\Lambda^2 V$ qui correspond à la forme symplectique A via cet isomorphisme. Par définition, on a la relation $A(v, w)e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = v \wedge w \wedge \widetilde{A}$ pour tous $v, w \in V$, et donc l'identité $\widetilde{A} = -e_0 \wedge e_2 - e_1 \wedge e_3$. En particulier, on constate que l'on a $b(\widetilde{A}, \widetilde{A}) = -2 \neq 0$: l'élément $\widetilde{A}$ n'est pas isotrope pour b dans $\Lambda^2 V$.

Le groupe linéaire de V agit de manière naturelle sur $\Lambda^2 V$. Tout élément de $\mathrm{GL}(V)$ est une similitude pour b, c'est-dire un élément de $\mathrm{GO}(b)$. De plus, le facteur de similitude d'un élément $g \in \mathrm{GL}(V)$ pour la forme b est le déterminant de g. En effet, cela découle de l'égalité, valable pour u, v, w, z des éléments de V :

$$(\wedge^4 g)\,(u \wedge v \wedge w \wedge z) = \det(g)\, u \wedge v \wedge w \wedge z.$$

Le sous-groupe $\mathrm{GSp}(A)$ agit, par définition, de manière scalaire sur A, et par suite sur $\widetilde{A}$ aussi. Il stabilise donc $H = \widetilde{A}^{\perp}$. La forme b restreinte à H, que l'on notera b_H, est non-dégénérée car on a vu que $\widetilde{A}$ n'est pas isotrope. On a ainsi défini un morphisme naturel $\iota : \mathrm{GSp}(A) \to \mathrm{GO}(b_H)$. En fait, le groupe $\mathrm{GSp}(A)$ agit sur $H \otimes \eta^{-1}$ par des éléments de $\mathrm{SO}(b_H)$, de sorte que l'on a construit un morphisme de groupes $\mathrm{PGSp}(A) \to \mathrm{SO}(b_H)$; il est bien connu que c'est un isomorphisme.

On suppose que $\mathrm{char}\, k \neq 3$. On rappelle que le groupe $\mathrm{GL}_2(k)$ agit sur l'espace $\mathrm{Sym}^3 k^2$ par des similitudes symplectiques, relativement à une forme bilinéaire alternée non dégénérée convenablement fixée sur $\mathrm{Sym}^3 k^2$ (une telle forme étant d'ailleurs unique à un scalaire près). Cela définit un homomorphisme injectif $\mathrm{PGL}_2(k) \to \mathrm{PGSp}_4(k)$, appelé *plongement principal*, dont la classe de conjugaison est canonique. Un tel sous-groupe de $\mathrm{PGSp}_4(k)$ peut aussi être défini comme étant le stabilisateur d'une “cubique tordue” de l'espace projectif $\mathrm{P}(V)$ [9].

Mitchell a classifié dans [9] les sous-groupes maximaux de $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_q)$. Cette classification est reprise par King dans [7], page 8. On peut vérifier que ces diverses formulations impliquent la classification suivante pour $\mathrm{PGSp}_4(\mathbb{F}_q)$.

Théorème 4.1. *Soient ℓ un nombre premier > 3, V et H les $\mathbb{F}_\ell$-représentations naturelles de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_\ell)$ décrites ci-dessus, de dimensions respectives 4 et 5. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{PGSp}_4(\mathbb{F}_\ell)$. Alors soit G contient $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_\ell)$, soit il est inclus dans l'un des sous-groupes suivants :*

(1) Stabilisateur d'une droite de V,

(2) Stabilisateur d'un plan isotrope de V (ou ce qui revient au même, d'une droite isotrope de H),

(3) Stabilisateur d'une droite non isotrope de H,

(4) Stabilisateur d'un plan non dégénéré de H,

(5) Le groupe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_\ell)$ plongé de manière principale,

(6) Un groupe contenant un sous-groupe d'indice ≤ 2 qui est extension de $\mathcal{A}_5$, ou de $\mathcal{S}_5$, par $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$,

(7) Un groupe contenant un sous-groupe d'indice ≤ 2 isomorphe à $\mathcal{A}_6, \mathcal{S}_6$ ou $\mathcal{A}_7$ (et dans ce dernier cas on a $\ell = 7$).

Remarque 4.2. Dans la terminologie de Mitchell, si U est un sous-groupe de $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_\ell)$ du type (2), (3), (4) ou (5), alors U est le stabilisateur d'une congruence parabolique, d'une congruence hyperbolique ou elliptique de $\Lambda^2 V$ contenant $\widetilde{A}$, d'une quadrique de $\Lambda^2 V$ ou d'une cubique tordue de $\Lambda^2 V$.

5. Étude de l'image

Notre objectif dans ce chapitre est de démontrer le théorème 1.3 de l'introduction. Soient (j,k) l'un des quatre couples de l'introduction, ℓ un nombre premier, ρ la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ notée $r_{j,k,\ell}$ dans l'introduction, et $\overline{\rho} := \overline{r_{j,k,\ell}}$ sa représentation résiduelle. Comme on l'a déjà expliqué, $\overline{\rho}$ est définie sur $\mathbb{F}_\ell$, et prend ses valeurs dans le groupe des similitudes symplectiques d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée bien choisie, de sorte que l'on peut supposer que l'on a

$$\mathrm{Im}\,\overline{\rho} \subset \mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_\ell).$$

Conformément à la section 4, on notera V le $\mathbb{F}_\ell$-espace vectoriel de dimension 4 sous-jacent, muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée. On note de plus G_ℓ l'image de $\overline{\rho}$ dans $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_\ell)$ et PG_ℓ l'image de G_ℓ dans $\mathrm{PGSp}_4(\mathbb{F}_\ell)$.

On se place dans les hypothèses du théorème 1.2, de sorte que la représentation $\overline{\rho} = V \otimes \overline{\mathbb{F}_\ell}$ est irréductible. En particulier, on a $\ell \geq 7$. On suppose que PG_ℓ ne contient pas $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_\ell)$. Il est donc contenu dans l'un des sous-groupes maximaux du type (1) à (7) dans la liste du théorème 4.1. Nous allons procéder à une étude au cas par cas. L'idée est de montrer que la forme de l'image est incompatible soit avec l'action de l'inertie quand ℓ est assez grand, soit avec l'action du Frobenius en $p \neq \ell$ quand ℓ est petit. On rappelle que la représentation $H \subset \Lambda^2 V$ a été introduite à la section 4 et que $\Lambda^2 V$ est muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée naturelle.

Cas (1) ou (2) : Stabilisateur d'une droite, ou d'un plan isotrope, de V. Ce n'est pas possible car la représentation est irréductible.

Cas (3) ou (4) : Stabilisateur d'une droite ou d'un plan non dégénérés de H. Dans les deux cas, G_ℓ préserve un plan non dégénéré $P \subset \Lambda^2 V$. En particulier, la représentation naturelle de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $P \otimes \chi_\ell^{-w}$, avec $w = j + 2k - 3$, définit un homomorphisme

$$r : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{O}(P)$$

(le groupe orthogonal du plan quadratique P). Il est bien connu que les vecteurs isotropes de $\Lambda^2 V \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ sont exactement les tenseurs purs ("quadrique de Klein"). Comme ρ est irréductible, elle n'admet pas de plan stable, et donc $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ ne stabilise aucune des deux droites isotropes de $P \otimes \overline{\mathbb{F}_\ell}$. Son image n'est donc pas incluse dans $\mathrm{SO}(P)$. Autrement dit, l'homomorphisme

$$\epsilon := \det r : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \{\pm 1\}$$

est non trivial. Il est continu, et non ramifié hors de ℓ, par construction. Il définit donc une extension quadratique de $\mathbb{Q}$ non ramifiée hors de ℓ. Mais il est bien connu qu'une telle extension est nécessairement ramifiée en ℓ (c'est $\mathbb{Q}\left(\sqrt{(-1)^{\frac{\ell-1}{2}}\ell}\right)$), autrement dit que $\epsilon(\mathrm{I}_\ell) = \{\pm 1\}$. On a donc montré que

$$\epsilon = \chi_\ell^{\frac{\ell-1}{2}}. \tag{1}$$

D'autre part, on a $\ell > 2$ donc tout élément de $\mathrm{O}(P)$ est semi-simple. L'inertie sauvage de I_ℓ agit trivialement dans r, et le sous-groupe $r(\mathrm{I}_\ell)$ est cyclique (d'ordre premier à ℓ). Si σ en est un générateur, on a donc $\det(\sigma) = -1$: c'est une symétrie orthogonale. Ainsi, la restriction de r à I_ℓ est somme du caractère trivial et d'un caractère d'ordre 2 : c'est donc $1 \oplus \chi_\ell^{\frac{\ell-1}{2}}$.

Pour éliminer cette éventualité, faisons d'abord l'hypothèse supplémentaire

$$\ell > 2w,$$

avec $w = j + 2k - 3$. Sous cette hypothèse, qui entraîne $\ell > j + 2k - 2$ et $2j + 3k - 4 \leq \ell - 1$, la proposition 2.2 et le lemme 2.1 assurent que les poids d'inertie modérée agissant sur $\Lambda^2 V$ sont les entiers distincts

$$(2) \qquad k - 2 < j + k - 1 < j + 2k - 3 < j + 3k - 5 < 2j + 3k - 4$$

(on a dans tous les cas $j \geq 4$, $k \geq 6$), avec $j + 2k - 3$ de multiplicité 2. En particulier, les deux poids de l'inertie modérée de $r \otimes \chi_\ell^w \subset \Lambda^2 V$ sont dans cette liste. Mais d'après le paragraphe précédent, et l'hypothèse $\ell > 2w$, ces deux poids sont w et $w + \frac{\ell-1}{2}$. En particulier, $\frac{\ell-1}{2} + w$ est dans la liste (2), ce qui est absurde par l'inégalité $\frac{\ell-1}{2} + w \geq 2w > 2j + 3k - 4$.

Expliquons maintenant comment éliminer les cas restants, pour lesquels on a $7 \leq \ell \leq 41$. Regardons l'action de Frob_p sur $\Lambda^2 V \otimes \chi_\ell^{-w}$ (avec $p \neq \ell$). C'est un élément de $\mathrm{SO}(H)$ dont le polynôme caractéristique est la réduction modulo ℓ de

$$R_p(t) = (t-1)(t^4 - at^3 + bt^2 - at + 1)$$

avec $a = \left(\frac{\tau_{j,k}(p)^2 - \tau_{j,k}(p^2)}{2\,p^w} - 2\right)$ et $b = \tau_{j,k}(p^2)/p^w + 2$, comme on le vérifie facilement. Donc, si p est un nombre premier qui n'est pas un carré modulo ℓ, alors $r(\mathrm{Frob}_p) \in \mathrm{O}(P) - \mathrm{SO}(P)$ d'après (1) et donc -1 est valeur propre, i.e $R_p(-1) = 0$. On peut alors procéder de la manière suivante. On constate d'abord que l'un des premiers 2, 3, 5 est toujours un non-carré modulo ℓ lorsque $7 \leq \ell \leq 41$. On vérifie dans tous les cas que si $\overline{r_{j,k,\ell}}$ est irréductible (i.e. que le triplet (j,k,ℓ) est dans la liste du théorème 1.2), et si (j,k,ℓ) n'est ni $(6,8,13)$, ni $(4,10,17)$, alors il existe toujours $p \in \{2,3,5\}$ non carré modulo ℓ et tel que $R_p(-1) \neq 0$. Traitons par exemple le cas $(j,k) = (6,8)$. Le cas $\ell = 13$ est exclus par l'énoncé. De plus, on vérifie que l'on a $R_2(-1) = 0$, $R_3(-1) = -2^7 \cdot 5^6/3^{13}$ et $R_5(-1) = -2^5 \cdot 3^{14} \cdot 13^2 \cdot 5^{-15}$. On a de plus $\ell \neq 11$ car $\overline{r_{6,8,11}}$ est réductible. On conclut car soit 3, soit 5, est non-carré modulo ℓ.

Cas (5) : Stabilisateur d'une cubique de $\mathrm{P}(V)$. Dans ce cas, pour tout élément σ de G_ℓ, il existe $x, y, z \in \overline{\mathbb{F}_\ell}^*$ tels que σ admet pour valeurs propres dans $V \otimes \overline{\mathbb{F}_\ell}$ les éléments $x^a y^{3-a} z$, avec $0 \leq a \leq 3$. La restriction de $\overline{\rho}$ à I_ℓ se factorise par un quotient fini K de ce dernier, qui est produit semi-direct d'un groupe cyclique $\langle \tau \rangle$ d'ordre premier à ℓ par un ℓ-groupe fini (inertie sauvage). Appliquons l'observation précédente à l'élément $\sigma = \overline{\rho}(\tau)$. On sait que la semi-simplifiée de $\overline{\rho}_{|\mathrm{I}_\ell}$ est somme de quatre caractères $\chi_1, \ldots, \chi_4$. Les valeurs propres précédentes s'écrivent donc également $\chi_i(\tau)$, $i = 1, \cdots, 4$. On en déduit que quitte à renuméroter les χ_i, on peut supposer que l'on a les égalités

$$\chi_1(\tau)/\chi_2(\tau) = \chi_2(\tau)/\chi_3(\tau) = \chi_3(\tau)/\chi_4(\tau).$$

Autrement dit, on a $\chi_1\chi_3 = \chi_2^2$ et $\chi_2\chi_4 = \chi_3^2$. Un argument similaire à celui du lemme 2.1 montre que sous l'hypothèse $\ell > 2w$, l'ensemble des poids de l'inertie modérée de V est de la forme $\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ avec

$$k_1 + k_3 = 2k_2 \ \text{ et } \ k_2 + k_4 = 2k_3.$$

On en déduit que k_i et k_{i+2} ont même parité. C'est impossible, car dans la liste $\{k_1, k_2, k_3, k_4\} = \{0, k-2, j+k-1, j+2k-3\}$, les éléments de même parité sont consécutifs (noter que l'on a $j > 2$).

Enfin, pour traiter les cas restants, à savoir $7 \leq \ell \leq 41$, on observe que si $p \neq \ell$, les racines de $R_p(t)$ dans $\overline{\mathbb{F}_\ell}$ sont de la forme $1, u^2, u, u^{-1}, u^{-2}$ avec $u \in \overline{\mathbb{F}_\ell}^\times$. En effet, l'action de Frob_p sur V a des valeurs propres de la forme $x^a y^{3-a} z$ avec $0 \leq a \leq 3$, $z \in \overline{\mathbb{F}_\ell}^\times$ et $x^3y^3z^2 = p^{j+2k-3} = \chi_\ell^w(\mathrm{Frob}_p)$. Son action sur $\Lambda^2 V$ a donc pour valeurs propres $x^5yz^2, x^4y^2z^2, x^3y^3z^2, x^3y^3z^2, x^2y^4z^2, xy^5z^2$, d'où l'on déduit les valeurs propres de l'action sur $\Lambda^2 V \otimes \chi_\ell^{-w}$ en divisant par $x^3y^3z^2$ et en posant $u = xy^{-1}$. Posons $Q_p(t) = R_p(t)/(t-1)$, alors les images dans $\mathbb{F}_\ell[t]$ de $Q_p(t)$ et $Q_p(t^2)$ ne sont pas premières entre elles. On vérifie à l'aide du logiciel `PARI` [10] que si $\overline{r_{j,k,\ell}}$ est irréductible, et si $7 \leq \ell \leq 41$, alors il existe toujours un nombre premier $p \in \{2, 3, 5\}$ tel que cette propriété est mise en défaut. Par exemple si $(j, k) = (8, 8)$, auquel cas $\ell = 13$ et 17 sont exclus (cas réductibles), le nombre premier $p = 2$ convient toujours.

Cas (6) et (7). Supposons $\ell \geq 7$. Dans ces cas, on observe que tout élément de PG_ℓ est d'ordre divisant 16, 20,24 ou, si $\ell = 7$, 14. Supposons d'abord $\ell > 7$, alors ℓ ne divise pas l'ordre de G_ℓ, de sorte que l'inertie sauvage en ℓ agit trivialement dans V. Le groupe I_ℓ agit donc de manière diagonalisable sur $V \otimes \overline{\mathbb{F}_\ell}$, à travers un quotient cyclique d'ordre premier à ℓ. Soient $\sigma \in G_\ell$ un générateur de l'image de I_ℓ et $N \geq 1$ l'ordre de l'image de σ dans PG_ℓ. D'après l'analyse ci-dessus, l'entier N divise $16, 20$ ou 24. En particulier $N \leq 24$. De plus, σ^N agit par une homothétie sur V. Ainsi, si $\chi_1, \cdots, \chi_4$ désignent les caractères de I_ℓ intervenant dans $V \otimes \overline{\mathbb{F}_\ell}$, alors les χ_i^N, $i = 1, \ldots, 4$, sont tous égaux. Supposons de plus que l'on a

$$\ell - 1 \geq 24w,$$

où $w = j + 2k - 3$. Pour chaque entier $1 \leq i \leq 4$, écrivons χ_i sous la forme $\psi_M^{a_0 + \ell a_1 + \cdots + \ell^{M-1} a_{M-1}}$ avec $M \geq 1$ convenable et $0 \leq a_s \leq \ell - 1$ pour tout s. On sait que la collection des a_0 est exactement l'ensemble des poids de l'inertie modérée de V qui sont donnés par la proposition 2.2. Sous l'hypothèse $\ell - 1 \geq 24w$, les classe modulo ℓ de ces poids multipliés par N restent distinctes. C'est bien entendu absurde.

Cette analyse montre que si $\ell > 24 \cdot 21 = 504$, alors on n'est jamais dans les cas (6) ou (7). Pour conclure, expliquons comment montrer que ces cas ne sont en fait pas possibles pour tout $\ell \geq 7$. Il n'y a qu'un nombre fini de cas à écarter. On procède de la manière suivante. Regardons à nouveau l'action de Frob_p sur $\Lambda^2 V \otimes \chi_\ell^{-w}$ (avec $p \neq \ell$). C'est un élément de $\mathrm{SO}(H)$ dont le polynôme caractéristique est la réduction modulo ℓ du polynôme $R_p(t)$ déjà introduit plus haut. Soit Q le polynôme $(t^{16}-1)(t^{20}-1)(t^{24}-1)$. On vérifie, par exemple en utilisant le logiciel `PARI` [10], que pour chacun des 4 couples (j,k), et pour tout $7 \leq \ell < 504$ tel que (j,k,ℓ) soit comme dans le théorème 1.3, alors $R_2(t)$, $R_3(t)$, $R_5(t)$ ou $R_{13}(t)$ ne divise pas $Q(t)^4$ dans $\mathbb{F}_\ell[t]$. Par exemple, pour $(j,k) = (6,8)$, et pour $7 \leq \ell < 504$, alors $R_2(t)$ (resp. $R_3(t)$, resp. $R_5(t)$) divise $Q(t)^4$ dans $\mathbb{F}_\ell[t]$ si, et seulement si $\ell = 7, 11, 13, 17, 23, 47, 103, 107, 109, 461$ (resp. $\ell = 7, 11, 17, 23, 359$, resp. $\ell = 7, 11, 31$). Pour éliminer le cas $\ell = 7$, on constate que $R_{13}(t)$ ne divise pas $Q(t)^4$ dans $\mathbb{F}_7[t]$.

L'image dans $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Z}_\ell)$. La propriété (ii) de la représentation $r_{j,k,\ell}$, et la surjectivité du caractère cyclotomique $\chi_\ell : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell) \to \mathbb{Z}_\ell^\times$, montrent que $\nu(G_\ell)$ est le sous-groupe des puissances w-ièmes du groupe $\mathbb{Z}_\ell^\times$, avec $w = j+2k-3$. Il suffit donc de démontrer que si PG_ℓ contient $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_\ell)$, et si $\ell > 3$, alors l'image de ρ contient $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}_\ell)$.

On rappelle que si $\ell > 2$, le seul sous-groupe distingué non trivial de $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_\ell)$ est son centre $\{\pm 1\}$. Cela entraîne que si un sous-groupe H de $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_\ell)$ s'envoie surjectivement sur $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_\ell)$, et si $\ell > 2$, alors $H = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_\ell)$ (sinon H serait un sous-groupe d'indice 2, nécessairement distingué, de $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_\ell)$). Ceci étant dit, supposons que PG_ℓ contienne $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_\ell)$. Notons $\mathrm{D}(K)$ le groupe dérivé du groupe K. On constate que $\mathrm{D}(G_\ell)$ (qui est un sous-groupe de $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_\ell)$) s'envoie surjectivement sur $\mathrm{D}(\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_\ell)) = \mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_\ell)$. La remarque précédente montre donc que $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_\ell) = \mathrm{D}(G_\ell) \subset G_\ell$. On conclut par le lemme suivant, dû à Serre [13, page 52].

Lemme 5.1. *Soient ℓ un nombre premier > 3 et G un sous-groupe fermé de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Z}_\ell)$ tel que son image dans $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_\ell)$ contienne $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_\ell)$. Alors G contient $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}_\ell)$.*

6. Calculs explicites

q	$\tau_{6,8}(q)$	$\tau_{8,8}(q)$
2	0	1344
3	−27000	−6408
4	409600	348160
9	333371700	748312020
5	2843100	−30774900
25	−15923680827500	−395299890927500
7	−107822000	451366384
49	−253514141409500	−155544419215478300
13	9952079500	−328006712228
169	−4843967045593944889100	−596184280686941758305260

q	$\tau_{12,6}(q)$	$\tau_{4,10}(q)$
2	−240	−1680
3	68040	55080
4	4276480	−700160
9	−8215290540	1854007380
5	14765100	−7338900
25	722477627072500	−904546757727500
7	334972400	609422800
49	−1126868422025500700	−391120313742441500
13	91151149180	−263384451140
169	−299941151717771094659180	323494600665947822387860

Table 1. Quelques valeurs propres des opérateurs de Hecke en genre 2 [3].

p	2	3
$A_{6,8}(p)$	$3^3.5.37.137.197.2039$	$2^{12}.5.17.109.54196568909$
$B_{6,8}(p)$	$2^{12}.3^3.5.11^2$	$2^{12}.3^9.5.11^2.53$
$C_{6,8}(p)$	$-2^{14}.3^2.5^2.13^2.229$	$-2^{14}.3^{10}.5^2.3251.5741$
$D_{6,8}(p)$	$-2^6.3^2.5.2731.2939.4567$	$-2^{14}.3^6.5.11.116167.61722049878337$

Table 2. Factorisations pour $(j, k) = (6, 8)$.

p	2	3
$A_{8,8}(p)$	$3^2.488358740729$	$2^{12}.11.13.43.67.64841599673$
$B_{8,8}(p)$	$2^{13}.3^2.5^2.13.43$	$2^{17}.3^8.5^2.11.13.67$
$C_{8,8}(p)$	$-2^{13}.3^2.17.23^3.37$	$-2^{13}.3^9.23^2.67.711097$
$D_{8,8}(p)$	$-2^6.3^2.5^3.7.301577.1891283$	$-2^9.3^6.5.41.1019.12011419289294459$

Table 3. Factorisations pour $(j, k) = (8, 8)$.

p	2	3
$A_{12,6}(p)$	$3^3.5.32581834951$	$2^{14}.5.11.121424757430201$
$B_{12,6}(p)$	$2^{13}.3^5.5.7.13.19$	$2^{13}.3^8.5.7.13.681589$
$C_{12,6}(p)$	$-2^{14}.3^3.7.13.257$	$-2^{14}.3^9.7.13.107.1801$
$D_{12,6}(p)$	$-2^4.3^3.5.7.612083.128494763$	$-2^8.3^4.5.13.757.41442159469563851813$

Table 4. Factorisations pour $(j, k) = (12, 6)$.

p	2	3
$A_{4,10}(p)$	$3^3.5^2.11.10861.54581$	$2^{11}.5^2.11.41.103.739.62253281$
$B_{4,10}(p)$	$2^{12}.3^2.5.11.41$	$2^{11}.3^{12}.5.11.41$
$C_{4,10}(p)$	$-2^{14}.3^4.11.67.36137$	$-2^{13}.3^{15}.11.17^3.173.2689$
$D_{4,10}(p)$	$-2^6.3^2.5.19.25841.51063917$	$-2^8.3^8.5^2.1151.10828398485532941$

Table 5. Factorisations pour $(j, k) = (4, 10)$.

Références

[1] F. Calegari and T. Gee, *Irreducibility of automorphic Galois representations of* $GL(n)$*, n at most 5*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 63 (2013), pp. 1881–1912.

[2] G. Chenevier and M. Harris, *Construction of automorphic Galois representations, II*, Camb. J. Math., 1 (2013), pp. 53–73.

[3] G. Chenevier and J. Lannes, *Formes automorphes et voisins de Kneser des réseaux de Niemeier*, ArXiv e-prints, (2015).

[4] L. V. Dieulefait, *On the images of the Galois representations attached to genus 2 Siegel modular forms*, J. Reine Angew. Math., 553 (2002), pp. 183–200.

[5] J.-M. Fontaine and G. Laffaille, *Construction de représentations p-adiques*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 15 (1982), pp. 547–608.

[6] C. Khare and J.-P. Wintenberger, *Serre's modularity conjecture. I*, Invent. Math., 178 (2009), pp. 485–504.

[7] O. H. King, *The subgroup structure of finite classical groups in terms of geometric configurations*, in Surveys in combinatorics 2005, vol. 327 of London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge Univ. Press, Cambridge, pp. 29–56.

[8] T. Mégarbané, *Traces des op\'erateurs de Hecke sur les espaces de formes automorphes de* SO_7*,* SO_8 *ou* SO_9 *en niveau* 1 *et poids arbitraire*, ArXiv e-prints, (2016).

[9] H. H. Mitchell, *The subgroups of the quaternary abelian linear group*, Transactions of the American Mathematical Society, 15 (1914), pp. 379–396.

[10] The PARI Group, *PARI/GP version* `2.7.0`, Bordeaux, 2014. available from : http ://pari.math.u-bordeaux.fr.

[11] J.-P. Serre, *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Invent. Math., 15 (1972), pp. 259–331.

[12] ——, *Sur les représentations modulaires de degré* 2 *de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, Duke Math. J., 54 (1987), pp. 179–230.

[13] ——, *Oeuvres, Collected papers. IV. 1985–1998*, Springer Collected Works in Mathematics, Springer, Heidelberg, 2013. Reprint of the 2000 edition [MR1730973].

[14] R. Tsushima, *An explicit dimension formula for the spaces of generalized automorphic forms with respect to* $\mathrm{Sp}(2, \mathbf{Z})$, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 59 (1983), pp. 139–142.

[15] G. van der Geer, *Siegel Modular Forms*, The 1-2-3 of modular forms, (2008). Lectures from the Summer School on Modular Forms and their Applications held in Nordfjordeid, June 2004, Edited by Kristian Ranestad.

[16] N. Wach, *Représentations cristallines de torsion*, Compositio Math., 108 (1997), pp. 185–240.

[17] R. Weissauer, *Four dimensional galois representations*, Preprint, (2000).